

A01

66

Ringraziamenti particolari vanno ai professori V. Michele Abrusci, Marco Fontana, Mario Girardi, Francesco Pappalardi.

Ringraziamo inoltre Paola Cecchetti, Gianfranco Iannotti, Marialuisa e Pantaleo Magrone, Giulio Mecocci, Stefania Pecere; Valentina Ariete, Franca Momoni, Carlo Borriello, Francesco Panizzoli, Luigi Zangrilli, Alessandro Petraghani, Maria Angelica Foggia, Salvatore Di Stefano, Ria Lussi, Sansone.

Pasquale Borriello / Paola Magrone

Argomenti di Matematica per Filosofia



Copyright © MMV
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-7999-619-8

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 2003
II edizione: ottobre 2005

Prefazione

*La Matematica possiede una luce ed
una sapienza proprie, e ricompensa
largamente ogni essere intelligente
che arriva a cogliere un raggio
di ciò che essa è in sé.*

Eric Temple Bell

Come è ormai largamente noto e condiviso, poche scienze come la matematica possiedono in sé l'ambivalenza di risultare ostiche e respingenti per i non addetti ai lavori e, al tempo stesso, assolutamente necessarie e vitali per larga parte del nostro quotidiano. Dagli oggetti che ci circondano, al mondo vegetale e animale, alle leggi che regolano la convivenza dell'uomo con i propri simili e con le macchine, non esiste praticamente alcun ambito del vivere umano che non sia regolato e descrivibile da formule matematiche.

Questo testo si rivolge proprio agli attori inconsapevoli di tale meccanismo, quei lettori che, per le ragioni più diverse, possano avere modo di avvicinarsi ad un mondo sconosciuto per scoprirne - ricavandone anche inaspettate e piacevoli sorprese - le principali caratteristiche, le applicazioni pratiche e alcune delle innumerevoli utilità.

Da un lato, vorremmo risvegliare l'interesse degli studenti di filosofia (e non solo) per l'aspetto matematico e formale di concetti fondamentali: la costruzione degli insiemi di numeri a partire dai naturali, la definizione di numero reale, la nozione di limite, il concetto di continuità e quello di derivabilità di una funzione.

Dall'altro, vorremmo opportunamente insistere sull'importanza di nozioni elementari di algebra e analisi matematica dal punto di vista filosofico. Avere un'idea di quelli che sono gli argomenti di base con cui un matematico si confronta (almeno nei primi anni di studio) è essenziale per chi si occupa dei problemi connessi alla conoscenza e alla ragione umana. All'inizio potrà non sembrare chiara l'utilità dello sforzo che comporta l'affrontare gli argomenti trattati, anche a causa dell'atteggiamento largamente diffuso in Italia nei confronti delle discipline scientifiche, ma se il lettore avrà la voglia e la pazienza di seguirci fino alla fine del libro, non potrà che trarre giovamento da un'esperienza intellettuale che ogni *amante della conoscenza* meriterebbe.

La prima parte del testo è di piú agevole lettura e sarà facile per tutti, o quasi, trovare qualche stimolo negli argomenti ivi trattati. La seconda parte è piú tecnica e per questo riserverà grandi soddisfazioni a chi riuscirà almeno un poco a padroneggiare i concetti che verranno di volta in volta presentati. Crediamo che la soluzione del paradosso di Achille e la Tartaruga, nel linguaggio della matematica moderna, meriti un minimo di attenzione anche da parte dello studente meno interessato.

Abbiamo cercato, senza pretese di completezza né di perfezione, di fornire un approccio alla matematica "piú seria" a chi non abbia mai avuto modo di apprezzarla, e nel contempo proporre un nuovo modo di rapportarsi con essa a chi si è già avvicinato alla *scienza che fu di grandi filosofi*, da Pitagora a Popper, dai grandi Pascal, Leibniz, Cartesio fino a Frege e Russell.

Il merito di quanto il lettore ricaverà va al Prof. Mario Girardi, ordinario di Istituzioni di Analisi Superiore presso l'Università degli Studi Roma Tre, dalle cui lezioni tenute durante il corso di Istituzioni di Matematiche per il Corso di Laurea in Filosofia è scaturito il contenuto di questo libro: a lui va il nostro piú caro ringraziamento per l'esempio e lo stimolo costanti.

Augurandoci che la lettura sia piacevole quanto per noi è stata la reciproca collaborazione in questi mesi, siamo certi che questa esperienza significherà, per molti, un'utile e affascinante scoperta.

Considerando che questa è la nostra prima esperienza come autori di un libro scientifico, certi che il testo non sia esente da imprecisioni di vario genere, saremo grati ai lettori che vorranno segnalarcele e ogni utile commento sarà il benvenuto.

Il metodo migliore per contattarci è la posta elettronica.

Pasquale Borriello - pasquale.borriello@gmail.com

Paola Magrone - magrone@mat.uniroma3.it

Indice

1	Insiemi e Funzioni	19
1.1	Insiemi e sottoinsiemi	19
1.2	Unione e intersezione di insiemi	20
1.3	Regole algebriche sugli insiemi	22
1.4	Insieme differenza e prodotto cartesiano	23
1.5	Relazione in un insieme	24
1.6	Cardinalità di un insieme	28
1.7	I quantificatori	30
1.8	Introduzione al concetto di funzione	32
1.9	Variabili	32
1.10	Funzioni	33
1.11	Funzioni suriettive, iniettive, biunivoche	34
2	I numeri naturali	37
2.1	Gli assiomi di Peano	37
2.2	Il principio d'induzione	38
2.3	Proprietà di \mathbb{N}	40
2.4	I numeri primi	50
2.5	Un algoritmo che decide se un numero è primo: il crivello di Eratostene	54

2.6	Crittografia a chiave pubblica	55
3	I numeri interi	59
3.1	Introduzione	59
3.2	Classi resto in \mathbb{Z}	60
3.3	Definizioni di gruppo e campo	62
3.4	Somma in \mathbb{Z}_n	63
3.5	Prodotto in \mathbb{Z}_n	64
4	I numeri razionali	67
4.1	Introduzione	67
4.2	Somma e prodotto in \mathbb{Q}	68
4.3	Proprietà della somma e del prodotto	69
5	I numeri reali	73
5.1	Carenza di insiemi di numeri	73
5.2	Sezioni di \mathbb{Q}	75
5.3	L'assioma di Dedekind	77
5.4	L'insieme \mathbb{R} come campo ordinato	79
5.5	Estremo superiore ed inferiore di un insieme	80
5.6	Definizioni di estremo superiore ed inferiore	84
5.7	La proprietà di Archimede	86
6	Introduzione all'Analisi	91
6.1	Polinomio in Analisi	91
6.2	Topologia della retta reale	96
6.3	Concetto di punto di accumulazione	97
6.4	Teorema di Bolzano Weierstrass	100
6.5	Definizione di limite	102

7	Successioni e Serie	107
7.1	Successioni e loro limiti	107
7.2	Operazioni con i limiti	110
7.3	Limiti di successioni e struttura d'ordine	114
7.4	Limiti notevoli	116
7.5	Successioni monotòne	120
7.6	Osservazioni e applicazioni	121
7.7	Ulteriori proprietà delle successioni	127
7.8	Il concetto di serie	128
7.9	Achille e la Tartaruga	130
8	Funzioni continue e derivabili	137
8.1	Funzioni continue	137
8.2	Teoremi sulle funzioni continue	139
8.3	La derivata	142
8.4	Teoremi sulle funzioni derivabili	148
9	Sviluppi in serie	153
9.1	Preliminari	153
9.2	Polinomio di Taylor	155
10	Cenni sulla Teoria dell'integrazione	159
10.1	Introduzione	159
10.2	L' integrale definito	164
10.3	Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale	172
A	Numeri reali	175
A.1	Costruzione dei reali secondo Cauchy	175

B Soluzioni degli esercizi	185
B.1 Esercizio 1	185
B.2 Esercizio 2	185
B.3 Esercizio 3	186
B.4 Esercizio 4	186
B.5 Esercizio 5	186
B.6 Esercizio 6	187
B.7 Esercizio 7	187
B.8 Esercizio 8	188
B.9 Esercizio 9	188
C Cenni biografici	191
C.1 Archimede	191
C.2 Bernoulli	192
C.3 Bolzano	193
C.4 Cantor	193
C.5 Cauchy	194
C.6 Dedekind	194
C.7 Euclide	195
C.8 Galilei	195
C.9 Lagrange	196
C.10 Leibniz	197
C.11 Napier	198
C.12 Peano	198
C.13 Riemann	199
C.14 Weierstrass	199
C.15 Zenone	200

Elenco delle figure

1.1	L'elemento a appartiene all'insieme S .	19
1.2	L'insieme A è contenuto nell'insieme S .	20
1.3	Unione di A e B	21
1.4	Intersezione tra A e B .	22
1.5	Insieme differenza $A - B$.	23
1.6	Funzione suriettiva	35
4.1	Isomorfismo tra \mathbb{Z} e \mathbb{Q}	71
5.1	Numeri interi	73
5.2	Prima rappresentazione di \mathbb{Q}	74
5.3	Rappresentazione di \mathbb{Q}	74
5.4	Insiemi di numeri fino ad \mathbb{R}	80
5.5	Intorno in \mathbb{R}	82
5.6	Intorno in \mathbb{R}^2	83
5.7	Intervallo	83
5.8	Insieme connesso in \mathbb{R}	83
5.9	Insieme sconnesso $A = A_1 \cup A_2$	84
5.10	Intervallo aperto	84
6.1	Primo passo dell'algoritmo per dicotomia	94

6.2	Intorno $I(x, r) \subset (0, 1)$	96
6.3	I punti a_1 ed a_2 sono di accumulazione	98
6.4	Funzione che ha limite L per $x \rightarrow x_0$	102
6.5	Funzione di salto	103
6.6	Rappresentazione di L_1 ed L_2 come due limiti distinti	106
7.1	Le tre successioni del teorema dei carabinieri	115
7.2	Successione temporale da 0 a t^*	122
7.3	Tempo $[0, T]$ diviso in n parti	123
7.4	Achille e la Tartaruga all'istante t_0	131
7.5	Achille e la Tartaruga all'istante t_1	131
8.1	$f(x) = \arctan \frac{1}{x}$	138
8.2	$f(x) = \frac{1}{x}$	139
8.3	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	139
8.4	$f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$	140
8.5	$f(x) = \log x$	141
8.6	Massimi e minimi di una funzione generica	143
8.7	Triangolo PQT con α angolo in P	143
8.8	Secante	144
8.9	Fascio di rette passanti per (x_0, y_0)	145
8.10	Retta $y(x)$ scelta	145
8.11	Funzione costante nell'intervallo	149
8.12	Funzione non costante nell'intervallo	150
8.13	Funzione generica per teorema di Rolle	150
9.1	Approssimazione di $\sin x$	154
9.2	Approssimazione di e^x	156

10.1	Approssimazione dell'area del cerchio con un poligono regolare . . .	160
10.2	Approssimazione dell'area di una curva chiusa generica	162
10.3	Approssimazione di un intervallo della curva	162
10.4	Segmento di parabola	165
10.5	Prima approssimazione dell'area del segmento di parabola	166
10.6	Funzione $\chi_I(x)$	168
10.7	Grafico di una funzione semplice generica	169

Indice dei simboli

$a = b$	a è uguale a b .
$a \neq b$	a è diverso da b .
$a \in b$	a appartiene a (è elemento di) b .
$a \notin b$	a non appartiene a b .
$A \subseteq S$	A è contenuto in (è sottoinsieme) S .
$S \supseteq A$	S contiene A .
$A \subset S$	A è sottoinsieme di S e $A \neq S$.
$S \supset A$	S contiene A e $S \neq A$.
$A \cup B$	Unione di insiemi.
$A \cap B$	Intersezione di insiemi.
$f \circ g$	Composizione (di funzioni).
\mathbb{N}	Numeri naturali.
\mathbb{Z}	Numeri interi.
\mathbb{Q}	Numeri razionali.
\mathbb{R}	Numeri reali.

- \wedge Congiunzione logica.
- \vee Disgiunzione logica.
- \neg Negazione logica.
- \Rightarrow Implicazione: 'se... allora'.
- \Leftrightarrow Doppia implicazione: 'se e soltanto se'.
- \forall Quantificatore universale: 'per ogni'.
- \exists Quantificatore esistenziale: 'per qualche'.
- $:=$ Per definizione.
- | Tale che, anche \therefore .