

$$\frac{\text{Aoi}}{36}$$

Adalberto Orsatti

Introduzione alla teoria dei moduli



Copyright © MMXI
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-7999-130-8

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 1995
I ristampa: novembre 2002
II ristampa: marzo 2011

A Maria Rosa

Indice

Prefazione	xi
Generalità	1
1 Moduli	1
2 Sottomoduli	2
3 Morfismi	3
4 Modulo quoziente	4
5 Teoremi di omomorfismo	5
6 Hom_R e End_R	6
7 Prodotti diretti e somme dirette	8
8 Somme dirette di sottomoduli	12
9 Bimoduli	15
I Moduli proiettivi e moduli iniettivi	19
1 Moduli liberi	19
2 Moduli proiettivi	21
3 Moduli iniettivi	31
4 Cogeneratori	43
II Moduli ed anelli semisemplici – Condizioni catenarie	51
1 Moduli semisemplici	51
2 Anelli semisemplici	53
3 Moduli finitamente generati e moduli finitamente cogenerati . .	55
4 Moduli noetheriani e moduli artiniani	61

5	Moduli di lunghezza finita – Teorema di Jordan-Hölder	65
6	Anelli noetheriani ed anelli artiniani	70
7	Moduli iniettivi sopra un anello commutativo noetheriano	76
III	Topologie lineari – Teoremi di densità	93
1	Alcune importanti topologie lineari	94
2	Teorema di densità	96
IV	Anelli primitivi e semiprimitivi – Struttura degli anelli semisemplici	105
1	Anelli ed ideali primitivi	105
2	Radicale di Jacobson – Anelli semiprimitivi	107
3	Teorema di densità per gli anelli semiprimitivi	110
4	Teoremi di struttura di Wedderburn ed Artin per gli anelli semisemplici	112
5	Applicazioni del Teorema di Wedderburn-Artin	116
V	Moduli ed anelli linearmente compatti	125
1	Generalità	125
2	Una proprietà caratteristica dei moduli linearmente compatti	130
3	Topologie minimali – Moduli strettamente linearmente compatti	132
4	Dualità di Lefschetz-Kaplansky-MacDonald	137
5	Gruppi abeliani linearmente compatti	148
VI	Anelli linearmente compatti (teoremi di struttura)	155
1	Moduli fortemente quasi-iniettivi	155
2	Oggetti iniettivi e cogeneratori in R_τ -LT	158
3	Zoccoli	163
4	Criteri di compattezza lineare	167
5	Rappresentazione degli anelli linearmente compatti	171
6	Applicazioni	175
VII	L'anello degli endomorfismi di uno spazio vettoriale di dimensione infinita	181
1	Due teoremi su $R = \text{End}(V_D)$	182

2	Ideali sinistri di $R = \text{End}(V_D)$	185
3	Ideali destri di $R = \text{End}(V_D)$	190
4	Ideali bilateri di $R = \text{End}(V_D)$	193
5	Ideali massimali e moduli semplici	195
6	Topologie lineari su uno spazio vettoriale di dimensione infinita	202
VIII Categorie e funtori		211
1	Categorie	211
2	Funtori	213
3	Funtori aggiunti	219
4	Generatori e cogeneratori	226
5	Monomorfismi ed epimorfismi – Nuclei e conuclei	228
6	Prodotti e coprodotti	233
7	Complementi ed esercizi	237
8	Prodotti tensoriali	250
IX Equivalenze rappresentabili tra categorie di moduli		263
1	Equivalenze rappresentabili	263
2	I funtori aggiunti T e H	266
3	Esempi	269
4	Equivalenze rappresentabili tra $\mathcal{D}(K_A)$ e $\text{Gen}(P_R)$ e $*$ -moduli	274
5	Quasi-progeneratori	279
6	Un cenno sui moduli tilting	292
7	Equivalenza di Morita	296
X Dualità di Morita		303
1	Due Teoremi di Morita	303
2	La dualità Δ_K	310
3	Dualità di Morita e compattezza lineare	312
4	Moduli artiniani e dualità di Morita	313
5	Dualità di Morita per anelli commutativi	317
Bibliografia		323
Indice analitico		329

Prefazione

Questa Introduzione ha origine dai corsi di Matematiche Superiori che ho svolto negli ultimi anni nell'Università di Padova. Si presenta in questa forma per lo spirito di iniziativa dell'editore, dott. Gioacchino Onorati, al quale esprimo la mia gratitudine.

Il libro si divide in dieci capitoli. I primi quattro, l'ottavo e buona parte del decimo sono dedicati ad argomenti classici ed elementari della teoria. Uno sguardo all'indice è sufficiente per rendersi conto del loro contenuto. Gli altri capitoli riguardano argomenti speciali a mio avviso interessanti e stimolanti.

Il capitolo quinto si occupa della teoria generale dei moduli e degli anelli linearmente compatti e si conclude con una trattazione dettagliata della Dualità di Lefschetz-Kaplansky-MacDonald la quale afferma che, se R è un anello commutativo noetheriano locale con ideale massimale \mathfrak{m} , esiste una dualità fra gli R -moduli astratti e i moduli strettamente linearmente compatti sull'anello R munito della topologia \mathfrak{m} -adica. Si applica questo risultato per ottenere la struttura dei gruppi abeliani linearmente compatti.

Il capitolo sesto si occupa di alcuni teoremi di struttura degli anelli linearmente compatti. Il risultato principale è che ogni tale anello è isomorfo all'anello degli endomorfismi di un modulo quasi-iniettivo canonicamente associato all'anello in questione. Da tale risultato si ottengono nuove e limpide dimostrazioni dei teoremi di Leptin sugli anelli semiprimitivi e linearmente compatti e di quelli di Zelinsky sugli anelli commutativi linearmente compatti.

Nel capitolo settimo si è cercato di raccogliere in forma sistematica vari risultati sull'anello degli endomorfismi $R = \text{End}(V_D)$ di uno spazio vettoriale destro di dimensione infinita sull'anello con divisione D . Si utilizzano i filtri e gli antifiltri, nel reticolo dei sottospazi di V_D , che danno luogo agli ideali sini-

stri, destri e bilateri di R . Si osserva quindi che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali sinistri di R e le topologie lineari su V_D . Si studiano queste topologie utilizzando quegli ideali ottenendo risultati interessanti: ad esempio, si dimostra che l'involuppo iniettivi dell' R -modulo sinistro semplice ${}_R V$ è isomorfo al biduale di V_D .

Il capitolo nono studia le equivalenze tra categorie di moduli, in particolare l'equivalenza di Fuller e quella di Morita, partendo dalla nozione di $*$ -modulo (il nome è dovuto a Colpi) introdotta in [36].

Siano P_R un R -modulo destro e $A = \text{End}(P_R)$. Consideriamo i funtori

$$\begin{aligned} T &= - \otimes_A P : \text{Mod-}A \rightarrow \text{Mod-}R, \\ H &= \text{Hom}_R(P_R, -) : \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}A. \end{aligned}$$

Allora $\text{Im}(T) \subseteq \text{Gen}(P_R)$, che è la sottocategoria di $\text{Mod-}R$ generata da P_R , e $\text{Im}(H) \subseteq \mathcal{D}(K_A)$, dove $K_A = \text{Hom}(P_R, Q_R)$, con Q_R cogeneratore iniettivo di $\text{Mod-}R$, e $\mathcal{D}(K_A)$ è la sottocategoria di $\text{Mod-}A$ cogenerata da K_A . Si dice che P_R è uno $*$ -modulo se il bimodulo ${}_A P_R$ induce un'equivalenza tra $\text{Im}(H)$ e $\text{Im}(T)$, dove queste sono le più grandi possibili, ossia un'equivalenza tra $\mathcal{D}(K_A)$ e $\text{Gen}(P_R)$. Il risultato principale è che, in generale, $\mathcal{D}(K_A) \neq \text{Mod-}A$ e $\text{Gen}(P_R) \neq \text{Mod-}R$. Se $\mathcal{D}(K_A) = \text{Mod-}A$ si ha l'equivalenza di Fuller e se per di più $\text{Gen}(P_R) = \text{Mod-}R$ si ha l'equivalenza di Morita.

La teoria degli $*$ -moduli si sta sviluppando con notevoli risultati con i lavori di Colpi, D'Este, Happel, Menini, Trlifaj. In particolare Trlifaj ha dimostrato che ogni $*$ -modulo è finitamente generato.

L'ultima parte del capitolo decimo è rivolta alla seguente congettura di Müller:

Ogni anello commutativo linearmente compatto nella topologia discreta (l.c.d.) ammette una dualità di Morita.

In tempi relativamente recenti (1990) un fondamentale risultato di Ánh stabilisce che la congettura di Müller è vera. Facendo intervenire i risultati di Vámos sugli anelli classici, si ottiene una teoria molto soddisfacente degli anelli commutativi l.c.d. rispondendo ad un antico problema di Zelinsky.

Per quanto riguarda le nozioni di topologia, per uniformità di linguaggio, si potrebbe consultare [42].

Si consiglia di leggere dall'inizio i primi due paragrafi del capitolo ottavo.
Ringrazio per l'efficace collaborazione Silvana Bazzoni, Riccardo Colpi, Enrico Gregorio, Claudia Menini, Joško Plazonić, Luca Preciso, Nicola Rodinò, Valter Roselli, Alberto Tonolo.

Padova, settembre 1995

La composizione di questo libro è stata eseguita a cura dell'autore con $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Sono stati impiegati, in particolare, i pacchetti macro $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-T}_{\text{E}}\text{X}$ dell'American Mathematical Society e $\text{X}_{\text{Y}}\text{-pic}$ di Kristoffer Rose.