Aoı

36

Adalberto Orsatti

Introduzione alla teoria dei moduli

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88–7999–130–8

I edizione: marzo 1995
I ristampa: novembre 2002
II ristampa: marzo 2011

A Maria Rosa

Indice

Prefazione

Questa Introduzione ha origine dai corsi di Matematiche Superiori che ho svolto negli ultimi anni nell'Università di Padova. Si presenta in questa forma per lo spirito di iniziativa dell'editore, dott. Gioacchino Onorati, al quale esprimo la mia gratitudine.

Il libro si divide in dieci capitoli. I primi quattro, l'ottavo e buona parte del decimo sono dedicati ad argomenti classici ed elementari della teoria. Uno sguardo all'indice è sufficiente per rendersi conto del loro contenuto. Gli altri capitoli riguardano argomenti speciali a mio avviso interessanti e stimolanti.

Il capitolo quinto si occupa della teoria generale dei moduli e degli anelli linearmente compatti e si conclude con una trattazione dettagliata della Dualità di Lefschetz-Kaplansky-MacDonald la quale afferma che, se R è un anello commutativo noetheriano locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$, esiste una dualità fra gli R-moduli astratti e i moduli strettamente linearmente compatti sull'anello R munito della topologia $\mathfrak{m}$-adica. Si applica questo risultato per ottenere la struttura dei gruppi abeliani linearmente compatti.

Il capitolo sesto si occupa di alcuni teoremi di struttura degli anelli linearmente compatti. Il risultato principale è che ogni tale anello è isomorfo all'anello degli endomorfismi di un modulo quasi-iniettivo canonicamente associato all'anello in questione. Da tale risultato si ottengono nuove e limpide dimostrazioni dei teoremi di Leptin sugli anelli semiprimitivi e linearmente compatti e di quelli di Zelinsky sugli anelli commutativi linearmente compatti.

Nel capitolo settimo si è cercato di raccogliere in forma sistematica vari risultati sull'anello degli endomorfismi $R = \mathrm{End}(V_D)$ di uno spazio vettoriale destro di dimensione infinita sull'anello con divisione D. Si utilizzano i filtri e gli antifiltri, nel reticolo dei sottospazi di V_D, che danno luogo agli ideali sinistri, destri e bilateri di R. Si osserva quindi che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali sinistri di R e le topologie lineari su V_D. Si studiano queste topologie utilizzando quegli ideali ottenendo risultati interessanti: ad esempio, si dimostra che l'inviluppo iniettivi dell' R-modulo sinistro semplice ${}_RV$ è isomorfo al biduale di V_D.

Il capitolo nono studia le equivalenze tra categorie di moduli, in particolare l'equivalenza di Fuller e quella di Morita, partendo dalla nozione di $*$-modulo (il nome è dovuto a Colpi) introdotta in [36].

Siano P_R un R-modulo destro e $A = \mathrm{End}(P_R)$. Consideriamo i funtori

$$\begin{aligned} T &= - \otimes_A P \colon \text{Mod-}A \to \text{Mod-}R, \\ H &= \mathrm{Hom}_R(P_R, -) \colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}A. \end{aligned}$$

Allora $\mathrm{Im}(T) \subseteq \mathrm{Gen}(P_R)$, che è la sottocategoria di Mod-R generata da P_R, e $\mathrm{Im}(H) \subseteq \mathscr{D}(K_A)$, dove $K_A = \mathrm{Hom}(P_R, Q_R)$, con Q_R cogeneratore iniettivo di Mod-R, e $\mathscr{D}(K_A)$ è la sottocategoria di Mod-A cogenerata da K_A. Si dice che P_R è uno $*$-modulo se il bimodulo ${}_AP_R$ induce un'equivalenza tra $\mathrm{Im}(H)$ e $\mathrm{Im}(T)$, dove queste sono le più grandi possibili, ossia un'equivalenza tra $\mathscr{D}(K_A)$ e $\mathrm{Gen}(P_R)$. Il risultato principale è che, in generale, $\mathscr{D}(K_A) \neq \text{Mod-}A$ e $\mathrm{Gen}(P_R) \neq \text{Mod-}R$. Se $\mathscr{D}(K_A) = \text{Mod-}A$ si ha l'equivalenza di Fuller e se per di più $\mathrm{Gen}(P_R) = \text{Mod-}R$ si ha l'equivalenza di Morita.

La teoria degli $*$-moduli si sta sviluppando con notevoli risultati con i lavori di Colpi, D'Este, Happel, Menini, Trlifaj. In particolare Trlifaj ha dimostrato che ogni $*$-modulo è finitamente generato.

L'ultima parte del capitolo decimo è rivolta alla seguente congettura di Müller:

> *Ogni anello commutativo linearmente compatto nella topologia discreta* (*l.c.d.*) *ammette una dualità di Morita.*

In tempi relativamente recenti (1990) un fondamentale risultato di Ánh stabilisce che la congettura di Müller è vera. Facendo intervenire i risultati di Vámos sugli anelli classici, si ottiene una teoria molto soddisfacente degli anelli commutativi l.c.d. rispondendo ad un antico problema di Zelinsky.

Per quanto riguarda le nozioni di topologia, per uniformità di linguaggio, si potrebbe consultare [42].

Si consiglia di leggere dall'inizio i primi due paragrafi del capitolo ottavo.

Ringrazio per l'efficace collaborazione Silvana Bazzoni, Riccardo Colpi, Enrico Gregorio, Claudia Menini, Joško Plazonić, Luca Preciso, Nicola Rodinò, Valter Roselli, Alberto Tonolo.

Padova, settembre 1995

La composizione di questo libro è stata eseguita a cura dell'autore con TeX. Sono stati impiegati, in particolare, i pacchetti macro $\mathcal{AMS}$-TeX dell'American Mathematical Society e XY-pic di Kristoffer Rose.