Giuseppe Fusco

Esercizi di Fondamenti di Sistemi Dinamici

ARACNE

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 a/b
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-1562-9

I edizione: gennaio 2008

Indice

Prefazione

Il testo presenta un'ampia raccolta di esercizi riguardanti l'applicazione dei principali metodi di analisi dei sistemi dinamici lineari e stazionari a tempo continuo e a tempo discreto rappresentati sia con lo spazio di stato (rappresentazione i-s-u) che attraverso un modello ingresso-uscita (rappresentazione i-u). Tale raccolta, organizzata in modo tale da guidare lo studente alla comprensione ed all'applicazione di tali metodologie, colleziona numerosi esercizi svolti nell'ambito dei corsi di Teoria dei Sistemi, Complementi di Sistemi Dinamici, Fondamenti di Automatica e Fondamenti di Sistemi Dinamici da me tenuti, a partire dall'anno accademico 1998-1999, presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Cassino.

Gli esercizi sono raggruppati in sei capitoli corrispondenti ai principali argomenti illustrati nei corsi impartiti. In particolare il primo capitolo è dedicato al calcolo della matrice di transizione dello stato. Nei successivi due capitoli vengono presentati gli esercizi relativi alla determinazione della risposta libera e forzata dello stato, e nell'uscita. Il quarto capitolo invece illustra gli esercizi concernenti l'applicazione delle metodologie per lo studio delle proprietà strutturali e per ricava-

re la scomposizione canonica di Kalman. Nel quinto capitolo vengono invece proposti gli esercizi per lo studio della stabilità dell'equilibrio (interna) e della stabilità B.I.B.O. (esterna) per sistemi lineari e non lineari, utilizzando, con riferimento a quest'ultimi, tecniche di linearizzazione. Infine il sesto capitolo è dedicato al calcolo dell'uscita nelle rappresentazioni ingresso-uscita.

Auspico che tale raccolta rappresenti un utile ausilio didattico che stimoli lo studente da un lato ad acquisire una dimestichezza operativa e dall'altro a sviluppare una capacità di analisi del comportamento dei sistemi dinamici trattati.

Desidero infine ringraziare il Prof. Stefano Chiaverini per i suoi suggerimenti durante la fase di stesura del testo.

Giuseppe Fusco

Capitolo 1

Calcolo della matrice di transizione dello stato

1.1 Esercizio

Assegnata la rappresentazione

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

calcolare la matrice di transizione dello stato.

Il polinomio caratteristico associato alla matrice dinamica $\mathbf{A}$ è

$$p(\lambda) \;=\; \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \;=\; \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = 0$$

sono gli autovalori di $\mathbf{A}$. Risolvendo si ottiene

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -1.$$

L'autovettore destro $\boldsymbol{u}_1$ associato all'autovalore λ_1 si ottiene ricavando le soluzioni non banali dell'equazione omogenea

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}.$$

Poiché la dimensione dello spazio nullo della matrice $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$ è pari ad uno, esistono ∞^1 soluzioni tutte fra di loro linearmente dipendenti. La generica di esse può pertanto essere espressa da

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con α reale e non nullo. Nel seguito per comodità si pone $\alpha = 1$. Per quanto riguarda l'autovettore destro $\boldsymbol{u}_2$ associato all'autovalore λ_2, poichè la dimensione dello spazio nullo della matrice $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})$ è pari ad uno, l'autovettore $\boldsymbol{u}_2$ che soddisfa l'equazione omogenea

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}$$

risulta essere

$$\boldsymbol{u}_2 = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con β reale e diverso da zero. Nel seguito per comodità si pone $\beta = 1$.

Gli autovettori sinistri $\boldsymbol{\nu}_1$ ed $\boldsymbol{\nu}_2$ associati ad $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, si ricavano imponendo la condizione di ortonormalità fra le due basi $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ e $\{\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2\}$ espressa da

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\nu}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{1.1}$$

Risulta pertanto

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\nu}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\nu}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto è possibile ricavare la matrice di transizione dello stato; essa vale

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(t) &= e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t}\,\boldsymbol{u}_i\,\boldsymbol{\nu}_i^{\mathrm{T}} \\
&= e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{-3t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-3t}+e^{-t} & -e^{-3t}+e^{-t} \\ -e^{-3t}+e^{-t} & e^{-3t}+e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.2 Esercizio

Assegnata la rappresentazione

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2\,x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 2\,x_1(t) \end{cases}$$

calcolare la matrice di transizione dello stato.

La matrice dinamica della rappresentazione assegnata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico risulta essere

$$p(\lambda) \; = \; \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) \; = \; (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2).$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = 0$$

sono gli autovalori di $\mathbf{A}$. Dall'espressione di $p(\lambda)$ risulta immediatamente che le soluzioni sono

$$\lambda_1 = -1 \qquad\qquad \lambda_2 = 1 \qquad\qquad \lambda_3 = 2.$$

Bisogna ora ricavare i tre autovettori destri associati agli autovalori ora determinati. L'autovettore destro $\boldsymbol{u}_1$, corrispondente all'autovalore