Aoi

48

ALESSANDRA CELLETTI

ESERCIZI E COMPLEMENTI DI MECCANICA RAZIONALE

Applicazioni alla Meccanica Celeste

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88–7999–464–4

I edizione: febbraio 1999
I ristampa: novembre 2002
II edizione: marzo 2003

A mio nipote, Raffaele

INDICE

PREFAZIONE

Questa raccolta di esercizi è rivolta agli studenti del corsi di Meccanica Razionale e Sistemi Dinamici. Gli argomenti trattati si riferiscono ai temi classici discussi nei corsi di laurea in Matematica, Fisica e Ingegneria delle Università italiane.

Ogni capitolo è preceduto da una breve introduzione teorica, volta unicamente a definire le notazioni usate negli esercizi successivi. Alla fine di ogni capitolo si trovano alcuni esercizi proposti, di cui si dà un breve cenno della risoluzione.

Il testo si conclude con la presentazione di complementi di Meccanica Celeste con applicazioni alla precessione del perielio di Mercurio, alla precessione degli equinozi e alla librazione in longitudine della Luna.

Mi scuso degli errori e refusi che mi saranno sicuramente sfuggiti.

Ringrazio i colleghi Raffaele Esposito, Corrado Falcolini, Errico Presutti, Mauro Sbragaglia ed Elisabetta Scoppola per i preziosi suggerimenti offerti durante la stesura di queste dispense. In particolare ringrazio Livio Triolo per i numerosi consigli ed osservazioni, che hanno contribuito all'estensione e al miglioramento del testo.

Alessandra Celletti

Capitolo 1
Analisi qualitativa di moti unidimensionali

• Consideriamo il moto di un punto materiale di massa m sulla retta $\mathbf{R}$. Sia x la posizione del punto e $F(x, \dot{x}, t)$ la forza agente su di esso. L'equazione del moto è dunque:

$$m\ddot{x} \ = \ F(x, \dot{x}, t) \ .$$

Se la forza è puramente posizionale $F = F(x)$ possiamo introdurre la funzione *energia potenziale* definita dalla seguente espressione:

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} F(\xi) \ d\xi \ ,$$

dove $x(0) = x_0$ indica la posizione iniziale. Pertanto l'equazione del moto risulta:

$$m\ddot{x} \ = \ -\frac{dV(x)}{dx} \ .$$

• Per un punto materiale di massa m, soggetto ad una forza puramente posizionale con energia potenziale $V(x)$, si definisce *energia meccanica totale* la quantità

$$E = E(x, \dot{x}) \ = \ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \ + \ V(x) \ , \qquad (E)$$

pari alla somma dell'energia cinetica $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e dell'energia potenziale $V(x)$. L'energia meccanica totale si conserva lungo le traiettorie del moto e costituisce quindi un integrale primo del sistema.

• **Analisi qualitativa del moto:** Il moto di un punto materiale in un sistema unidimensionale si può studiare qualitativamente tramite l'analisi del grafico dell'energia potenziale $V(x)$ e del corrispondente *ritratto di fase* nel piano $(x, \dot{x})$. In particolare, il moto può avvenire in corrispondenza dei livelli di energia per i quali risulta

$$E \ \geq \ V(x) \ .$$

Se il valore dell'energia totale è pari al valore assunto dall'energia potenziale in un punto di minimo, allora tale punto di minimo è una posizione di equilibrio stabile e attorno ad esso si svolge un moto periodico. Quando l'energia totale è pari al valore assunto da $V(x)$ in un suo punto di massimo, allora tale punto di massimo è una posizione di equilibrio *a meta asintotica* ossia si può dimostrare che per qualsiasi condizione iniziale compatibile con l'energia del sistema la posizione corrispondente al punto di massimo verrà raggiunta in un tempo infinito.

• **Periodo del moto:** Siano x_- e x_+ le intersezioni della curva rappresentante l'energia potenziale con un fissato livello di energia. Supponiamo che $V(x)$ presenti un minimo tra x_- e x_+ con $V'(x_\pm) \neq 0$; il moto tra tali punti sarà quindi periodico, qualora nessuno dei due punti sia un massimo dell'energia potenziale. Dalla (E) si ricava facilmente che il periodo del moto è dato dalla seguente espressione:

$$T \ = \ 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \, dx \ .$$

UD 1

Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x$$

e disegnare il ritratto nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.

Studiamo il grafico dell'energia potenziale $V(x)$; poiché

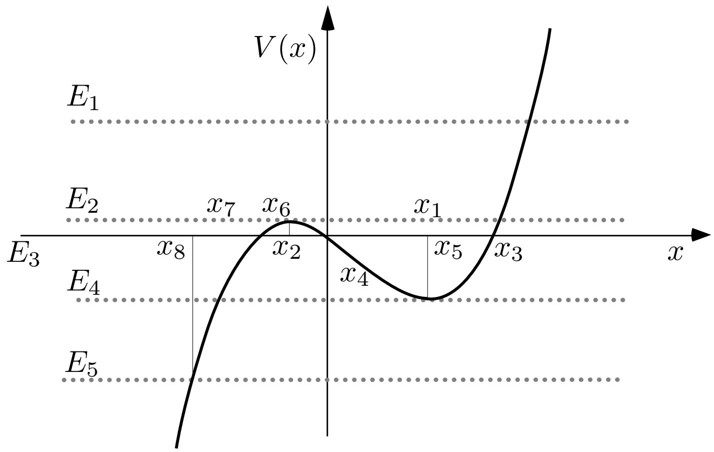
$$V'(x) = x^2 - x - 1 \ ,$$

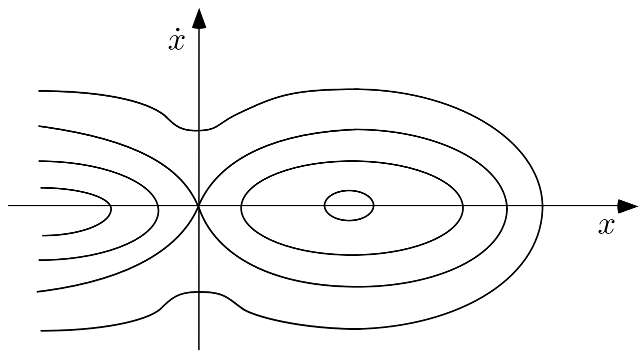
i punti di equilibrio sono

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

© 88-7999-464-6

e dalla derivata seconda $V''(x) = 2x - 1$ si vede che il punto $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un minimo, mentre x_2 è un massimo. Indichiamo con y_1 e y_2 i valori delle rispettive ordinate.





Discutiamo qualitativamente il moto al variare dei livelli dell'energia meccanica E; poiché

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

il moto può avvenire nelle regioni in cui $E \geq V(x)$. Con riferimento alla figura si hanno i seguenti casi:

$E = E_1$: la traiettoria descritta dal punto è illimitata;
$E = E_2$: se il dato iniziale è compreso nell'intervallo $[x_2, x_3]$ il moto è a meta asintotica. Se la velocità iniziale è positiva, il punto raggiungerà la posizione $x = x_3$ ed invertirà il moto per raggiungere in un tempo infinito il punto di

ⓒ88-7999-464-6

massimo. Se la posizione iniziale coincide con il punto di massimo, il moto è stazionario in $x = x_2$, essendo tale posizione di equilibrio. Se il dato iniziale è scelto alla sinistra di x_2, il moto sarà a meta asintotica verso x_2 o illimitato a seconda del valore della velocità iniziale.
$E = E_3 = 0$: se il dato iniziale appartiene all'intervallo $[x_4, x_5]$ $(x_4 = 0)$ il moto è periodico tra questi due estremi; se invece si sceglie una posizione iniziale minore di x_6 si avrà un moto illimitato.
$E = E_4$: se il dato iniziale coincide con il punto di equilibrio x_1, il moto è stazionario; se invece la posizione iniziale è inferiore a x_7 si ha un moto illimitato, con inversione del moto in x_7.
$E = E_5$: la posizione iniziale può essere scelta solamente per valori inferiori a x_8 e si hanno sempre moti illimitati.

UD 2

Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x^2 \; e^{-x}$$

e disegnare il ritratto nel piano delle fasi.

Esaminiamo qualitativamente il moto, studiando il grafico dell'energia potenziale $V(x)$. Poiché

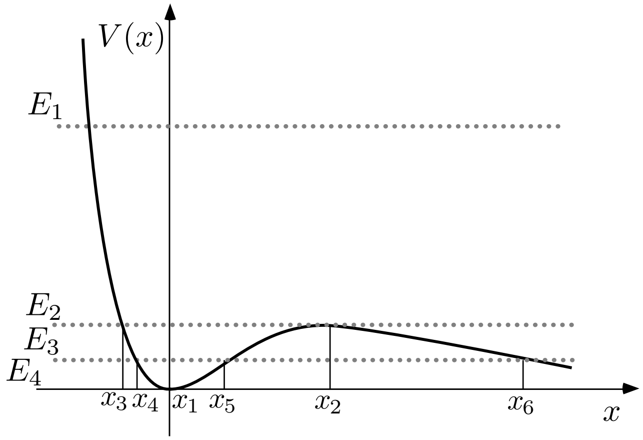
$$V'(x) = e^{-x}(2x - x^2) \; ,$$

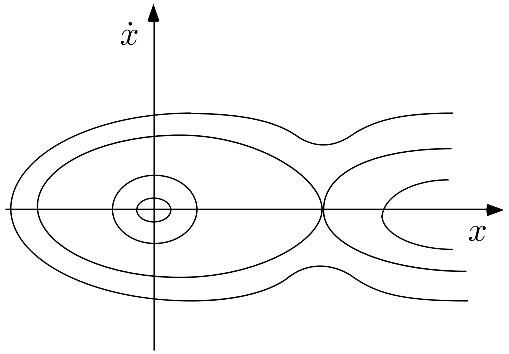
i punti di equilibrio sono

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2 \; .$$

Dalla derivata seconda $V''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$ è un minimo, mentre $(x_2, y_2) = (2, 4e^{-2})$ è un massimo. Il grafico dell'energia potenziale è riportato in figura.

© 88-7999-464-6





Discutiamo qualitativamente il moto al variare dei livelli dell'energia meccanica E; poiché

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \;+\; V(x)$$

il moto può avvenire nelle regioni in cui $E \geq V(x)$. Con riferimento alla figura si hanno i seguenti casi:

$E = E_1$: la traiettoria descritta dal punto è illimitata;

$E = E_2$: se il dato iniziale è scelto nell'intervallo $[x_3, x_2]$ si ha un moto a meta asintotica e in particolare sarà stazionario se la posizione iniziale coincide con x_2. Se il dato iniziale è maggiore di x_2 si avrà un moto illimitato.

$E = E_3$: se il dato iniziale appartiene all'intervallo $[x_4, x_5]$ il moto è periodico tra questi due estremi; se invece si sceglie una posizione iniziale maggiore di x_6 si avrà un moto illimitato.

$E = E_4 = 0$: il moto è stazionario in (x_1, y_1), punto di equilibrio dell'energia potenziale.

UD 3

Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \sin(2x)\cos(x)$$

e disegnare il ritratto di fase.

Esaminiamo qualitativamente il moto, studiando il grafico dell'energia potenziale $V(x)$, nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Poiché

$$V'(x) = 2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = 2\cos(x)[1 - 3\sin^2(x)] \ ,$$

i punti di equilibrio sono

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{2}, \qquad x_2 = \frac{3}{2}\pi \\ x_{3,4} &= \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0.61 \ rad., \quad 2.53 \ rad. \ , \\ x_{5,6} &= \arcsin(-\sqrt{\frac{1}{3}}) \simeq 3.76 \ rad., \quad 5.67 \ rad. \end{aligned}$$

Dalla derivata seconda

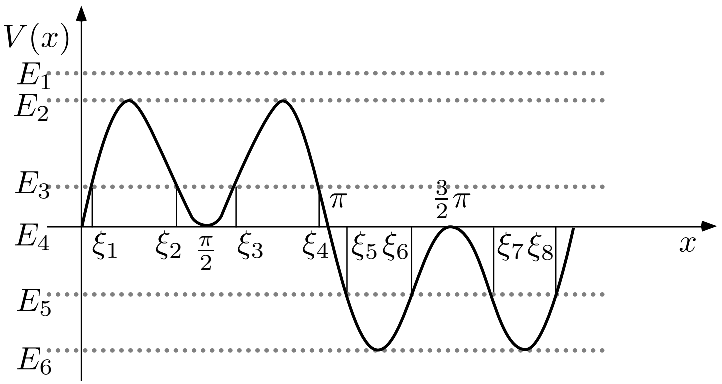
$$V''(x) = -2\sin(x)[1 - 3\sin^2(x)] - 12\sin(x)\cos^2(x) \ ,$$

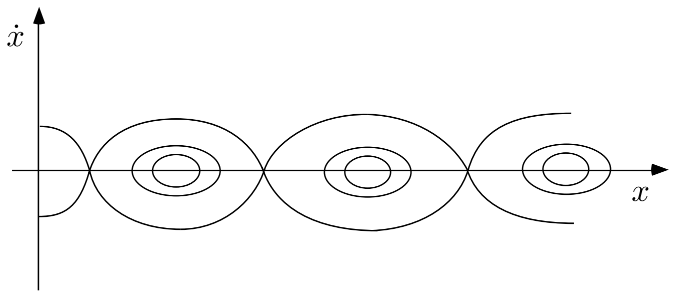
si trova che i punti di ascissa x_1, x_5, x_6 sono minimi dell'energia potenziale, mentre i punti di ascissa x_2, x_3, x_4 sono punti di massimo.

Discutiamo qualitativamente il moto al variare dei livelli dell'energia mecca-

ⓒ 88-7999-464-6

nica E, ricordando che il moto può avvenire solo nelle regioni in cui $E \geq V(x)$.





Con riferimento alla figura si hanno i seguenti casi:
$E = E_1$: la traiettoria descritta dal punto è illimitata;
$E = E_2$: il moto è stazionario in corrispondenza dei punti di massimo, a meta asintotica o illimitata a seconda delle condizioni iniziali.
$E = E_3$: per dati iniziali inferiori a ξ_1 o superiori a ξ_4, il moto è periodico per continuazione (periodica) della curva; per posizioni iniziali con ascissa compresa tra ξ_2 e ξ_3, il moto è periodico.
$E = E_4 = 0$: se il dato iniziale è $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3}{2}\pi$ il moto è stazionario; se la posizione iniziale è scelta nell'intervallo $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$ oppure $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ si ha un moto a meta asintotica verso il punto di massimo $x = \frac{3}{2}\pi$ e si ha inversione del moto in corrispondenza di $x = \pi$ e $x = 2\pi$.
$E = E_5$: il moto può avvenire negli intervalli $[\xi_5, \xi_6]$ e $[\xi_7, \xi_8]$ ed è periodico in ciascuno di tali intervalli.
$E = E_6$: il moto è stazionario in corrispondenza delle posizioni di equilibrio x_5 e x_6.

©88-7999-464-6

UD 4

Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \ .$$

Riconosciamo subito che tramite formule di trigonometria elementare possiamo riscrivere $V(x)$ nella forma

$$V(x) \ = \ \cos(3x) \ .$$

Esaminiamo qualitativamente il moto tramite lo studio dell'energia potenziale $V(x)$, nell'intervallo $[0, 2\pi)$. La derivata prima di $V(x)$ è:

$$V'(x) = -3\sin(3x) \ .$$

Pertanto le ascisse dei punti di equilibrio sono

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \qquad & x_2 &= \pi \\ x_3 &= \frac{\pi}{3}, \qquad & x_4 &= \frac{2}{3}\pi \\ x_5 &= \frac{4}{3}\pi, \qquad & x_6 &= \frac{5}{3}\pi \ . \end{aligned}$$

Dalla derivata seconda

$$V''(x) = -9\cos(3x) \ ,$$

si trova che i punti di ascissa x_1, x_4, x_5 sono massimi dell'energia potenziale, mentre i punti di ascissa x_2, x_3, x_6 sono punti di minimo.

Discutiamo qualitativamente il moto al variare dei livelli dell'energia meccanica E, ricordando che il moto può avvenire solo nelle regioni in cui $E \geq V(x)$.

Con riferimento alla figura si hanno i seguenti casi:

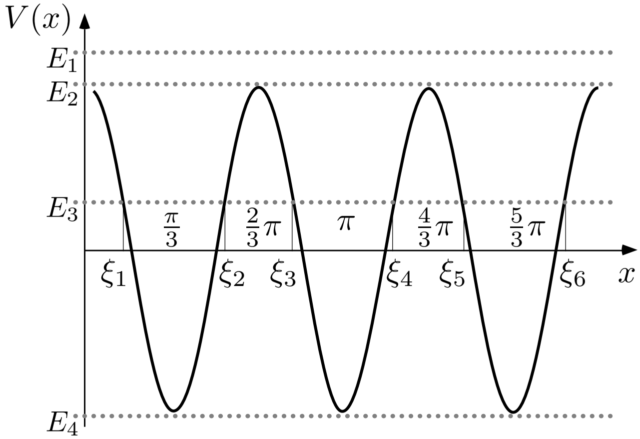
$E = E_1$: la traiettoria descritta dal punto è illimitata;

$E = E_2$: il moto è stazionario in corrispondenza dei punti di massimo e a meta asintotica per condizioni iniziali diverse.

$E = E_3$: il moto è periodico negli intervalli in cui $E \geq V(x)$.

$E = E_4$: il moto è stazionario in corrispondenza dei punti di minimo.

© 88-7999-464-6



UD 5

Un punto materiale P di massa $m = 2$ è soggetto ad una forza conservativa unidimensionale, la cui energia potenziale è $V(x) = \sin(x)$. Se le condizioni iniziali sono $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ determinare il tempo impiegato per raggiungere la posizione $x = 2\pi$.

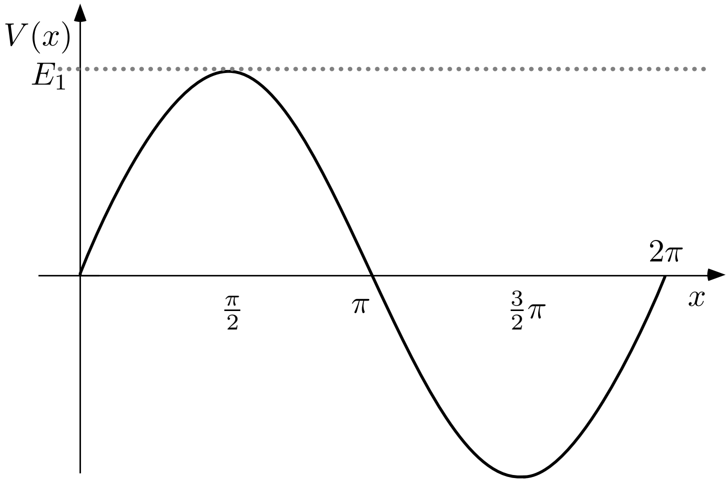
L'energia corrispondente ai dati iniziali è

$$E \; = \; \frac{1}{2}m\dot{x}(0)^2 + V(x(0)) \; = \; 1 \; .$$

Poiché la configurazione iniziale è $x(0) = 0$ con velocità positiva, il punto materiale sarà a meta asintotica verso $x = \frac{\pi}{2}$ e non raggiungerà mai la posizione $x = 2\pi$.

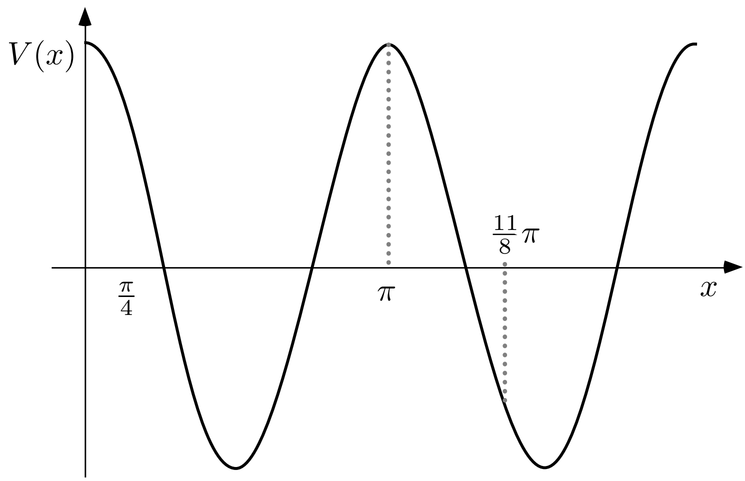
Si confronti con il grafico della funzione $V(x) = \sin(x)$.

©88-7999-464-6



UD 6

Due punti materiali P e Q, entrambi di massa m, sono soggetti ad una forza conservativa posizionale unidimensionale, la cui energia potenziale é $V(x) = \cos(2x)$. Il punto P ha condizioni iniziali $x_P(0) = \frac{\pi}{4}$, $\dot{x}_P(0) = 1$, mentre le condizioni iniziali del punto Q sono $x_Q(0) = \frac{11}{8}\pi$ e $\dot{x}_Q(0) = -1$. Determinare la condizione sulla massa affinché entrambi i punti superino la posizione $x = \pi$.



I valori delle energie meccaniche corrispondenti ai dati iniziali sono:

$$
\begin{aligned}
E_P &= \frac{1}{2}m\dot{x}_P(0)^2 + V(x_P(0)) = \frac{1}{2}m \\
E_Q &= \frac{1}{2}m\dot{x}_Q(0)^2 + V(x_Q(0)) = \frac{1}{2}m - 0.7071 \ .
\end{aligned}
$$

© 88-7999-464-6

Il valore minimo delle energie deve essere maggiore del valore dell'energia potenziale nel punto di massimo: $V(\pi) = 1$. Poiché $E_Q < E_P$, deve risultare $E_Q > 1$ ossia $m > 3.4142$.

UD 7

Misure astronomiche hanno provato che le stelle si allontanano dal centro dell'Universo con una velocità data dalla legge di Hubble

$$v = HR \ ,$$

dove H è la costante di Hubble e R è il *raggio* di una sfera sufficientemente grande da contenere l'Universo allo stato attuale. Il valore di tale costante è approssimativamente

$$H = 1.762 \cdot 10^{-18} \ \frac{1}{sec} \ .$$

Calcolare la densità critica ϱ_c tale che per $\varrho < \varrho_c$ l'Universo è aperto e per $\varrho > \varrho_c$ l'Universo è chiuso.

Sia V un volume sferico sufficientemente grande da contenere l'Universo; sia R il raggio di tale sfera e M la massa totale; allora $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ossia

$$M = \varrho V = \frac{4}{3}\pi \varrho R^3 \ .$$

A causa dell'espansione dell'Universo, il volume si dilata ed un punto generico (di massa unitaria) della superficie della sfera si allontana dal centro con una velocità data dalla legge di Hubble. Pertanto l'energia cinetica T del sistema e l'energia gravitazionale U sono date dalle seguenti espressioni:

$$T = \frac{Mv^2}{2} = \frac{MH^2R^2}{2}$$
$$U = -\frac{GM^2}{R} = -\frac{4}{3}\pi G \varrho R^2 M \ .$$

Se l'energia meccanica totale $E = T + U$ è positiva, l'Universo è in espansione, mentre se $E < 0$ si ha una contrazione. Calcoliamo la densità di massa critica ϱ_c, in corrispondenza della quale $E = 0$. Dalla relazione $T = -U$ ed utilizzando il valore della costante di gravitazione $G = 6.673 \cdot 10^{-8} cm^3/(g\ sec^2)$, si ottiene

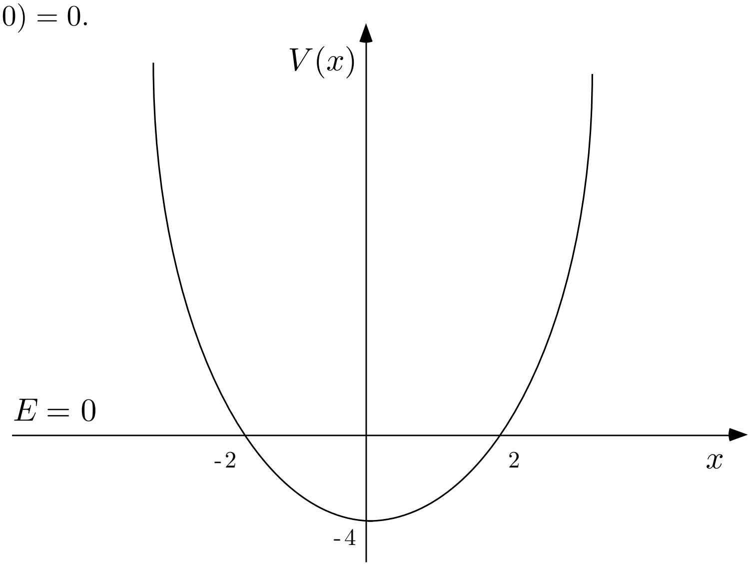
$$\varrho_c \;=\; \frac{3H^2}{8\pi G} \;\simeq\; 5\cdot 10^{-30}\frac{g}{cm^3}\ ,$$

che corrisponde a circa 3 protoni/m^3. Se $\varrho > \varrho_c$ l'Universo è chiuso; se $\varrho < \varrho_c$ l'Universo è aperto.

Si noti che la stima attuale della densità dell'Universo è circa $10^{-31}\ g/cm^3$.

UD 8

Calcolare il periodo del moto di un punto materiale di massa m soggetto alla forza conservativa di energia potenziale $V(x) = x^2 - 4$ e con dati iniziali $x(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 0$.



Il valore dell'energia meccanica corrispondente ai dati iniziali è

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}(0)^2 + V(x(0)) \;=\; 0\ .$$

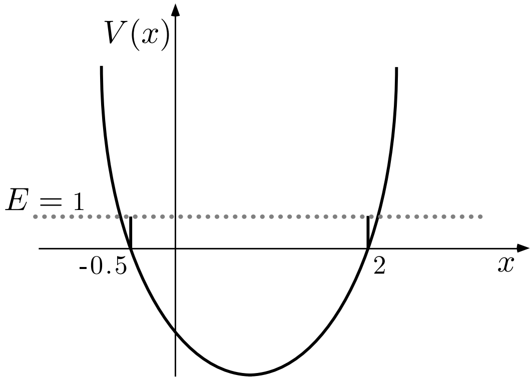
Il livello $E = 0$ interseca la funzione energia potenziale nei punti di ascissa $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Pertanto il periodo del moto è:

$$\begin{aligned} T &= 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{2m}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)_{-2}^{2} \;=\; \sqrt{2m}\ \ \pi\ . \end{aligned}$$

© 88-7999-464-6

UD 9

Calcolare il periodo del moto di un punto materiale di massa $m = 2$ soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale $V(x) = 2x^2 - 3x - 1$ e con dati iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \sqrt{2}$.



Il valore dell'energia meccanica corrispondente ai dati iniziali è

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}(0)^2 + V(x(0)) = 1 .$$

L' energia potenziale interseca l'asse delle ascisse nei punti $\frac{3+\sqrt{17}}{4} \simeq 1.78$ e $\frac{3-\sqrt{17}}{4} \simeq -0.28$. Il livello $E = 1$ interseca la funzione energia potenziale nei punti $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$. Pertanto il periodo del moto è:

$$\begin{aligned} T &= 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \\ &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{-2x^2 + 3x + 2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\arcsin \frac{4x-3}{5}\right]_{-\frac{1}{2}}^{2} = \sqrt{2}\pi . \end{aligned}$$

UD 10

Una particella di massa $m = 2$ è soggetta alla forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x^2(1 - x)(3 - x) .$$

Stimare inferiormente e superiormente il periodo del moto di condizioni iniziali

$$x(0) = 1 , \qquad \dot{x}(0) = 0 .$$

ⓒ88-7999-464-6

Il valore dell'energia meccanica corrispondente ai dati iniziali è

$$E \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}(0)^2 + V(x(0)) \;=\; V(1) \;=\; 0\ .$$

Studiamo il grafico dell'energia potenziale:

$$V'(x) = 2x(2x^2 - 6x + 3)$$

e quindi $V'(x) = 0$ per $x_0 = 0$ e $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$. Inoltre,

$$V''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$$

e quindi

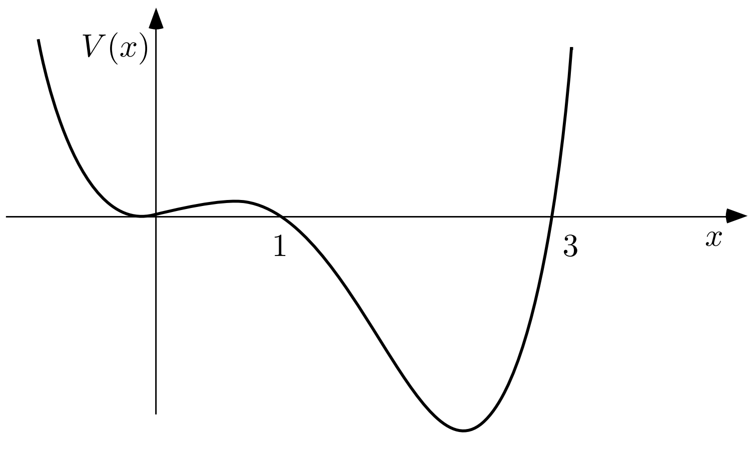
$$V''(0) = 6\ ,\quad V''(\frac{3+\sqrt{3}}{2}) \simeq 16.3923\ ,\quad V''(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) \simeq -4.3923\ .$$

Pertanto le posizioni x_0 e x_1 sono minimi, mentre x_2 è un punto di massimo. I corrispondenti valori dell'energia potenziale sono:

$$V(0) = 0\ ,\quad V(\frac{3+\sqrt{3}}{2}) \simeq -4.8481\ ,\quad V(\frac{3-\sqrt{3}}{2}) \simeq 0.3481\ .$$

Passiamo alla stima del periodo tra i punti $x_- = 1$ e $x_+ = 3$, che rappresentano le intersezioni dell'energia potenziale con il livello $E = 0$:

$$T = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} \;=\; 2\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2(1-x)(3-x)}}\ .$$



© 88-7999-464-6

Per ottenere una stima del periodo, sostituiamo al posto di x^2 i valori agli estremi di integrazione:

$$\frac{2}{3}\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-(1-x)(3-x)}} \leq T \leq 2\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-(1-x)(3-x)}}$$

ed essendo

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{-(a-x)(b-x)}} = \pi \ ,$$

si ha

$$\frac{2}{3}\pi \ \leq \ T \ \leq \ 2\pi \ .$$

UD 11

Caratterizzazione delle soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari.

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali lineari

$$\dot{\underline{z}} = A\ \underline{z} \ ,$$

dove A è una matrice a coefficienti reali e costanti.

Si dicono *soluzioni particolari* le soluzioni della forma:

$$\underline{z}(t) \ = \ T(t)\ \underline{u} \ ,$$

che si mantengono parallele ad un vettore $\underline{u}$ fissato. Poiché

$$AT(t)\underline{u} \ = \ T(t)A\underline{u} \ ,$$

si ha

$$\frac{d}{dt}(T(t)\underline{u}) = \dot{T}(t)\underline{u} = T(t)A\underline{u}$$

ossia

$$A\underline{u} \ = \ \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}\underline{u} \ .$$

Pertanto cerchiamo gli autovalori λ associati alla matrice A:

$$A\underline{u} \ = \ \lambda\underline{u} \ ,$$

da cui si ricava:

$$\dot{T}(t) = \lambda\ T(t)$$

ossia

$$T(t) = Ce^{\lambda t} \ , \qquad C \equiv T(0) \ .$$

La soluzione particolare sarà quindi della forma:

$$\underline{z}(t) \ = \ Ce^{\lambda t}\underline{u}$$

e ogni combinazione lineare è ancora soluzione.

Possiamo distinguere le soluzioni al variare del tipo e del segno degli autovalori come segue. Limitiamoci al caso in cui la matrice A sia 2×2 con autovalori λ_1 e λ_2. Consideriamo l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x} \ + \ a\dot{x} \ + \ bx \ = \ 0 \ ;$$

riducendola a forma normale si ottiene

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ay - bx \end{cases}$$

e quindi la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \ .$$

1) Se gli autovalori λ_1 e λ_2 sono reali e distinti, posto $\underline{z} = (x, y)$, la soluzione è del tipo:

$$\underline{z}(t) \ = \ C_1 e^{\lambda_1 t}\underline{u}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\underline{u}_2 \ ,$$

dove $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ sono gli autovettori corrispondenti a λ_1 e λ_2. Pertanto si avrà:
a) *nodo stabile:* se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$;
b) *nodo instabile:* se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$;
c) *sella:* se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

2) Se gli autovalori sono reali e coincidenti, $\lambda_1 = \lambda_2$, la soluzione è data da

$$x = (C_1 + C_2 \ t) \ e^{\lambda_1 t} \ .$$

3) Se gli autovalori λ_1 e λ_2 sono complessi coniugati, la soluzione è del tipo

$$x(t) = Be^{Re(\lambda_1)t} \ (\cos(Im(\lambda_1)t) + \alpha) \ ,$$

dove B, α sono costanti. Si avranno allora i seguenti casi:
a) *fuoco stabile:* se $Re(\lambda_1) < 0$;
b) *fuoco instabile:* se $Re(\lambda_1) > 0$;

© 88-7999-464-6

c) *centro:* se $Re(\lambda_1) = 0$.

Esempio 1:

Consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico

$$\ddot{x} + \omega^2 x \; = \; 0 \; .$$

Riduciamo tale equazione alla forma normale:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = -\omega^2 x \; ; \end{cases}$$

pertanto la matrice lineare associata è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \; .$$

Gli autovalori associati sono soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 + \omega^2 \; = \; 0$$

ossia

$$\lambda_1 = i\omega \; , \qquad \lambda_2 = -i\omega \; .$$

Poiché la parte reale degli autovalori è nulla, la soluzione è un *centro.*

Esempio 2:

Consideriamo l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2 x \; = \; 0 \; , \qquad \alpha > 0 \; ;$$

riducendo a forma normale si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \alpha y \end{cases}$$

e quindi la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\alpha \end{pmatrix} \; ,$$

i cui autovalori sono soluzioni dell'equazione:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega^2 \; = \; 0 \; .$$

Pertanto si ha:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} \ , \qquad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} \ .$$

Distinguiamo i seguenti casi:
a) se $\alpha > 2\omega$ gli autovalori sono reali ed entrambi negativi; si ha quindi un *nodo stabile.*
b) Se $\alpha < 2\omega$ gli autovalori sono complessi coniugati con parte reale negativa; si ha quindi un *fuoco stabile.*

Esempio 3:

Determiniamo la soluzione dell'equazione

$$2\ddot{x} - \dot{x} - x \ = \ 0 \ .$$

Riducendo a forma normale si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

e quindi la matrice A è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Gli autovalori sono soluzioni di

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} \ = \ 0$$

ossia

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \ , \qquad \lambda_2 = 1$$

e quindi la soluzione è una *sella.* Calcoliamo gli autovalori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ soluzioni di $(A - \lambda_2 I)\underline{u} = 0$ e $(A - \lambda_1 I)\underline{v} = 0$. Nel primo caso si ha:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

e lasciando u_1 arbitrario ($u_1 = \alpha$), si ha: $\underline{u} = (\alpha, \alpha)$. Nel secondo caso risulta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

© 88-7999-464-6

e lasciando v_1 arbitrario ($v_1 = \beta$), si ha: $\underline{v} = (\beta, -\frac{\beta}{2})$. Pertanto scriviamo la soluzione nella forma:

$$\begin{cases} x = \alpha e^t + \beta e^{-\frac{1}{2}t} \\ \\ y = \alpha e^t - \frac{\beta}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \ . \end{cases}$$

Esercizi proposti

1) Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4x + 1 \ .$$

2) Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = (2x^2 - x)e^{-x/2} \ .$$

3) Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \sin(x) \ \tan(x) \ .$$

4) Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = x \ \sin(x) \ .$$

5) Descrivere qualitativamente il moto di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale

$$V(x) = \sin(x) \ \cos(2x) \ .$$

6) Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa unidimensionale di energia potenziale

$$V(x) \ = \ -(x^2 - 1)^2 \ .$$

In corrispondenza del livello di energia $E = 0$, calcolare il tempo impiegato per andare dalla posizione iniziale $x_0 = 0$ alla posizione finale $x_1 = 1$, assumendo che la velocità iniziale sia positiva.

ⓒ88-7999-464-6

7) Si consideri un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa unidimensionale di energia potenziale

$$V(x) \;=\; \frac{-\tan(x)}{\cos(x)}\;.$$

In corrispondenza del livello di energia $E = 0$, si calcoli il

tempo impiegato per andare dalla posizione iniziale $x_0 = 0$ alla posizione finale $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

Capitolo 2
Dinamica del punto vincolato

• Equazione del moto: Sia P un punto materiale di massa m la cui posizione, in un sistema di riferimento inerziale, è individuata dal vettore $\underline{x}$; sia $\dot{\underline{x}} = \underline{v}$ la corrispondente velocità e $\ddot{\underline{x}} = \underline{a}$ l'accelerazione. Siano $\underline{F}^{(a)}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ e $\underline{F}^{(r)}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ le risultanti delle forze, attive e reattive, agenti sul punto. Allora l'equazione del moto si scrive nella forma:

$$m\ddot{\underline{x}} \;=\; \underline{F}^{(a)}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \;+\; \underline{F}^{(r)}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t) \; .$$

• **Equazioni di Lagrange:** Supponiamo che il punto P sia soggetto a vincoli olonomi, bilaterali, perfetti. Indichiamo con n il numero dei gradi di libertà del sistema meccanico e siano $(x_1, ..., x_n)$ coordinate Lagrangiane indipendenti. Sia T la relativa energia cinetica e supponiamo che P sia soggetto all'azione di una forza conservativa $\underline{F}$, con *energia potenziale* $V = V(\underline{x})$. Indichiamo con

$$L \;=\; L(x_1 ... x_n, \dot{x}_1 ... \dot{x}_n, t) \;=\; T - V$$

la *Lagrangiana* del sistema. Le equazioni del moto o *equazioni di Lagrange* sono:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \; , \qquad i = 1, ..., n \; . \tag{EL}$$

• Se il sistema è soggetto a forze conservative, puramente posizionali, si conserva l'energia meccanica totale

$$E \;=\; T + V \; .$$

Si può verificare la conservazione dell'energia meccanica totale calcolandone la derivata temporale lungo il moto. L'energia si conserva se e solo se

$$\frac{dE(\ddot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}, \underline{x})}{dt} \;\equiv\; \dot{E}(\ddot{\underline{x}}, \dot{\underline{x}}, \underline{x}) \;=\; 0 \; ,$$

dove $\underline{\ddot{x}}$, $\underline{\dot{x}}$, $\underline{x}$ verificano le equazioni di Lagrange (EL).

• Se la Lagrangiana non dipende esplicitamente da una delle variabili indipendenti, ad esempio $x = x_j$, si conserva la quantità

$$p_j \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}$$

chiamata *momento cinetico* coniugato alla variabile x_j. Infatti, dalle (EL) risulta

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \text{costante} \ .$$

In tal caso la variabile x_j si dice *ciclica*.

• Se il sistema ammette una o più variabili cicliche è possibile ridurre il numero dei gradi di libertà tramite l'uso degli integrali primi associati.

• **Posizioni di equilibrio e stabilità:** Consideriamo un sistema olonomo a vincoli fissi e bilateri, soggetto ad una sollecitazione attiva conservativa di energia potenziale $V = V(\underline{x})$ $(\underline{x} = (x_1, ..., x_n))$. Diciamo che $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$ è una configurazione di *equilibrio*, se

$$\underline{F}^{(a)}(\overline{\underline{x}}) = -\frac{dV(\overline{\underline{x}})}{d\underline{x}} = \underline{0} \ .$$

Denotiamo con $\underline{y} = \underline{x} - \overline{\underline{x}}$ il vettore che indica lo scostamento dalla posizione di equilibrio. La posizione $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$ è di equilibrio *stabile*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se le condizioni iniziali soddisfano le relazioni

$$|y_j(0)| < \delta \ , \qquad |\dot{y}_j(0)| < \delta \ , \quad j = 1, ..., n \ ,$$

allora

$$|y_j(t)| < \varepsilon \ , \qquad |\dot{y}_j(t)| < \varepsilon \ , \quad j = 1, ..., n \ .$$

• **Teorema di Dirichlet–Lagrange:** Se l'energia potenziale V ha un minimo stretto in $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$, allora tale posizione è di equilibrio stabile.

Indichiamo con $\mathcal{H}(V)$ l'hessiano dell'energia potenziale calcolato nella configurazione $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$:

$$\mathcal{H}(V) \;\equiv\; \left(\frac{\partial^2 V(\overline{\underline{x}})}{\partial \underline{x}^2}\right) \ .$$

© 88-7999-464-6

I Teorema di Lyapunov: Se l'energia potenziale V non ha un minimo stretto in $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$ e $\det \mathcal{H}(V) \neq 0$, allora la posizione di equilibrio $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$ è *instabile.*

• Per sistemi a due gradi di libertà il carattere di stabilità o instabilità della configurazione di equilibrio può essere desunto dal segno degli autovalori (λ_1, λ_2) associati alla matrice hessiana $\mathcal{H}(V)$. Più precisamente,
i) se entrambi gli autovalori sono positivi, l'equilibrio è stabile;
ii) se uno degli autovalori è negativo, l'equilibrio è instabile;
iii) se uno degli autovalori è nullo, si ha un caso dubbio e si devono esaminare le derivate di ordine superiore.

• Il segno degli autovalori può essere desunto dall'esame del determinante e della traccia di $\mathcal{H}(V)$. Infatti, poiché

$$\begin{aligned} \det\ \mathcal{H}(V) &= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ , \\ \mathrm{tr}\ \mathcal{H}(V) &= \lambda_1 + \lambda_2 \ , \end{aligned}$$

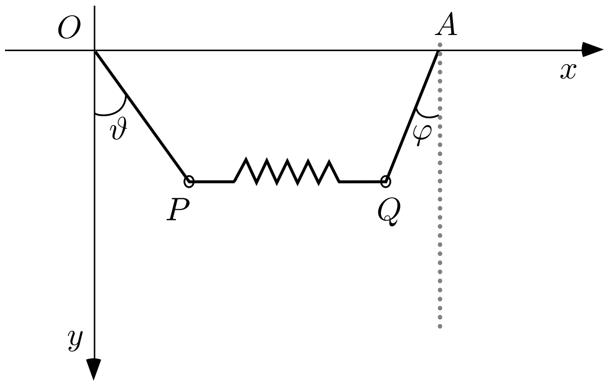
i) se $\det \mathcal{H}(V) > 0$ e $\mathrm{tr}\ \mathcal{H}(V) > 0$, l'equilibrio è stabile;
ii) se $\det \mathcal{H}(V) < 0$, l'equilibrio è instabile;
iii) se $\det \mathcal{H}(V) = 0$ si ha un caso dubbio.

Osservazione: In questo e nei successivi capitoli si intenderá sempre che le molle (ove compaiano) siano ideali e con lunghezza a riposo nulla.

PV 1

In un piano verticale, due aste di lunghezza l e massa trascurabile sono appese nei punti $O(0,0)$ e $A(d,0)$. Alle estremità le due aste recano due punti materiali P e Q di massa m, i quali sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Siano ϑ e φ gli angoli che le due aste formano con la verticale.

1) Determinare la Lagrangiana del problema;
2) scrivere le equazioni del moto.



1) Le coordinate dei due punti sono:

$$P(x_P, y_P) = (l\sin\vartheta, l\cos\vartheta), \qquad Q(x_Q, y_Q) = (d - l\sin\varphi, l\cos\varphi)$$

e quindi le rispettive velocità sono:

$$\underline{v}_P(l\dot\vartheta\cos\vartheta, -l\dot\vartheta\sin\vartheta)\ , \qquad \underline{v}_Q(-l\dot\varphi\cos\varphi, -l\dot\varphi\sin\varphi)$$

ossia $v_P^2 = l^2\dot\vartheta^2$, $v_Q^2 = l^2\dot\varphi^2$. Pertanto l'energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2)\ .$$

Poiché la distanza tra i punti P e Q vale:

$$|PQ|^2 = d^2 + 2l^2 - 2l^2\cos(\vartheta - \varphi) - 2dl(\sin\vartheta + \sin\varphi)\ ,$$

l'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_P - mgy_Q + \frac{1}{2}k|PQ|^2 \\ &= -mgl(\cos\vartheta + \cos\varphi) - kl[l\cos(\vartheta + \varphi) + d(\sin\vartheta + \sin\varphi)] + \text{cost.} \end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana completa è:

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \dot\vartheta, \varphi, \dot\varphi) = {}& \frac{1}{2}ml^2(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2) + mgl(\cos\vartheta + \cos\varphi) \\ & + kl[l\cos(\vartheta + \varphi) + d(\sin\vartheta + \sin\varphi)]\ . \end{aligned}$$

ⓒ 88-7999-464-6

2) Le equazioni di Lagrange sono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} ml^2\ddot\vartheta = -mgl\sin\vartheta - kl^2\sin(\vartheta+\varphi) + kdl\cos\vartheta \\ \\ ml^2\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi - kl^2\sin(\vartheta+\varphi) + kdl\cos\varphi\ . \end{cases}$$

PV 2

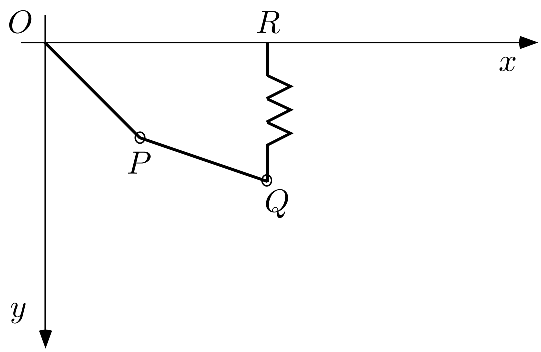
In un piano verticale, due aste (OP e PQ) di lunghezza l e massa trascurabile hanno un estremo (P) in comune; la prima asta è vincolata a ruotare attorno all'origine O del sistema di riferimento. In corrispondenza di P e Q si trovano due punti materiali di massa m. Inoltre, il punto Q è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) determinare le equazioni del moto;

3) calcolare le posizioni di equilibrio al variare dei parametri;

4) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio.



1) Il sistema ha due gradi di libertà e assumiamo come coordinate lagrangiane gli angoli ϑ e φ che le due aste OP e PQ formano rispettivamente con la verticale.

I punti $P(x_P, y_P)$ e $Q(x_Q, y_Q)$ hanno coordinate

$$P(l\sin\vartheta, l\cos\vartheta)$$
$$Q(l\sin\vartheta + l\sin\varphi, l\cos\vartheta + l\cos\varphi)$$

e quindi le rispettive velocità sono

$$\underline{v}_P(l\dot\vartheta\cos\vartheta, -l\dot\vartheta\sin\vartheta)$$
$$\underline{v}_Q(l\dot\vartheta\cos\vartheta + l\dot\varphi\cos\varphi, -l\dot\vartheta\sin\vartheta - l\dot\varphi\sin\varphi)$$

ossia

$$v_P^2 = l^2\dot\vartheta^2$$
$$v_Q^2 = l^2\dot\vartheta^2 + l^2\dot\varphi^2 + 2l^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)\ .$$

Pertanto l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}ml^2(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2 + 2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi))\ .$$

Indicando con R il punto di applicazione della molla, l'energia potenziale ha la seguente forma:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_P - mgy_Q + \frac{1}{2}k|QR|^2 \\ &= -mg(2l\cos\vartheta + l\cos\varphi) + \frac{1}{2}kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)^2\ . \end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana è:

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \dot\vartheta, \varphi, \dot\varphi) = {}& ml^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + ml^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi) \\ &+ mgl(2\cos\vartheta + \cos\varphi) - \frac{1}{2}kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)^2\ . \end{aligned}$$

2) Le equazioni di Lagrange del moto sono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2ml^2\ddot\vartheta + ml^2\ddot\varphi\cos(\vartheta - \varphi) + ml^2\dot\varphi^2\sin(\vartheta - \varphi) = -2mgl\sin\vartheta \\ \qquad\qquad + kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)\sin\vartheta \\ \\ ml^2\ddot\varphi + ml^2\ddot\vartheta\cos(\vartheta - \varphi) - ml^2\dot\vartheta^2\sin(\vartheta - \varphi) = -mgl\sin\varphi \\ \qquad\qquad + kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)\sin\varphi\ . \end{cases}$$

© 88-7999-464-6

3) Le posizioni di equilibrio si ottengono dalle relazioni:

$$\begin{cases} V_\vartheta = 2mgl\sin\vartheta - kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)\sin\vartheta = 0 \\ \\ V_\varphi = mgl\sin\varphi - kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)\sin\varphi = 0\ . \end{cases}$$

Pertanto le possibili configurazioni di equilibrio sono:

$$(\vartheta,\varphi) = (0,0), \quad (0,\pi), \quad (\pi,0), \quad (\pi,\pi)$$

e inoltre:

$$\vartheta = 0, \qquad \varphi = \pm\arccos(\frac{mg}{kl} - 1)\ ,$$

$$\varphi = 0, \qquad \vartheta = \pm\arccos(\frac{2mg}{kl} - 1)\ .$$

Si noti che per $\vartheta = \pi$ si ottiene $\cos\varphi = \frac{mg}{kl} + 1$, che è una soluzione inaccettabile; parimenti non è lecito considerare la soluzione $\varphi = \pi$, $\cos\vartheta = \frac{2mg}{kl} + 1$.

4) Per discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio, calcoliamo le derivate seconde dell'energia potenziale:

$$\begin{aligned} V_{\vartheta\vartheta} &= 2mgl\cos\vartheta - kl^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - kl^2\cos\vartheta\cos\varphi \\ V_{\vartheta\varphi} &= V_{\varphi\vartheta} = kl^2\sin\vartheta\sin\varphi \\ V_{\varphi\varphi} &= mgl\cos\varphi - kl^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - kl^2\cos\vartheta\cos\varphi\ . \end{aligned}$$

Pertanto, calcolando l'Hessiano nelle posizioni di equilibrio si ha:

$$\mathcal{H}(V(0,0)) = \begin{pmatrix} 2mgl - 2kl^2 & 0 \\ 0 & mgl - 2kl^2 \end{pmatrix}$$

e la posizione di equilibrio $(\vartheta,\varphi) = (0,0)$ è stabile se

$$\begin{cases} 2mgl - 2kl^2 > 0 \\ \\ mgl - 2kl^2 > 0 \end{cases}$$

ossia se $mgl > 2kl^2$. Analogamente si trova che le configurazioni $(\vartheta,\varphi) = (0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π) sono instabili, poiché uno degli autovalori è negativo. In particolare, si ha:

$$\mathcal{H}(V(0,\pi)) = \begin{pmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}\ ,$$

che ammette gli autovalori $\lambda_1 = 2mgl$ e $\lambda_2 = -mgl < 0$;

$$\mathcal{H}(V(\pi, 0)) = \begin{pmatrix} -2mgl & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} ,$$

che ammette gli autovalori $\lambda_1 = -2mgl < 0$ e $\lambda_2 = mgl$;

$$\mathcal{H}(V(\pi, \pi)) = \begin{pmatrix} -2mgl - 2kl^2 & 0 \\ 0 & -mgl - 2kl^2 \end{pmatrix} ,$$

che ammette gli autovalori $\lambda_1 = -2mgl - 2kl^2 < 0$ e $\lambda_2 = -mgl - 2kl^2 < 0$.

L'hessiano dell'energia potenziale calcolato nella configurazione di equilibrio $(\vartheta_1, \varphi_1) = (0, \pm\arccos(\frac{mg}{kl} - 1))$ è:

$$\mathcal{H}(V(\vartheta_1, \varphi_1)) = \begin{pmatrix} mgl & 0 \\ 0 & mgl(2 - \frac{mg}{kl}) \end{pmatrix} ;$$

entrambi gli autovalori sono positivi, poiché la condizione di esistenza della soluzione implica $2 - \frac{mg}{kl} \geq 0$. Nel caso $2 - \frac{mg}{kl} = 0$ si ritrova $\varphi = 0$.

Analogamente per la posizione $(\vartheta_2, \varphi_2) = (\pm\arccos(\frac{2mg}{kl} - 1), 0)$, si ha:

$$\mathcal{H}(V(\vartheta_2, \varphi_2)) = \begin{pmatrix} 4mgl(1 - \frac{mg}{kl}) & 0 \\ 0 & -mgl \end{pmatrix}$$

e poiché un autovalore è negativo la posizione di equilibrio è instabile. Se $mg = kl$ si ritrova il caso $\vartheta = 0$ precedentemente analizzato.

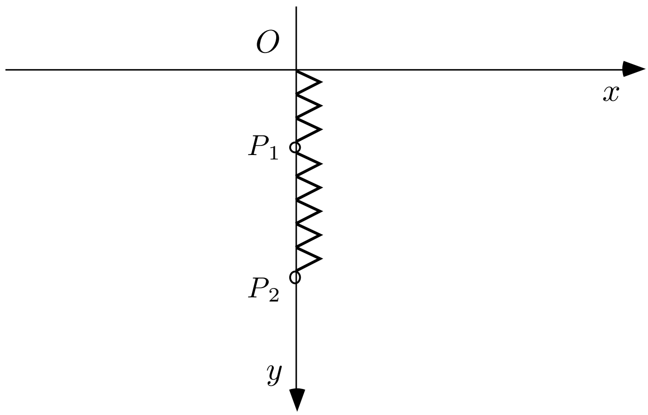
PV 3

In un piano verticale, due punti materiali P_1 e P_2 di masse m_1 e m_2 possono scorrere senza attrito lungo l'asse delle ordinate di un sistema di riferimento fisso Oxy. Il punto P_1 è collegato all'origine O da una molla di costante elastica $k_1 > 0$ e i due punti sono collegati tra loro da un'altra molla di costante elastica $k_2 > 0$. Siano y_1 e y_2 le ordinate dei due punti.

1) Calcolare le equazioni del moto;

2) determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

© 88-7999-464-6



1) L'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 \ + \ \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \ ,$$

mentre l'energia potenziale dovuta alle forze peso e alla forza elastica delle due molle è:

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 + \frac{1}{2}k_1 y_1^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 \ .$$

Pertanto la lagrangiana assume la forma:

$$L(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - \frac{1}{2}k_1 y_1^2 - \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 \ .$$

Dunque, le equazioni di Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \frac{\partial L}{\partial y_1} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\partial L}{\partial y_2} \end{cases}$$

sono date dalle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 = m_1 g - k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ \\ m_2\ddot{y}_2 = m_2 g - k_2(y_2 - y_1) \ . \end{cases}$$

2) Le posizioni di equilibrio che annullano le derivate prime dell'energia

ⓒ88-7999-464-6

potenziale

$$\begin{cases} V_{y_1} = -m_1 g + k_1 y_1 - k_2(y_2 - y_1) = 0 \\ \\ V_{y_2} = -m_2 g + k_2(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

sono:

$$y_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1}, \qquad y_2 = \frac{(m_1 + m_2)g}{k_1} + \frac{m_2 g}{k_2}.$$

Calcoliamo l'hessiano di V:

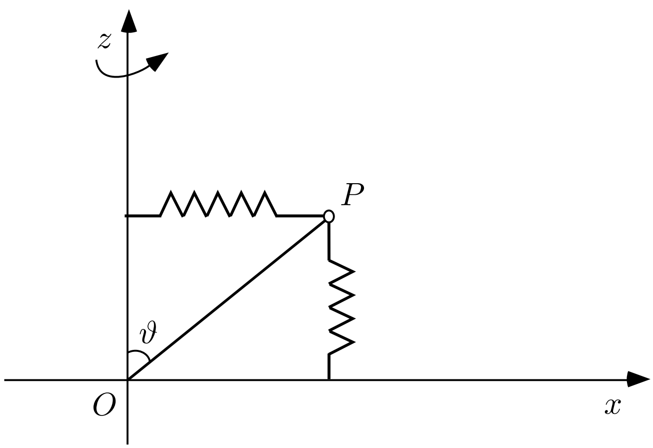
$$\mathcal{H}(V(y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Poiché la traccia dell'hessiano è positiva ($\mathrm{Tr}(\mathcal{H}) = k_1 + 2k_2$) e il determinante è positivo ($\det(\mathcal{H}) = k_1 k_2$) la posizione di equilibrio è stabile.

PV 4

Un'asta di lunghezza l e massa trascurabile è attaccata all'origine di un sistema di riferimento verticale e può ruotare attorno all'origine. All'altra estremità dell'asta è appeso un punto P di massa m, il quale è collegato agli assi orizzontale e verticale tramite due molle di costanti elastiche $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Le due molle si mantengono parallele agli assi z e x rispettivamente. Tutto il sistema ruota con velocità angolare costante ω attorno alla verticale. Indicato con ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale:

1) determinare l'equazione del moto;
2) calcolare le posizioni di equilibrio relative e discuterne la stabilità;
3) dimostrare che si conserva l'energia meccanica totale.



ⓒ 88-7999-464-6

1) In un sistema di riferimento assoluto con l'origine coincidente con quella del sistema di riferimento relativo, l'asse z coincidente con l'asse di rotazione del sistema, le coordinate del punto P sono:

$$P(l\sin\vartheta\cos\omega t, l\sin\vartheta\sin\omega t, l\cos\vartheta)\ .$$

Pertanto la velocità assoluta di P è:

$$\underline{v}_P(l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\omega t - l\omega\sin\vartheta\sin\omega t, l\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\omega t + l\omega\sin\vartheta\cos\omega t, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

ossia $v_P^2 = l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\omega^2\sin^2\vartheta$ e l'energia cinetica risulta:

$$T = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\omega^2\sin^2\vartheta)\ .$$

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$V = mgl\cos\vartheta + \frac{1}{2}k_1 l^2\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}k_2 l^2\sin^2\vartheta$$

e quindi la lagrangiana completa è:

$$\begin{aligned} L(\vartheta,\dot{\vartheta}) &= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\omega^2\sin^2\vartheta) - mgl\cos\vartheta \\ &- \frac{1}{2}k_1 l^2\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}k_2 l^2\sin^2\vartheta\ . \end{aligned}$$

Pertanto l'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta}$$

diventa:

$$ml^2\ddot{\vartheta} = (ml^2\omega^2 + k_1 l^2 - k_2 l^2)\sin\vartheta\cos\vartheta + mgl\sin\vartheta\ . \qquad (L)$$

2) Sia U l'energia potenziale relativa, comprendente il termine associato alla forza centrifuga dovuta alla rotazione del sistema:

$$U = mgl\cos\vartheta + \frac{1}{2}k_1 l^2\cos^2\vartheta + \frac{1}{2}k_2 l^2\sin^2\vartheta - \frac{ml^2\omega^2}{2}\sin^2\vartheta\ .$$

Annullando la derivata prima, si ha:

$$U_\vartheta = -mgl\sin\vartheta + (k_2 l^2 - k_1 l^2 - ml^2\omega^2)\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

e quindi le posizioni di equilibrio sono:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi, \quad \vartheta_3 = \arccos\left(\frac{mg}{(k_2 - k_1 - m\omega^2)l}\right), \quad \vartheta_4 = -\vartheta_3\ .$$

Le configurazioni di equilibrio ϑ_3 e ϑ_4 esistono se è verificata la relazione

$$|\frac{mg}{(k_2 - k_1 - m\omega^2)l}| \ \leq \ 1 \ .$$

Per discutere la stabilità calcoliamo la derivata seconda di U:

$$U_{\vartheta\vartheta} = -mgl\cos\vartheta + (k_2 - k_1 - m\omega^2)l^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \ .$$

Pertanto, per $\vartheta = \vartheta_1$, si ha: $U_{\vartheta\vartheta} = -mgl + (k_2 - k_1 - m\omega^2)l^2$ e tale configurazione è stabile se $k_2 > k_1 + m\omega^2 + \frac{mg}{l}$.
Per $\vartheta = \vartheta_2$, si ha: $U_{\vartheta\vartheta} = mgl + (k_2 - k_1 - m\omega^2)l^2$ ed è stabile se $k_2 + \frac{mg}{l} > k_1 + m\omega^2$.
Infine, per $\vartheta = \vartheta_3$ o $\vartheta = \vartheta_4$, si ha:

$$U_{\vartheta\vartheta} = \frac{m^2g^2 - (k_2 - k_1 - m\omega^2)^2l^2}{k_2 - k_1 - m\omega^2}$$

e si ha stabilità se $\frac{m^2g^2 - (k_2 - k_1 - m\omega^2)^2l^2}{k_2 - k_1 - m\omega^2} > 0$.

3) Un integrale primo è dato dalla seguente espressione:

$$G = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 - (\frac{1}{2}ml^2\omega^2 - \frac{1}{2}k_2l^2)\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}k_1l^2\cos^2\vartheta + mgl\cos\vartheta \ .$$

Infatti, derivando G rispetto al tempo, si ha:

$$\frac{dG}{dt} = \dot{\vartheta}[ml^2\ddot{\vartheta} - (ml^2\omega^2 - k_2l^2)\sin\vartheta\cos\vartheta - k_1l^2\sin\vartheta\cos\vartheta - mgl\sin\vartheta] \ .$$

Introducendo in tale espressione l'equazione del moto (L), si ottiene:

$$\frac{dG}{dt} \ = \ 0$$

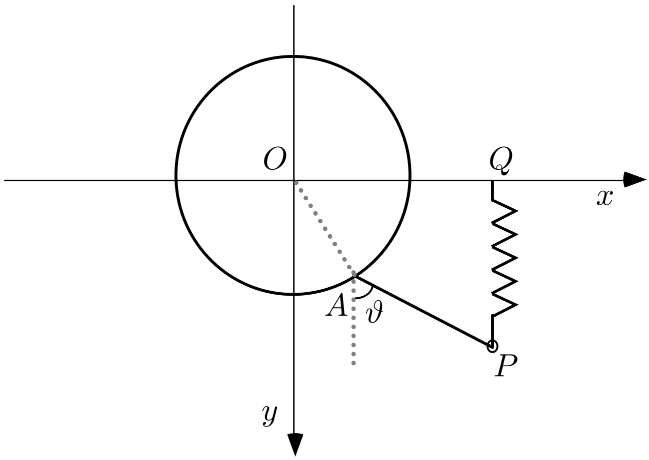
e quindi la quantità G è un integrale primo del sistema.

PV 5

Un'asta AP di lunghezza l e massa trascurabile ha un estremo vincolato a scorrere con velocità angolare costante ω lungo una circonferenza di raggio R posta in un piano verticale. All'altra estremità P dell'asta si trova un punto di massa m, il quale è collegato all'asse delle ascisse tramite una molla di costante elastica $k > 0$ che si mantiene sempre verticale.

© 88-7999-464-6

1) Scrivere l'equazione del moto;
2) dire se si conserva l'energia meccanica totale.



1) Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale. Le coordinate del punto P sono:

$$P(x_P, y_P) = (R\sin\omega t + l\sin\vartheta, R\cos\omega t + l\cos\vartheta)$$

e quindi la corrispondente velocità è:

$$\underline{v}_P(R\omega\cos\omega t + l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -R\omega\sin\omega t - l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

ossia $v_P^2 = R^2\omega^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2Rl\omega\dot{\vartheta}\cos(\vartheta - \omega t)$. Inoltre, se Q è il punto di applicazione della molla sull'asse delle ascisse, allora l'energia potenziale assume la forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k|PQ|^2 - mgy_P \\ &= \frac{1}{2}k(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)^2 - mg(R\cos\omega t + l\cos\vartheta) \ . \end{aligned}$$

Pertanto la Lagrangiana completa è:

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \dot{\vartheta}, t) = &\frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + 2Rl\omega\dot{\vartheta}\cos(\vartheta - \omega t)) \\ &- \frac{1}{2}k(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)^2 + mg(R\cos\omega t + l\cos\vartheta) \ . \end{aligned}$$

L'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta}$$

ⓒ88-7999-464-6

assume dunque la forma:

$$ml^2\ddot{\vartheta} + mRl\omega^2 \sin(\vartheta - \omega t) + mgl \sin\vartheta - kl(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)\sin\vartheta = 0 \ .$$

2) L'energia meccanica totale è data da:

$$\begin{aligned} E = &\frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + 2Rl\omega\dot{\vartheta}\cos(\vartheta - \omega t)) \\ &+ \frac{1}{2}k(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)^2 - mg(R\cos\omega t + l\cos\vartheta) \end{aligned}$$

e quindi, derivando rispetto al tempo ed usando l'equazione del moto si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \dot{\vartheta}[ml^2\ddot{\vartheta} + mRl\omega^2 \sin(\vartheta - \omega t) + \\ & mgl\sin\vartheta - k(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)l\sin\vartheta] \\ &+ mRl\omega\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta - \omega t) - mRl\omega\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta - \omega t) \\ &+ mgR\omega\sin\omega t - kR\omega(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)\sin\omega t \\ &= R\omega\cos(\vartheta - \omega t)[-mR\omega^2\sin(\vartheta - \omega t) \\ &- mg\sin\vartheta + k(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)\sin\vartheta] \\ &- mRl\omega\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta - \omega t) + mgR\omega\sin\omega t \\ &- kR\omega(R\cos\omega t + l\cos\vartheta)\sin\omega t \neq 0 \end{aligned}$$

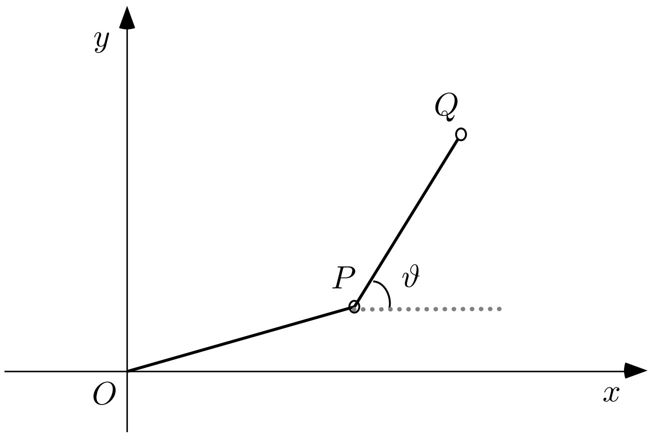
e quindi non si conserva l'energia totale.

PV 6

In un piano orizzontale, un'asta di massa trascurabile e lunghezza l ruota con velocità angolare costante ω attorno all'origine del sistema di riferimento. All'altra estremità si trova un punto materiale P di massa m e ad esso è collegata una seconda asta di lunghezza l e massa trascurabile, che reca nell'estremo libero un punto materiale Q di massa m.

1) Determinare la Lagrangiana del problema e le equazioni del moto;

2) dire se si conserva l'energia meccanica totale.



1) Sia ϑ l'angolo che la seconda asta forma con l'orizzontale (l'angolo che OP forma con l'asse x è ωt). Le coordinate dei due punti P e Q sono:

$$
\begin{aligned}
P(x_P, y_P) &= (l\cos\omega t, l\sin\omega t),\\
Q(x_Q, y_Q) &= (l\cos\omega t + l\cos\vartheta, l\sin\omega t + l\sin\vartheta)
\end{aligned}
$$

e quindi le rispettive velocità sono:

$$
\underline{v}_P(-l\omega\sin\omega t, l\omega\cos\omega t)\ , \qquad \underline{v}_Q(-l\omega\sin\omega t - l\dot\vartheta\sin\vartheta, l\omega\cos\omega t + l\dot\vartheta\cos\vartheta)
$$

e quindi $v_P^2 = l^2\omega^2$, $v_Q^2 = l^2\omega^2 + l^2\dot\vartheta^2 + 2l^2\omega\dot\vartheta\cos(\vartheta - \omega t)$. Poiché il piano è orizzontale, la forza peso è controbilanciata dalla reazione vincolare del piano e non contribuisce all'energia potenziale. Pertanto, la Lagrangiana coincide con l'energia cinetica (e ovviamente con l'energia meccanica totale) ed ha la seguente espressione:

$$
L(\vartheta, \dot\vartheta, t) = \frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta^2 + ml^2\omega\dot\vartheta\cos(\vartheta - \omega t)\ .
$$

L'equazione del moto è quindi

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta}
$$

ossia

$$
ml^2\ddot\vartheta + ml^2\omega^2\sin(\vartheta - \omega t) \ = \ 0\ .
$$

2) Derivando l'energia meccanica rispetto al tempo e usando l'equazione

del moto, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= ml^2\dot\vartheta\ddot\vartheta + ml^2\omega\ddot\vartheta\cos(\vartheta-\omega t) - ml^2\omega\dot\vartheta(\dot\vartheta-\omega)\sin(\vartheta-\omega t)\\ &= -ml^2\omega^3\sin(\vartheta-\omega t)\cos(\vartheta-\omega t) - ml^2\omega\dot\vartheta^2\sin(\vartheta-\omega t)\neq 0\end{aligned}$$

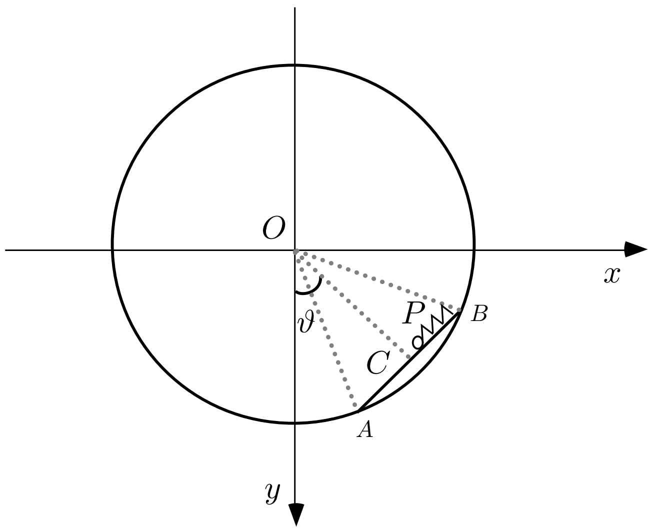
e quindi l'energia meccanica totale non si conserva nel tempo.

PV 7

In un piano orizzontale, un'asta AB di lunghezza $2l$ e massa trascurabile ha gli estremi vincolati a scorrere lungo una circonferenza di raggio R. Lungo l'asta può muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m, il quale è collegato all'estremo B tramite una molla di costante elastica $k > 0$. Sia ϑ l'angolo che OC forma con la verticale, dove C è il punto di mezzo dell'asta, e sia s l'ascissa di P lungo l'asta contata a partire da B.

1) Scrivere le equazioni del moto;

2) con l'aiuto degli integrali primi ridurre il problema al caso unidimensionale.



1) Indichiamo con d la quantità

$$d = \sqrt{R^2 - l^2}\ ;$$

allora le coordinate del centro C dell'asta sono $C(d\sin\vartheta, d\cos\vartheta)$, quelle del punto B sono $B(d\sin\vartheta + l\cos\vartheta, d\cos\vartheta - l\sin\vartheta)$ e infine il punto $P(x_P, y_P)$

ⓒ 88-7999-464-6

ha coordinate:

$$P(d\sin\vartheta + l\cos\vartheta - s\cos\vartheta, d\cos\vartheta - l\sin\vartheta + s\sin\vartheta)\ .$$

Pertanto la velocità di P è:

$$\underline{v}_P(d\dot\vartheta\cos\vartheta - l\dot\vartheta\sin\vartheta + s\dot\vartheta\sin\vartheta - \dot s\cos\vartheta, -d\dot\vartheta\sin\vartheta - l\dot\vartheta\cos\vartheta + s\dot\vartheta\cos\vartheta + \dot s\sin\vartheta)$$

e quindi

$$v_P^2 = d^2\dot\vartheta^2 + l^2\dot\vartheta^2 + s^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2 - 2d\dot\vartheta\dot s - 2ls\dot\vartheta^2\ .$$

L'energia potenziale è dovuta soltanto alla forza elastica:

$$V \ = \ \frac{1}{2}ks^2\ ;$$

pertanto la Lagrangiana è:

$$L(\vartheta,\dot\vartheta,s,\dot s) = \frac{1}{2}m[(d^2+l^2)\dot\vartheta^2 + s^2\dot\vartheta^2 + \dot s^2 - 2d\dot\vartheta\dot s - 2ls\dot\vartheta^2] - \frac{1}{2}ks^2\ .$$

Poiché

$$\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = m[(d^2+l^2)\dot\vartheta + s^2\dot\vartheta - d\dot s - 2ls\dot\vartheta]$$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot s} = m[\dot s - 2d\dot\vartheta]\ ,$$

le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m[(d^2+l^2)\ddot\vartheta + s^2\ddot\vartheta + 2s\dot s\dot\vartheta - d\ddot s - 2ls\ddot\vartheta - 2l\dot s\dot\vartheta] = 0 \\ \\ m[\ddot s - 2d\ddot\vartheta] = m(s\dot\vartheta^2 - l\dot\vartheta^2) - ks\ . \end{cases}$$

2) Gli integrali primi sono l'energia totale E e il momento cinetico coniugato alla variabile ϑ. Infatti, poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente da ϑ, risulta:

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = m(d^2+l^2+s^2-2ls)\dot\vartheta - md\dot s\ ,$$

da cui si ricava:

$$\dot\vartheta \ = \ \frac{p_\vartheta + md\dot s}{m(d^2+l^2+s^2-2ls)}\ .$$

Sostituendo tale espressione nell'energia E si ricava un sistema unidimensionale nella variabile s:

$$E = \frac{1}{2}m\frac{l^2+s^2-2ls}{d^2+l^2+s^2-2ls}\dot s^2 + \frac{p_\vartheta^2}{2m(d^2+l^2+s^2-2ls)} + \frac{1}{2}ks^2\ .$$

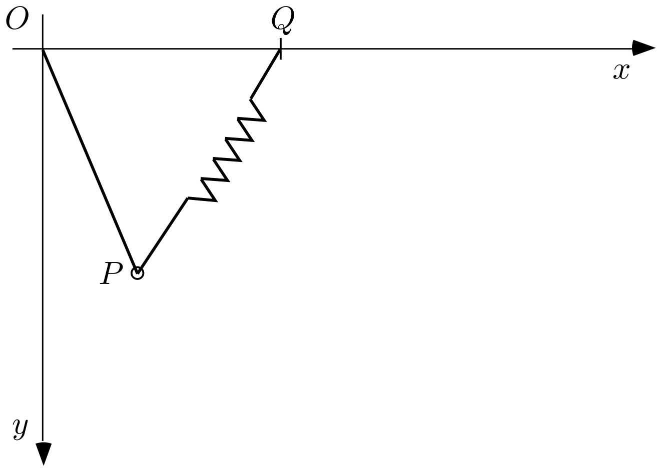
PV 8

In un piano verticale, un'asta di lunghezza l e massa trascurabile è vincolata a ruotare attorno ad un suo estremo. All'altra estremità è appeso un punto materiale di massa m, al quale è collegata una molla di costante elastica $k > 0$, il cui punto di applicazione è $Q(l, 0)$. Sia ϑ l'angolo che OP forma con la verticale.

1) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema;

2) determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

3) ricondurre alle quadrature il problema.



1) La Lagrangiana è pari alla differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale. Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale: $P(x_P, y_P) = (l \sin\vartheta, l\cos\vartheta)$ e $\underline{v}_P(l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_P^2 = l^2\dot{\vartheta}^2$. Inoltre,

$$|PQ|^2 = (l\sin\vartheta - l)^2 + l^2\cos^2\vartheta = 2l^2 - 2l^2\sin\vartheta$$

e quindi l'energia potenziale è:

$$V = \frac{1}{2}k|PQ|^2 - mgy_P \ = \ -kl^2\sin\vartheta - mgl\cos\vartheta + \text{cost.}$$

Pertanto la Lagrangiana risulta avere la seguente espressione:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + kl^2\sin\vartheta + mgl\cos\vartheta$$

ⓒ 88-7999-464-6

e l'equazione di Lagrange è:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta}$$

ossia

$$ml^2\ddot{\vartheta} = kl^2 \cos\vartheta - mgl \sin\vartheta \ .$$

2) Per il calcolo delle posizioni di equilibrio, cerchiamo i valori di ϑ in corrispondenza dei quali è nulla la derivata prima dell'energia potenziale:

$$V_\vartheta(\vartheta) = -kl^2 \cos\vartheta + mgl \sin\vartheta \ = \ 0 \ ,$$

da cui si ricava

$$\mathrm{tg}\ \vartheta \ = \ \frac{kl}{mg} > 0$$

ossia

$$\vartheta_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{kl}{mg}\right) \ , \qquad \vartheta_2 = \vartheta_1 + \pi \ .$$

La derivata seconda vale

$$V_{\vartheta\vartheta}(\vartheta) = kl^2 \sin\vartheta + mgl \cos\vartheta \ .$$

Poiché $\sin\vartheta_1 > 0$ e $\cos\vartheta_1 > 0$, si ha $V_{\vartheta\vartheta}(\vartheta_1) > 0$ e quindi ϑ_1 è una posizione di equilibrio stabile. Nel secondo caso si ha:

$$V_{\vartheta\vartheta}(\vartheta_2) \ = \ \cos\vartheta_2 \ \left(\frac{k^2l^3}{mg} + mgl\right)$$

e poiché $\cos\vartheta_2 < 0$, si ha $V_{\vartheta\vartheta}(\vartheta_2) < 0$ ossia $\vartheta = \vartheta_2$ è di equilibrio instabile.

3) Per ricondurre alle quadrature il problema scriviamo l'energia meccanica totale

$$E \ = \ \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 - kl^2 \sin\vartheta - mgl \cos\vartheta \ ,$$

da cui si ricava:

$$\dot{\vartheta}^2 \ = \ \frac{2}{ml^2}[E + kl^2 \sin\vartheta + mgl \cos\vartheta]$$

ossia

$$t - t_0 \ = \ \pm\sqrt{\frac{ml^2}{2}} \ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{E + kl^2 \sin\vartheta + mgl \cos\vartheta}} \ ,$$

dove il segno è determinato dal fatto che il moto sia crescente o decrescente.

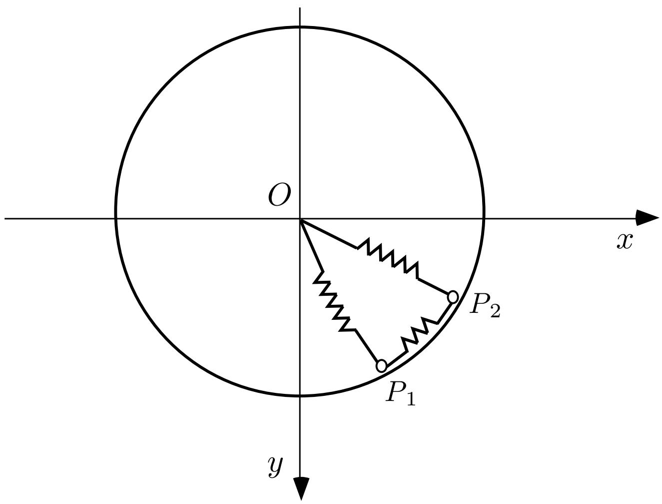
©88-7999-464-6

PV 9

In un piano orizzontale, due punti P_1 e P_2 di massa m sono vincolati a scorrere lungo una circonferenza di raggio R. I due punti sono collegati all'origine del sistema di riferimento da due molle, entrambe di costante elastica $k > 0$ e sono ulteriormente collegati tra loro da una molla, sempre di costante elastica k. Siano ϑ_1 e ϑ_2 gli angoli che OP_1 e OP_2 formano con la verticale.

1) Determinare la Lagrangiana del sistema e gli integrali primi;

2) sia $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$; calcolare la nuova Lagrangiana, gli integrali primi ed eventualmente ricondurre il problema al caso unidimensionale.



1) Poiché i punti P_1 e P_2 hanno coordinate

$$P_1(R\sin\vartheta_1, R\cos\vartheta_1)\ , \qquad P_2(R\sin\vartheta_2, R\cos\vartheta_2)\ ,$$

i quadrati dei moduli delle velocità sono: $v_1^2 = R^2\dot{\vartheta}_1^2$ e $v_2^2 = R^2\dot{\vartheta}_2^2$. Inoltre, l'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$V = \frac{1}{2}k|OP_1|^2 + \frac{1}{2}k|OP_2|^2 + \frac{1}{2}k|P_1P_2|^2$$

ed essendo

$$|P_1P_2|^2 = R^2[(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)^2 + (\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2)^2] = R^2[2 - 2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)]\ ,$$

si ha:

$$V = kR^2 + kR^2(1 - \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)) = -kR^2\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)\ +\ cost.$$

© 88-7999-464-6

Pertanto la Lagrangiana completa è:

$$L(\vartheta_1, \dot{\vartheta}_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_2) = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\vartheta}_1^2 + \dot{\vartheta}_2^2) + kR^2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \ .$$

Poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, l'energia totale E è un integrale primo del sistema.

2) Posto $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$, si ha $\dot{\vartheta}_1 = \dot{\varphi} + \dot{\vartheta}_2$ e quindi la nuova Lagrangiana è:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}_2) = \frac{1}{2} m R^2 [(\dot{\varphi} + \dot{\vartheta}_2)^2 + \dot{\vartheta}_2^2] + kR^2 \cos\varphi \ .$$

Gli integrali primi sono l'energia totale E e il momento cinetico coniugato alla variabile ϑ_2; infatti, la Lagrangiana non dipende esplicitamente da ϑ_2 e quindi:

$$p_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} = mR^2(\dot{\varphi} + 2\dot{\vartheta}_2) = \text{cost.} \ ,$$

da cui si ricava:

$$\dot{\vartheta}_2 \ = \ \frac{p_2}{2mR^2} - \frac{\dot{\varphi}}{2} \ .$$

Inserendo tale espressione nell'energia totale, si riconduce il problema al caso unidimensionale nella variabile φ:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}_2^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}_2) - kR^2 \cos\varphi \\ &= \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{p_2^2}{4mR^2} - kR^2 \cos\varphi \ . \end{aligned}$$

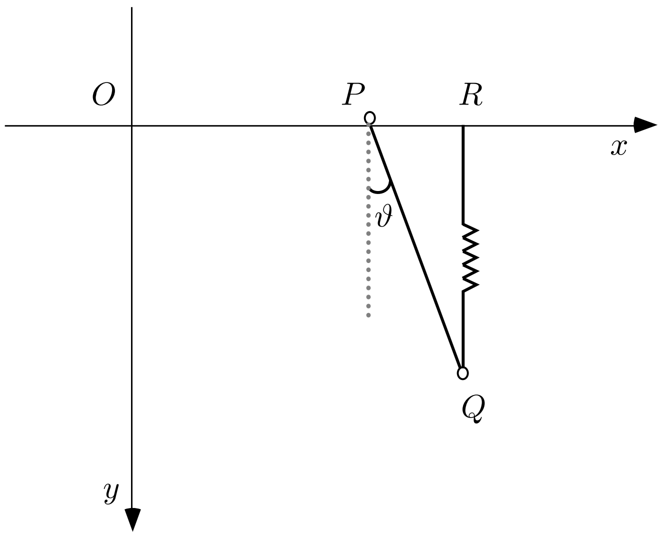
PV 10

Un punto P di massa m può scorrere lungo l'asse delle ascisse di un riferimento verticale; al punto P è collegata un'asta di massa trascurabile e lunghezza l, che reca all'estremità libera un punto materiale Q di massa m, al quale è collegata una molla di costante elastica $k > 0$ vincolata a rimanere sempre verticale.

1) Determinare la Lagrangiana del problema;

2) calcolare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

3) con l'aiuto degli integrali primi del sistema ricondurre il problema al caso unidimensionale.



1) Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale e x l'ascissa del punto P. Le coordinate dei punti P e Q sono:

$$P(x, 0), \qquad Q(x + l\sin\vartheta, l\cos\vartheta)$$

e quindi le corrispondenti velocità sono:

$$\underline{v}_P(\dot{x}, 0)\ , \qquad \underline{v}_Q(\dot{x} + l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

ossia $v_P^2 = \dot{x}^2$, $v_Q^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$. Indicando con R il punto di applicazione della molla, l'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k|QR|^2 - mgy_Q \\ &= \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta - mgl\cos\vartheta\ . \end{aligned}$$

Pertanto la Lagrangiana completa è:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{x}) = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta + mgl\cos\vartheta\ .$$

2) Annullando le derivate prime dell'energia potenziale, si ha:

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ \\ V_\vartheta = -kl^2\sin\vartheta\cos\vartheta + mgl\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

© 88-7999-464-6

e quindi le posizioni di equilibrio sono indifferenti rispetto alla variabile x, mentre per ϑ si ha:

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi, \quad \vartheta_3 = \arccos\left(\frac{mg}{kl}\right), \quad \vartheta_4 = -\vartheta_3 \ .$$

Le posizioni di equilibrio ϑ_3 e ϑ_4 esistono se $mg \leq kl$.
Per determinarne la stabilità calcoliamo la derivata seconda:

$$V_{\vartheta\vartheta} = -kl^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) + mgl\cos\vartheta \ .$$

Pertanto per $\vartheta = \vartheta_1$, $V_{\vartheta\vartheta} = -kl^2 + mgl$ e la posizione di equilibrio è stabile se $mg > kl$.
Per $\vartheta = \vartheta_2$, $V_{\vartheta\vartheta} = -kl^2 - mgl$ e la posizione di equilibrio è instabile.
Per $\vartheta = \vartheta_3$ o $\vartheta = \vartheta_4$, $V_{\vartheta\vartheta} = -\frac{m^2g^2}{k} + kl^2$ e le posizioni di equilibrio sono stabili se $kl > mg$. D'altra parte tale condizione coincide con quella di esistenza di tali posizioni, che risultano quindi essere sempre stabili.

3) Poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dalla variabile x, dall'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

si conserva il momento cinetico coniugato a x:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta = \text{cost.}$$

Da tale relazione si ricava:

$$\dot{x} \ = \ \frac{p_x - ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta}{2m} \ ,$$

che inserita nell'espressione dell'energia cinetica dà:

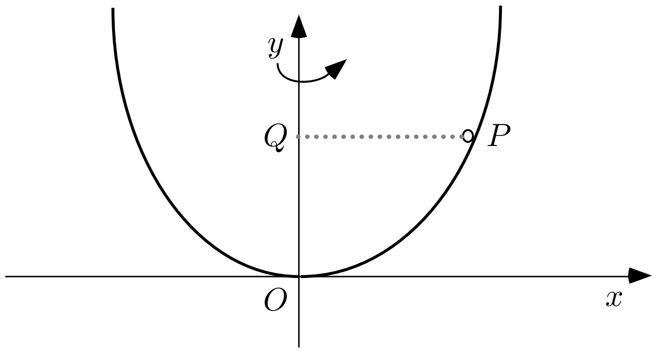
$$\begin{aligned} E &= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta - mgl\cos\vartheta \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta - mgl\cos\vartheta + \frac{p_x^2}{4m} - \frac{ml^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta}{4} \ . \end{aligned}$$

PV 11

In un piano verticale, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida parabolica descritta dall'equazione $y = \frac{x^2}{2}$. Tutto il sistema ruota con velocità angolare costante ω attorno alla verticale.

1) Scrivere l'equazione del moto;

2) ritrovare l'equazione del moto tramite la prima equazione cardinale nel sistema di riferimento ruotante.



1) Il sistema ha un grado di libertà e assumiamo come coordinata lagrangiana l'ascissa x del punto P nel sistema di riferimento relativo (Oxy). Sia $(OXYZ)$ un sistema di riferimento assoluto con l'origine coincidente con quella del sistema relativo e con l'asse Z coincidente con l'asse di rotazione del sistema. Allora le coordinate assolute del punto P sono:

$$P\left(x\cos\omega t, x\sin\omega t, \frac{x^2}{2}\right)$$

e quindi la corrispondente velocità assoluta è:

$$\underline{v}_P(\dot{x}\cos\omega t - x\omega\sin\omega t, \dot{x}\sin\omega t + x\omega\cos\omega t, x\dot{x})$$

ossia

$$v_P^2 = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2 + x^2\dot{x}^2\ .$$

Poiché l'energia potenziale ha la forma

$$V(x) = mg\frac{x^2}{2}\ ,$$

la Lagrangiana è data dalla seguente espressione:

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m[(1+x^2)\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - mg\frac{x^2}{2}\ .$$

Pertanto l'equazione del moto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

è data da:

$$m(1+x^2)\ddot{x} + mx\dot{x}^2 = m(\omega^2 - g)x\ .$$

© 88-7999-464-6

2) Applichiamo la prima equazione cardinale nel sistema di riferimento relativo, tenendo conto dell'azione della forza centrifuga $\underline{F}_c = m\omega^2 QP$, dove Q è la proiezione di P sull'asse di rotazione:

$$m\underline{a}_P \;=\; m\underline{g} \;+\; \underline{\Phi} \;+\; m\omega^2 QP \;, \tag{I}$$

dove $\underline{\Phi}$ denota la reazione vincolare tra il punto e la guida. Per ottenere l'equazione pura del moto, proiettiamo la (I) lungo la tangente alla curva. Il versore tangente è $\underline{t} = \frac{(1,x)}{\sqrt{1+x^2}}$; nel riferimento relativo $P(x, \frac{x^2}{2})$, mentre la velocità del punto P è $\underline{v}_P = (\dot{x}, x\dot{x})$ e l'accelerazione è $\underline{a}_P(\ddot{x}, x\ddot{x} + \dot{x}^2)$. Pertanto, proiettando la (I) lungo $\underline{t}$, si ottiene:

$$m(\ddot{x} + x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2) = -mgx + m\omega^2 x \;,$$

che coincide con l'equazione di Lagrange.

PV 12

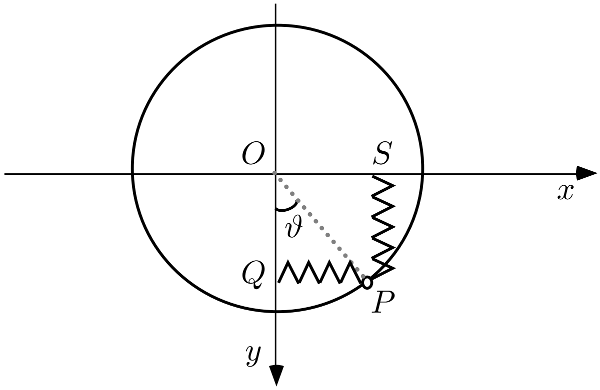
Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una circonferenza di raggio R, il cui centro coincide con l'origine O di un sistema di riferimento verticale. Il punto P è collegato a due molle di costanti elastiche $k_1 > 0$ e $k_2 > 0$, che rimangono, rispettivamente, parallele agli assi x e y. Sia ϑ l'angolo che il raggio OP forma con la verticale.

1) Determinare l'equazione del moto;

2) calcolare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

3) ritrovare l'equazione del moto tramite le equazioni cardinali;

4) determinare la reazione vincolare tra il punto e la guida nella posizione di equilibrio $\vartheta = 0$ con $\dot{\vartheta} = 0$.



ⓒ88-7999-464-6

1) Da $P(x_P, y_P) = (R\sin\vartheta, R\cos\vartheta)$ risulta $\underline{v}_P(R\dot\vartheta\cos\vartheta, -R\dot\vartheta\sin\vartheta)$ ovvero $v_P^2 = R^2\dot\vartheta^2$. Dunque l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot\vartheta^2 \ .$$

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_P + \frac{1}{2}k_1 x_P^2 + \frac{1}{2}k_2 y_P^2 \\ &= -mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}k_1 R^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}k_2 R^2\cos^2\vartheta \ . \end{aligned}$$

Pertanto la Lagrangiana è:

$$L(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{1}{2}mR^2\dot\vartheta^2 + mgR\cos\vartheta - \frac{1}{2}k_1R^2\sin^2\vartheta - \frac{1}{2}k_2R^2\cos^2\vartheta$$

e l'equazione del moto è data da:

$$mR^2\ddot\vartheta = -mgR\sin\vartheta + (-k_1 + k_2)R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \ .$$

2) Per calcolare le posizioni di equilibrio annulliamo la derivata prima dell'energia potenziale:

$$V_\vartheta = mgR\sin\vartheta + R^2(k_1 - k_2)\sin\vartheta\cos\vartheta = 0$$

ossia

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \pi, \quad \vartheta_3 = \arccos\left(\frac{mg}{R(k_2 - k_1)}\right) \ , \vartheta_4 = -\vartheta_3 \ .$$

Le posizioni di equilibrio ϑ_3 e ϑ_4 esistono se $|mg/R(k_2 - k_1)| \leq 1$. In particolare, per $mg = \pm R(k_2 - k_1)$ esse si riducono a ϑ_1, ϑ_2.
Per discutere la stabilità calcoliamo la derivata seconda di V:

$$V_{\vartheta\vartheta} = mgR\cos\vartheta + R^2(k_1 - k_2)(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \ .$$

Pertanto per $\vartheta = \vartheta_1$, si ha $V_{\vartheta\vartheta} = mgR + R^2(k_1 - k_2)$ e la posizione di equilibrio è stabile se $k_2 < k_1 + \frac{mg}{R}$.
Per $\vartheta = \vartheta_2$, $V_{\vartheta\vartheta} = -mgR + R^2(k_1 - k_2)$ ed è stabile se $k_1 > k_2 + \frac{mg}{R}$.
Per $\vartheta = \vartheta_3$ o $\vartheta = \vartheta_4$, si ha:

$$V_{\vartheta\vartheta} = \frac{m^2g^2 - R^2(k_1 - k_2)^2}{k_1 - k_2}$$

© 88-7999-464-6

e se $k_1 > k_2$ le posizioni di equilibrio sono instabili poiché per la condizione di esistenza deve risultare

$$mg \ \leq \ R(k_2 - k_1) \ .$$

3) Siano Q e S le proiezioni di P sull'asse delle ordinate e ascisse, rispettivamente; sia $\underline{\Phi}$ la reazione vincolare nel punto di contatto tra il punto P e la guida circolare. Per ritrovare l'equazione pura del moto, proiettiamo la prima equazione cardinale

$$m\underline{a}_P \ = \ \underline{\Phi} + m\underline{g} - k_1 \ QP - k_2 \ SP$$

lungo la direzione tangente alla guida, il cui versore è $\underline{t} = (\cos\vartheta, -\sin\vartheta)$.

Poiché l'accelerazione del punto P è data da

$$\underline{a}_P(R\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - R\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta, -R\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - R\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta) \ ,$$

si ha $\underline{a}_P \cdot \underline{t} = R\ddot{\vartheta}$ e quindi:

$$mR\ddot{\vartheta} = -mg\sin\vartheta - k_1 R\sin\vartheta\cos\vartheta + k_2 R\sin\vartheta\cos\vartheta \ ,$$

che coincide con l'equazione del moto trovata al punto 1).

4) Per determinare la reazione vincolare $\underline{\Phi}$ nella posizione di contatto tra il punto e la guida in corrispondenza della configurazione di equilibrio $\vartheta = 0$ con $\dot{\vartheta} = 0$, applichiamo la prima equazione cardinale, proiettata lungo la normale alla curva. Il versore normale è $\underline{n} = (-\sin\theta, -\cos\theta)$ e quindi si ottiene:

$$(\underline{\Phi} + m\underline{g} - k_1 \ QP - k_2 \ SP) \cdot \underline{n} \ = \ 0 \ ;$$

da tale relazione si ricava:

$$\Phi = mg - k_2 R \ .$$

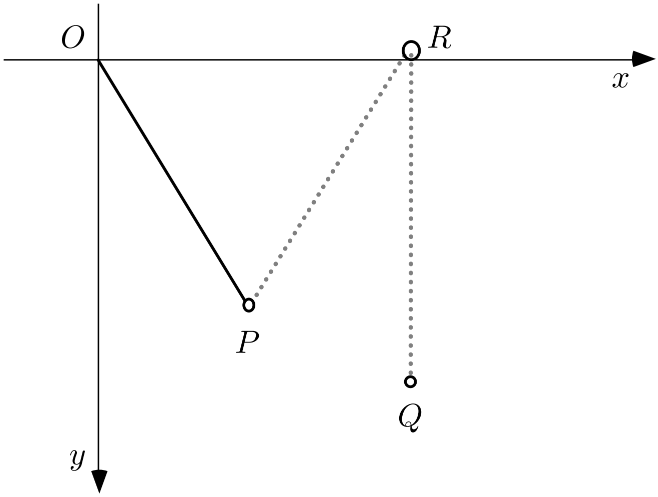
PV 13

Un'asta di massa trascurabile e lunghezza l ruota in un piano verticale con un estremo coincidente con l'origine del sistema di riferimento. All'altra estremità dell'asta è appeso un punto materiale P di massa m_1, al quale è collegato un filo inestensibile di lunghezza L_0. Il filo passa attraverso una carrucola posta nel punto $R(d, 0)$ e reca all'altra estremità un punto materiale Q di massa m_2.

1) Determinare il numero dei gradi di libertà del sistema;

2) scrivere la Lagrangiana;

3) determinare la tensione del filo nel punto Q.



1) Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale; tale coordinata individua la posizione del punto P. Inoltre, se L_0 è la lunghezza del filo, la distanza $|RQ|$ è

$$|RQ| = L_0 - |PR|$$

ed essendo

$$|PR|^2 = (d - l\sin\vartheta)^2 + (l\cos\vartheta)^2 = d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta \ ,$$

la distanza $|RQ|$ è determinata in funzione di ϑ. Pertanto le coordinate del punto Q sono:

$$Q\left(d, L_0 - \sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta}\right)$$

e l'unica coordinata indipendente è l'angolo ϑ.

2) Poiché

$$\underline{v}_P(l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$
$$\underline{v}_Q\left(0, \frac{dl\dot{\vartheta}\cos\vartheta}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta}}\right) \ ,$$

l'energia cinetica è data da:

$$T = \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m_2 d^2 l^2\dot{\vartheta}^2 \frac{\cos^2\vartheta}{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta} \ .$$

Inoltre, l'energia potenziale è data da:

$$V = -m_1 g l \cos\vartheta + m_2 g\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta} + \text{cost.}$$

Pertanto la Lagrangiana del sistema è:

$$\begin{aligned} L(\vartheta, \dot\vartheta) = {} & \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot\vartheta^2 + \frac{1}{2} m_2 d^2 l^2 \dot\vartheta^2 \frac{\cos^2\vartheta}{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta} \\ & + m_1 g l \cos\vartheta - m_2 g\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta}\ . \end{aligned}$$

3) Per determinare la tensione del filo $\underline{\tau}_Q$ nel punto Q, calcoliamo la prima equazione cardinale per il punto Q:

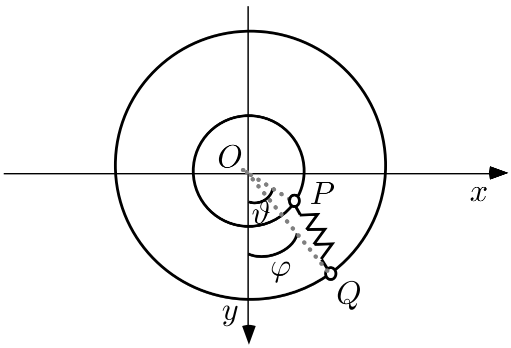
$$m_2 \underline{a}_Q \ = \ -\underline{\tau}_Q \ + \ m_2 \underline{g}\ ,$$

dove $\underline{a}_Q$ è l'accelerazione del punto Q. Pertanto si ha:

$$\tau_Q = m_2 g - m_2 \left(\frac{dl\ddot\vartheta\cos\vartheta - dl\dot\vartheta^2\sin\vartheta}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta}} + \frac{d^2 l^2 \dot\vartheta^2 \cos^2\vartheta}{(d^2 + l^2 - 2dl\sin\vartheta)^{3/2}} \right)\ .$$

Esercizi proposti

1) In un piano verticale, due punti P e Q di massa m sono vincolati a scorrere lungo due circonferenze concentriche di raggi R e r $(r < R)$. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$.
Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

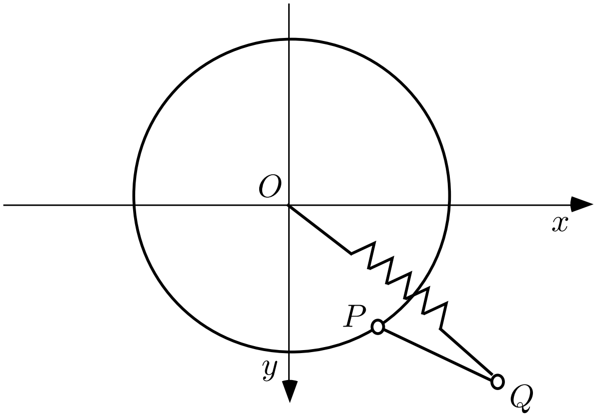


Soluzione: Le equazioni di Lagrange sono:

$$mr^2\ddot{\vartheta} = -mgr\sin\vartheta - kRr\sin(\vartheta - \varphi)$$
$$mr^2\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi + kRr\sin(\vartheta - \varphi)\ .$$

2) In un piano verticale, un punto materiale P di massa m puó scorrere lungo una circonferenza di raggio R; al punto P è appesa un'asta di lunghezza l e massa trascurabile, che reca all'altra estremitè un punto Q di massa m. Il punto Q è collegato all'origine della circonferenza tramite una molla di costante elastica $k > 0$.
Scrivere la Lagrangiana del sistema e determinare le posizioni di equilibrio.

ⓒ88-7999-464-6



Soluzione: Siano ϑ e φ gli angoli che OP e PQ rispettivamente formano con la verticale. La Lagrangiana del sistema risulta essere:

$$\begin{aligned} L(\dot\vartheta, \dot\varphi, \vartheta, \varphi) = {}& mR^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + mRl\cos(\vartheta - \varphi)\dot\vartheta\dot\varphi \\ & + 2mgR\cos\vartheta + mgl\cos\varphi - kRl\cos(\vartheta - \varphi) \ . \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono soluzioni del sistema:

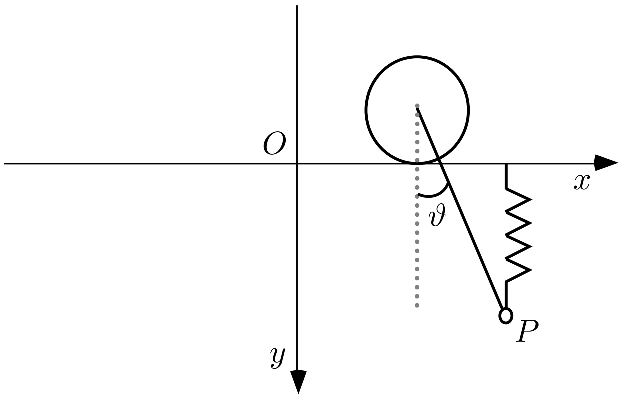
$$\begin{aligned} 2mgR\sin\vartheta - kRl\sin(\vartheta - \varphi) = 0 \\ mgl\sin\varphi + kRl\sin(\vartheta - \varphi) = 0 \ . \end{aligned}$$

In particolare si ottengono le posizioni di equilibrio:

$$(\vartheta, \varphi) = (0, 0),\ (0, \pi),\ (\pi, 0),\ (\pi, \pi) \ .$$

3) In un piano verticale, un disco di raggio $R > 0$ e massa trascurabile ruota senza strisciare lungo l'asse orizzontale. Al centro del disco è collegata un'asta di lunghezza $l > 0$; all'altra estremità dell'asta è posto un punto materiale P di massa m, collegato all'asse delle ascisse tramite una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale.
a) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
b) determinare le posizioni di equilibrio;
c) discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare dei parametri del sistema.

ⓒ 88-7999-464-6



Soluzione:
a) Sia x l'ascissa del centro del disco e ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale. La Lagrangiana del sistema è:

$$L(\dot{x}, \dot{\vartheta}, x, \vartheta) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + mgl\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(l\cos\vartheta - R)^2 \ .$$

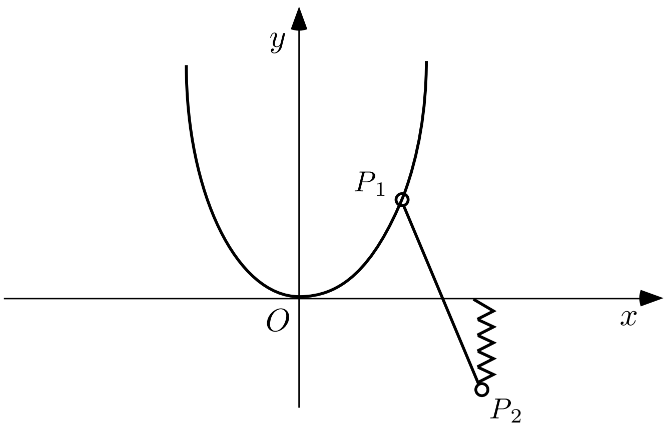
b) Le posizioni di equilibrio non dipendono dalla coordinata x:

$$V_\vartheta = mgl\sin\vartheta - k(l\cos\vartheta - R)l\sin\vartheta = 0 \ ,$$

le cui soluzioni sono $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$ e $\vartheta_{3,4} = \pm\arccos\frac{mg+kR}{kl}$ se $mg + kR \leq kl$.
c) Se $mg > k(l - R)$, allora ϑ_1 è stabile; ϑ_2 è un punto di equilibrio instabile; se $mg + kR < kl$, i punti ϑ_3 e ϑ_4 sono di equilibrio stabili.

4) In un piano verticale (Oxy) un punto P_1 di massa m è vincolato a scorrere lungo una parabola di equazione $y = \frac{x^2}{2}$. In P_1 è appesa un'asta di massa trascurabile e lunghezza l, che reca all'altra estremità un punto P_2 di massa m, il quale è collegato all'asse delle ascisse tramite una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema.

ⓒ88-7999-464-6



Soluzione: Sia ϑ l'angolo che l'asta P_1P_2 forma con l'asse verticale. Le coordinate Lagrangiane sono x e ϑ. La Lagrangiana del sistema è data da:

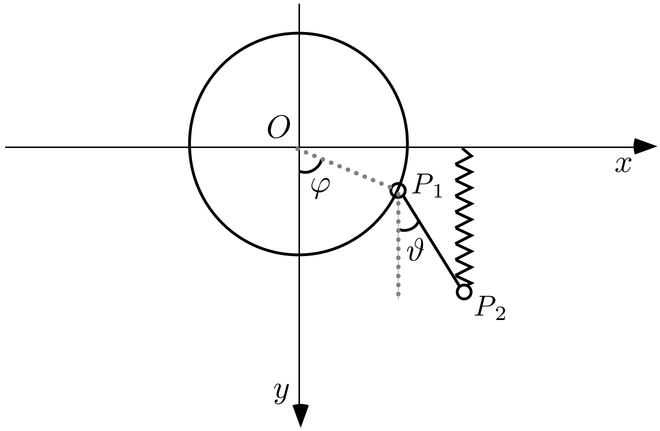
$$L(\dot{x},\dot{\vartheta},x,\vartheta) = m\dot{x}^2(1+x^2) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml\cos\vartheta\dot{x}\dot{\vartheta} + ml\sin\vartheta x\dot{x}\dot{\vartheta}$$
$$- mgx^2 + mgl\cos\vartheta - \frac{k}{2}(\frac{x^2}{2} - l\cos\vartheta)^2 \ .$$

Le equazioni di Lagrange sono:

$$2m\ddot{x}(1+x^2) + 2mx\dot{x}^2 + ml\ddot{\vartheta}(\cos\vartheta + x\sin\vartheta) + ml\dot{\vartheta}^2(x\cos\vartheta - \sin\vartheta) =$$
$$- 2mgx - kx(\frac{x^2}{2} - l\cos\vartheta)$$
$$ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}(\cos\vartheta + x\sin\vartheta) + ml\dot{x}^2\sin\vartheta =$$
$$- mgl\sin\vartheta - kl\sin\vartheta(\frac{x^2}{2} - l\cos\vartheta) \ .$$

5) In un piano verticale (Oxy) un punto P_1 di massa m è vincolato a scorrere lungo una circonferenza di raggio R ed è collegato tramite un'asta di massa trascurabile e lunghezza l ad un altro punto P_2 di massa m. Il secondo punto è collegato all'asse delle ascisse tramite una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale.
a) Determinare la Lagrangiana del sistema.
b) Calcolare le posizioni di equilibrio.
c) Determinare sotto quali condizioni sui parametri le posizioni di equilibrio $(\varphi,\vartheta) = (0,0)$ e $(\varphi,\vartheta) = (0,\pi)$ sono stabili.

© 88-7999-464-6



Soluzione: a) La Lagrangiana del sistema è:

$$L(\dot\varphi, \dot\vartheta, \varphi, \vartheta) = mR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta^2 + mRl\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)$$
$$+ 2mgR\cos\varphi + mgl\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(R\cos\varphi + l\cos\vartheta)^2 \ .$$

b) Le posizioni di equilibrio sono soluzioni del sistema:

$$V_\varphi = 2mgR\sin\varphi - kR\sin\varphi(R\cos\varphi + l\cos\vartheta) = 0$$
$$V_\vartheta = mgl\sin\vartheta - kl\sin\vartheta(R\cos\varphi + l\cos\vartheta) = 0 \ .$$

In particolare, si hanno i seguenti punti di equilibrio: $(\varphi, \vartheta) = (0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π), $(0, \pm\arccos((mg - kR)/kl))$ (se $|(mg - kR)/kl| \leq 1$), $(\pi, \pm\arccos((mg + kR)/kl))$ (se vale $(mg + kR)/kl \leq 1$), $(\pm\arccos((2mg - kl)/kR), 0)$ (se vale $|(2mg - kl)/kR)| \leq 1$, $(\pm\arccos((2mg + kl)/kR), \pi)$ (se $(2mg + kl)/kR \leq 1$).

c) Affinché la posizione di equilibrio $(\varphi, \vartheta) = (0, 0)$ sia stabile, deve risultare:

$$2mgR - kR(R + l) > 0$$
$$mgl - kl(R + l) > 0$$

ossia $mg > k(R + l)$. Affinchè la posizione di equilibrio $(\varphi, \vartheta) = (0, \pi)$ sia stabile deve essere:

$$2mgR - kR(R - l) > 0$$
$$-mgl + kl(R - l) > 0$$

ossia $\frac{k}{2}(R - l) < mg < k(R - l)$.

Capitolo 3
Piccole oscillazioni

• Consideriamo un sistema olonomo a vincoli fissi e bilateri, con n gradi di libertà. Supponiamo che la sollecitazione attiva agente sul sistema sia conservativa (con energia potenziale $V = V(\underline{x})$). Sia $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$ una posizione di equilibrio stabile. Introduciamo come nuove coordinate le *deviazioni* $\underline{\xi}$ dalla posizione di equilibrio:

$$\underline{\xi} \;=\; \underline{x} - \overline{\underline{x}} \; .$$

Sia

$$T(\underline{\dot{x}}, \underline{x}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} \tilde{a}_{hk}(\underline{x}) \dot{x}_h \dot{x}_k$$

l'energia cinetica del sistema; sviluppiamo T nell'intorno di $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$. Posto $a_{hk} \equiv \tilde{a}_{hk}(\overline{\underline{x}})$, l'energia cinetica di piccole oscillazioni è:

$$T_{po}(\underline{\dot{\xi}}) \;=\; \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k \; ;$$

definiamo la matrice A come

$$A \equiv (a_{hk})_{h,k=1\ldots n} \; .$$

Sviluppiamo (al secondo ordine) l'energia potenziale nell'intorno di $\underline{x} = \overline{\underline{x}}$:

$$V(\underline{x}) = V(\overline{\underline{x}}) + V'(\overline{\underline{x}})\underline{\xi} + \frac{1}{2} V''(\overline{\underline{x}})\underline{\xi}^2 \; ;$$

poiché $V(\overline{\underline{x}})$ è costante e $V'(\overline{\underline{x}}) = 0$ (essendo $\overline{\underline{x}}$ posizione di equilibrio), possiamo limitarci a considerare il termine di secondo grado:

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} V''(\overline{\underline{x}})\underline{\xi}^2 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} c_{hk} \xi_h \xi_k \; ,$$

ⓒ88-7999-464-6

dove la matrice C è definita come segue:

$$C \equiv (c_{hk})_{h,k=1\dots n} = \left(\frac{\partial^2 V(\underline{\overline{x}})}{\partial x_h \partial x_k} \right) \ .$$

Introduciamo la Lagrangiana delle piccole oscillazioni:

$$L(\underline{\xi}, \underline{\dot{\xi}}) = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{n} \left(a_{hk} \dot{\xi}_h \dot{\xi}_k - c_{hk} \xi_h \xi_k \right) \ .$$

Le corrispondenti equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_h} - \frac{\partial L}{\partial \xi_h} = 0 \ , \qquad h = 1, ..., n \ ,$$

diventano

$$\sum_{k=1}^{n} \left(a_{hk} \ddot{\xi}_k + c_{hk} \xi_k \right) \ = \ 0 \ , \qquad h = 1, ..., n \ . \qquad (C)$$

Tale sistema ammette soluzioni non banali se

$$\det(C - \lambda A) \ = \ 0 \ ,$$

dove gli autovalori λ_1,...,λ_n sono reali e positivi, poiché le matrici A e C sono simmetriche e definite positive. Le quantità

$$\omega_j \ = \ \sqrt{\lambda_j} \ , \qquad j = 1, ..., n$$

si chiamano *frequenze proprie di piccole oscillazioni.*

• **Coordinate normali:** Siano $\underline{u}_1$,...,$\underline{u}_n$ gli autovettori associati agli autovalori λ_1,...,λ_n:

$$(C - \lambda_j A) \ \underline{u}_j \ = \ 0 \ , \qquad j = 1, ..., n \ .$$

Imponiamo la condizione di ortonormalità:

$$\underline{u}_i \cdot A \underline{u}_j \ = \ \delta_{ij} \ , \qquad i, j = 1, ..., n \ .$$

Sia $U = (u_{jk})_{j,k=1\dots n}$ la matrice formata dalle componenti degli autovettori $\underline{u}_j$; possiamo riscrivere la condizione di ortonormalità nella forma

$$U^T A U \ = \ I \ ,$$

da cui si ricava:

$$U^{-1} \ = \ U^T A \ .$$

Inoltre si ha la relazione

$$U^T C U \ = \ L \ ,$$

© 88-7999-464-6

dove L è la matrice diagonale le cui componenti sono gli autovalori λ_j. Introducendo le *coordinate normali* (o “modi normali”)

$$\underline{y} \;=\; U^{-1}\underline{\xi} \;,$$

si ottengono le relazioni

$$\ddot{y}_j + \lambda_j y_j \;=\; 0 \;, \qquad j = 1, ..., n \;. \tag{y}$$

Infatti, riscrivendo la (C) nella forma

$$A\underline{\ddot{\xi}} \;+\; C\underline{\xi} \;=\; \underline{0} \;,$$

si ha:

$$U^T A\underline{\ddot{\xi}} + U^T C\underline{\xi} = U^{-1}\underline{\ddot{\xi}} + LU^{-1}\underline{\xi} = \underline{\ddot{y}} + L\underline{y} = 0 \;.$$

Le soluzioni delle (y) sono:

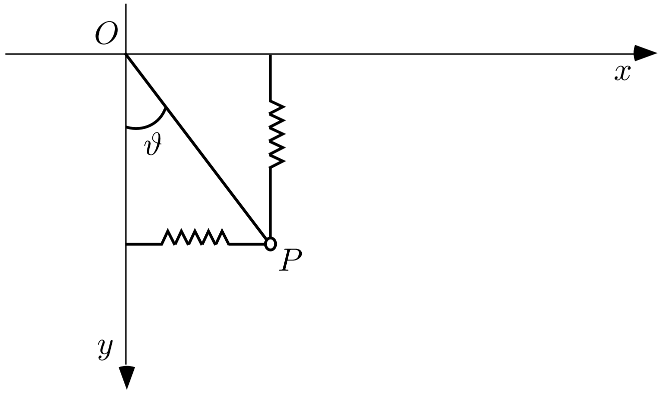
$$y_j(t) \;=\; \alpha\cos(\sqrt{\lambda_j}t + \beta) \;= \alpha\cos(\omega_j t + \beta) \;,$$

con α, β costanti.

PO 1

Un'asta di lunghezza l e massa trascurabile è vincolata a ruotare attorno all'origine di un sistema di riferimento verticale, con una delle estremità coincidente con l'origine. All'altra estremità dell'asta è situato un punto materiale P di massa m, collegato agli assi cartesiani tramite due molle di costanti k_1 e k_2 vincolate a rimanere, rispettivamente, orizzontale e verticale.

Nell'ipotesi $mg > (k_2 - k_1)l > 0$, determinare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale. Poiché $P(x_P, y_P) = (l \sin\vartheta, l\cos\vartheta)$, l'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k_1 x_P^2 + \frac{1}{2}k_2 y_P^2 - mgy_P \\ &= \frac{1}{2}k_1 l^2 \sin^2\vartheta + \frac{1}{2}k_2 l^2 \cos^2\vartheta - mgl\cos\vartheta \ . \end{aligned}$$

Pertanto determiniamo le posizioni di equilibrio annullando la derivata di V:

$$V_\vartheta = (k_1 - k_2)l^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + mgl\sin\vartheta = 0$$

ossia $\sin\vartheta = 0$, che ha soluzioni $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$, $\cos\vartheta = -\frac{mg}{(k_1-k_2)l}$. Poiché si assume $mg \geq (k_1 - k_2)l$, non esistono altre soluzioni oltre 0 e π.
La derivata seconda di V è:

$$V_{\vartheta\vartheta} = [(k_1 - k_2)l^2\cos\vartheta + mgl]\cos\vartheta + (k_2 - k_1)l^2\sin^2\vartheta \ .$$

Pertanto:

$$V_{\vartheta\vartheta}(0) = (k_1 - k_2)l^2 + mgl$$

e la posizione $\vartheta_1 = 0$ è di equilibrio stabile, poiché abbiamo supposto $mg \geq (k_2 - k_1)l$.
Per $\vartheta_2 = \pi$, si ha $V_{\vartheta\vartheta} = (k_1 - k_2)l^2 - mgl$ ed è quindi instabile.

Per determinare la frequenza di piccole oscillazioni attorno a $\vartheta_1 = 0$, calcoliamo l'energia cinetica: il quadrato del modulo della velocità di P è $v_P^2 = l^2\dot\vartheta^2$ e quindi:

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta^2 \ .$$

Pertanto, la frequenza di piccole oscillazioni ω è soluzione dell'equazione:

$$mgl + (k_1 - k_2)l^2 - ml^2\omega^2 \ = \ 0$$

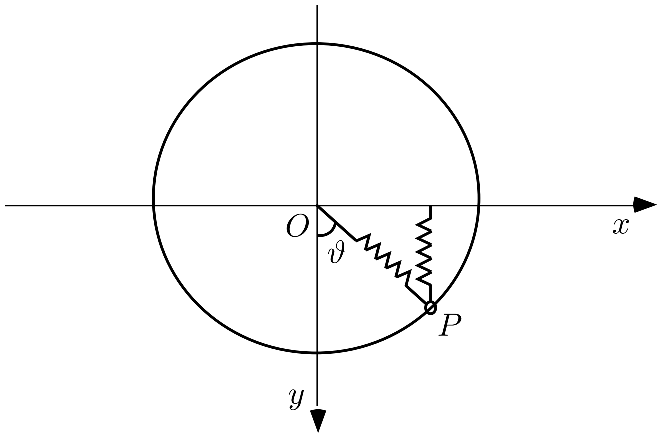
ossia

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{mg + (k_1 - k_2)l}{ml}} \ .$$

PO 2

In un piano verticale (Oxy) un punto P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito lungo una circonferenza di raggio R. Il punto è collegato all'origine da una molla di costante elastica $k > 0$ e all'asse x tramite una seconda molla (sempre di costante elastica k), che si mantiene verticale. Sia ϑ l'angolo che OP forma con la verticale; se $mg > kR$, calcolare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

© 88-7999-464-6



Poiché $P(x_P, y_P) = (R\sin\vartheta, R\cos\vartheta)$, la velocità è $\underline{v}_P(R\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ e quindi l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 \ .$$

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_P + \frac{1}{2}k|OP|^2 + \frac{1}{2}ky_P^2 \\ &= -mgR\cos\vartheta + \frac{1}{2}kR^2 + \frac{1}{2}kR^2\cos^2\vartheta \ . \end{aligned}$$

Poiché

$$V_\vartheta = mgR\sin\vartheta - kR^2\sin\vartheta\cos\vartheta \ ,$$

le posizioni di equilibrio sono $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \pi$, $\vartheta_3 = \arccos\frac{mg}{kR}$, $\vartheta_4 = -\vartheta_3$. Le ultime due configurazioni non esistono poiché dovrebbe essere verificata la relazione $mg \leq kR$, che contraddice l'ipotesi. Discutiamo la stabilità di tali posizioni:

$$V_{\vartheta\vartheta} = mgR\cos\vartheta - kR^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

e quindi per $\vartheta = \vartheta_1$, $V_{\vartheta\vartheta} = -kR^2 + mgR$ e tale posizione è stabile se $mg > kR$; per $\vartheta = \vartheta_2$, $V_{\vartheta\vartheta} = -kR^2 - mgR < 0$ e quindi tale posizione è sempre instabile.

La frequenza ω di piccole oscillazioni attorno alla posizione $\vartheta = \vartheta_1 = 0$ è quindi soluzione di

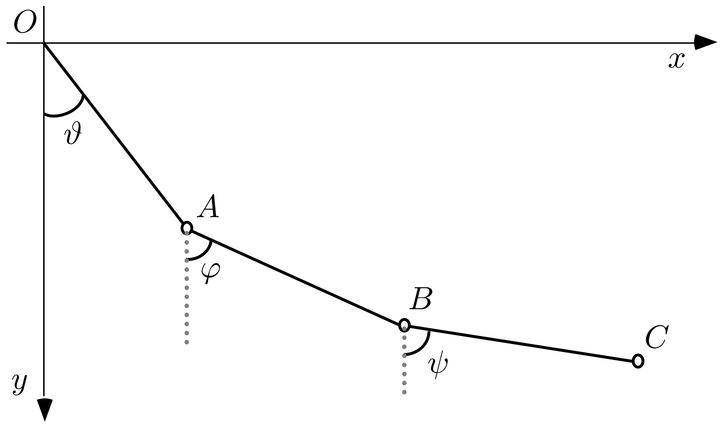
$$mgR - kR^2 - mR^2\omega^2 = 0$$

ossia

$$\omega \ \equiv \ \pm\sqrt{\frac{mg - kR}{mR}} \ .$$

PO 3

Tre aste (OA, AB, BC) di lunghezza l e massa trascurabile sono collegate tra loro nei punti A e B, mentre O coincide con l'origine di un sistema di riferimento in un piano verticale. In A, B, C si trovano tre punti materiali di massa m. Detti ϑ, φ, ψ, gli angoli che le tre aste formano con la verticale, determinare l'equazione secolare delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Le coordinate dei punti A, B, C sono:

$$\begin{aligned}
A(x_A, y_A) &= (l\sin\vartheta, l\cos\vartheta)\\
B(x_B, y_B) &= (l\sin\vartheta + l\sin\varphi, l\cos\vartheta + l\cos\varphi)\\
C(x_C, y_C) &= (l\sin\vartheta + l\sin\varphi + l\sin\psi, l\cos\vartheta + l\cos\varphi + l\cos\psi)
\end{aligned}$$

e quindi l'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned}
V &= -mg(y_A + y_B + y_C)\\
&= -mgl(3\cos\vartheta + 2\cos\varphi + \cos\psi)\ .
\end{aligned}$$

Poiché

$$V_\vartheta = 3mgl\sin\vartheta, \quad V_\varphi = 2mgl\sin\varphi, \quad V_\psi = mgl\sin\psi\ ,$$

le possibili posizioni di equilibrio sono $(\vartheta, \varphi, \psi) = (0,0,0)$, $(0,0,\pi)$, $(0,\pi,0)$, $(\pi,0,0)$, $(0,\pi,\pi)$, $(\pi,0,\pi)$, $(\pi,\pi,0)$, (π,π,π). Poiché l'Hessiano di V vale:

$$\begin{pmatrix} 3mgl\cos\vartheta & 0 & 0\\ 0 & 2mgl\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & mgl\cos\psi \end{pmatrix}\ ,$$

solo la posizione $(\vartheta, \varphi, \psi) = (0,0,0)$ è stabile.

© 88-7999-464-6

Calcoliamo ora l'energia cinetica: le velocità dei tre punti sono

$$\underline{v}_A(l\dot\vartheta\cos\vartheta, -l\dot\vartheta\sin\vartheta)$$
$$\underline{v}_B(l\dot\vartheta\cos\vartheta + l\dot\varphi\cos\varphi, -l\dot\vartheta\sin\vartheta - l\dot\varphi\sin\varphi)$$
$$\underline{v}_C(l\dot\vartheta\cos\vartheta + l\dot\varphi\cos\varphi + l\dot\psi\cos\psi, -l\dot\vartheta\sin\vartheta - l\dot\varphi\sin\varphi - l\dot\psi\sin\psi)$$

e quindi

$$\begin{aligned} v_A^2 &= l^2\dot\vartheta^2 \\ v_B^2 &= l^2\dot\vartheta^2 + l^2\dot\varphi^2 + 2l^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \\ v_C^2 &= l^2\dot\vartheta^2 + l^2\dot\varphi^2 + l^2\dot\psi^2 + 2l^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \\ &\quad + 2l^2\dot\vartheta\dot\psi\cos(\vartheta-\psi) + 2l^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)\ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} T = \frac{1}{2}m[&3l^2\dot\vartheta^2 + 2l^2\dot\varphi^2 + l^2\dot\psi^2 + 4l^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \\ &+ 2l^2\dot\vartheta\dot\psi\cos(\vartheta-\psi) + 2l^2\dot\varphi\dot\psi\cos(\varphi-\psi)]\ . \end{aligned}$$

Pertanto la matrice di piccole oscillazioni relativa all'energia cinetica è:

$$\begin{pmatrix} 3ml^2 & 2ml^2 & ml^2 \\ 2ml^2 & 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 & ml^2 \end{pmatrix}\ .$$

Infine, l'equazione secolare è data dalla seguente espressione: posto $\alpha = mgl$ e $\beta = ml^2$

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} 3\alpha-3\beta\lambda & -2\beta\lambda & -\beta\lambda \\ -2\beta\lambda & 2\alpha-2\beta\lambda & -\beta\lambda \\ -\beta\lambda & -\beta\lambda & \alpha-\beta\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\beta^3\lambda^3 + 9\alpha\beta^2\lambda^2 - 18\alpha^2\beta\lambda + 6\alpha^3 = 0\ . \end{aligned}$$

PO 4

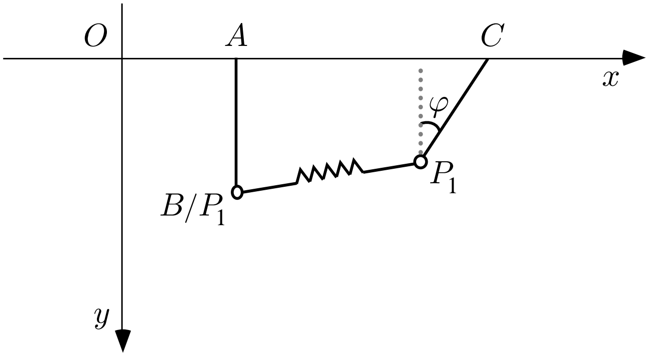
Un'asta AB di lunghezza l e massa trascurabile ha l'estremo A che può scorrere lungo l'asse delle ascisse di un piano verticale ed è vincolata a rimanere sempre parallela all'asse y; in B si trova un punto materiale P_1 di massa m_1. Una seconda asta di lunghezza l e massa trascurabile ha un estremo vincolato nel punto di coordinate $C(d,0)$ e reca all'estremità libera un punto P_2 di massa m_2. I due punti materiali sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$.

1) Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

2) calcolare la frequenza di piccole oscillazioni nel caso $m_1 = m_2 = m$;

ⓒ88-7999-464-6

3) calcolare i modi normali nel caso $mg = kl$.



1) Sia x l'ascissa del punto di applicazione A della prima asta e φ l'angolo che la seconda asta forma con la verticale. Le coordinate dei punti P_1 e P_2 sono:

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= (x, l) \\ P_2(x_2, y_2) &= (d - l\sin\varphi, l\cos\varphi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= (x - d + l\sin\varphi)^2 + (l - l\cos\varphi)^2 \\ &= x^2 - 2dx + 2xl\sin\varphi - 2dl\sin\varphi - 2l^2\cos\varphi + d^2 + 2l^2 \ . \end{aligned}$$

Pertanto l'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned} V &= -m_1gy_1 - m_2gy_2 + \frac{1}{2}k|P_1P_2|^2 \\ &= -m_2gl\cos\varphi + \frac{1}{2}k(x^2 - 2dx + 2xl\sin\varphi - 2dl\sin\varphi - 2l^2\cos\varphi) + \text{cost.} \end{aligned}$$

Quindi le derivate prime sono:

$$\begin{cases} V_x = k(x - d + l\sin\varphi) = 0 \\ \\ V_\varphi = m_2gl\sin\varphi + k(xl\cos\varphi - dl\cos\varphi + l^2\sin\varphi) = 0 \end{cases}$$

e le posizioni di equilibrio sono

$$(x_1, \varphi_1) = (d, 0), \quad (x_2, \varphi_2) = (d, \pi) \ ,$$

mentre la soluzione $\cos\overline{\varphi} = \frac{m_2gl+kl^2}{kl^2} = 1 + \frac{m_2g}{kl}$, $x = d - l\sin\overline{\varphi}$ è palesemente inaccettabile.

Per quanto riguarda la stabilità calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{cases} V_{xx} = k \\ V_{x\varphi} = V_{\varphi x} = kl\cos\varphi \\ V_{\varphi\varphi} = m_2 gl\cos\varphi + k(-xl\sin\varphi + dl\sin\varphi + l^2\cos\varphi) \ . \end{cases}$$

Pertanto l'hessiano di V calcolato in $(x_1, \varphi_1) = (d, 0)$ è:

$$C_1 = \begin{pmatrix} k & kl \\ kl & m_2 gl + kl^2 \end{pmatrix} \ ,$$

la cui traccia è positiva e il cui determinante vale $m_2 gkl > 0$. Pertanto la posizione (x_1, φ_1) è stabile. Riguardo la seconda posizione di equilibrio $(x_2, \varphi_2) = (d, \pi)$, si ha:

$$C_2 = \begin{pmatrix} k & -kl \\ -kl & -m_2 gl - kl^2 \end{pmatrix}$$

e poiché il determinante vale $-m_2 gkl - 2k^2l^2 < 0$, la posizione di equilibrio è instabile.

2) Le velocità dei due punti sono:

$$\underline{v}_1(\dot{x}, 0), \quad \underline{v}_2(-l\dot{\varphi}\cos\varphi, -l\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

e quindi l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 \ ;$$

dunque, la matrice di piccole oscillazioni associata all'energia cinetica è:

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 l^2 \end{pmatrix}$$

e le frequenze di piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione $\det(C_1 - \lambda A) = 0$ ossia

$$\det\begin{pmatrix} k - m_1\lambda & kl \\ kl & m_2 gl + kl^2 - m_2 l^2\lambda \end{pmatrix}$$
$$= m_1 m_2 l^2\lambda^2 - (m_1 m_2 gl + m_1 kl^2 + m_2 kl^2)\lambda + m_2 gkl = 0 \ .$$

Pertanto per $m_1 = m_2 = m$, si ottiene:

$$\lambda_{1,2} = \frac{mgl + 2kl^2 \pm \sqrt{m^2g^2l^2 + 4k^2l^4}}{2ml^2}$$

e le frequenze proprie sono le radici quadrate di λ_1 e λ_2.

3) Per $mg = kl$, si ha

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m} ,$$

mentre le matrici C_1 e A diventano

$$C_1 = \begin{pmatrix} k & kl \\ kl & 2kl^2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & ml^2 \end{pmatrix} .$$

Calcoliamo gli autovettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ soluzioni di $(C_1 - \lambda_1 A)\underline{u} = 0$, $(C_1 - \lambda_2 A)\underline{v} = 0$. Nel primo caso si ha:

$$\begin{pmatrix} k - \frac{3+\sqrt{5}}{2}k & kl \\ kl & 2kl^2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} -\frac{1+\sqrt{5}}{2}u_1 + lu_2 = 0 \\ \\ lu_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}l^2 u_2 = 0 \ ; \end{cases}$$

lasciando arbitrario il valore di u_1 si ha:

$$u_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2l} u_1 .$$

Analogamente, per il vettore $\underline{v}$ si trova:

$$\begin{pmatrix} k - \frac{3-\sqrt{5}}{2}k & kl \\ kl & 2kl^2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}kl^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{cases} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}v_1 + lv_2 = 0 \\ \\ lv_1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}l^2 v_2 = 0 \ ; \end{cases}$$

lasciando arbitrario il valore di v_1 si ha:

$$v_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2l} v_1 .$$

Imponiamo ora le condizioni di ortonormalità:

$$\underline{u} \cdot A\underline{v} = 0 \ , \quad \underline{u} \cdot A\underline{u} = 1 \ , \quad \underline{v} \cdot A\underline{v} = 1 \ .$$

La prima relazione è banalmente verificata; dalla seconda relazione si ricava:

$$m \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2l} u_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{\sqrt{5}+1}{2l} u_1 \end{pmatrix} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} m u_1^2 = 1$$

ⓒ 88-7999-464-6

ossia

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}m}}$$

e quindi

$$u_2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{ml^2}} \ .$$

Analogamente si trova:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}m}}$$

e

$$v_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{ml^2}} \ .$$

Pertanto la matrice U è:

$$U \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}m}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}m}} \\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\frac{1}{ml^2}} & -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\frac{1}{ml^2}} \end{pmatrix} \ ,$$

la cui inversa si ottiene dalla relazione $U^{-1} = U^T A$ ossia

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}} & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}ml^2} \\ \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} & -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}ml^2} \end{pmatrix} \ .$$

Pertanto, introdotte le deviazioni (ξ_1, ξ_2) dalle posizioni di equilibrio, i modi normali sono dati da $\underline{y} = U^{-1}\underline{\xi}$ ossia

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}\ \xi_1 + \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}ml^2}\ \xi_2 \\ y_2 = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}\ \xi_1 - \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}ml^2}\ \xi_2 \ . \end{cases}$$

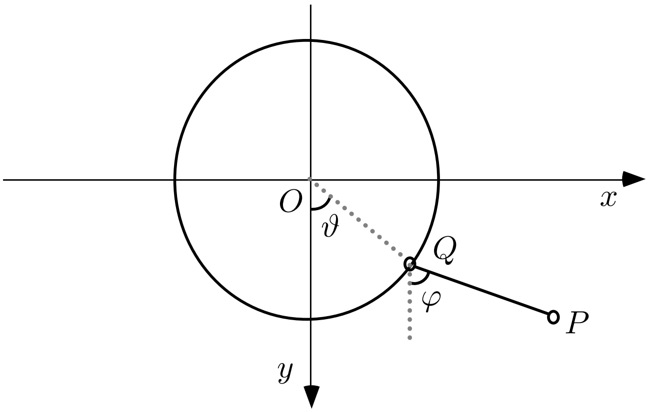
PO 5

Un'asta (PQ) di lunghezza l e massa trascurabile ha un estremo vincolato a scorrere senza attrito lungo una circonferenza di raggio R in un piano verticale; agli estremi Q e P dell'asta sono posti due punti materiali di massa m. Siano ϑ e φ gli angoli che le direzioni OQ e QP formano con la verticale.

1) Determinare le posizioni di equilibrio stabile;

ⓒ88-7999-464-6

2) calcolare le frequenze proprie di piccole oscillazioni;
3) nel caso $R = \sqrt{3}l$, determinare i modi normali.



1) Le coordinate dei punti Q e P sono:

$$\begin{aligned} Q(x_Q, y_Q) &= (R\sin\vartheta, R\cos\vartheta) \\ P(x_P, y_P) &= (R\sin\vartheta + l\sin\varphi, R\cos\vartheta + l\cos\varphi) \end{aligned} .$$

L'energia potenziale è:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_Q - mgy_P \\ &= -mg(2R\cos\vartheta + l\cos\varphi) \ . \end{aligned}$$

Pertanto, calcoliamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} V_\vartheta = 2mgR\sin\vartheta = 0 \\ \\ V_\varphi = mgl\sin\varphi = 0 \ , \end{cases}$$

e quindi le soluzioni di equilibrio sono $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 0)$, (π, π). Per discutere la stabilità calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{cases} V_{\vartheta\vartheta} = 2mgR\cos\vartheta \\ \\ V_{\vartheta\varphi} = V_{\varphi\vartheta} = 0 \\ \\ V_{\varphi\varphi} = mgl\cos\varphi \end{cases}$$

e quindi soltanto la posizione $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è di equilibrio stabile.

2) Per calcolare le frequenze proprie determiniamo l'energia cinetica; poiché

le velocità dei due punti sono

$$\underline{v}_Q = (R\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta), \quad \underline{v}_P = (R\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l\dot{\varphi}\cos\varphi, -R\dot{\vartheta}\sin\vartheta - l\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

ossia

$$v_Q^2 = R^2\dot{\vartheta}^2, \qquad v_P^2 = R^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2Rl\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) \ ,$$

l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}m(2R^2\dot{\vartheta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 + 2Rl\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)) \ .$$

Poniamo:

$$C = \begin{pmatrix} 2mgR & 0 \\ 0 & mgl \end{pmatrix} \ , \qquad A = \begin{pmatrix} 2mR^2 & mRl \\ mRl & ml^2 \end{pmatrix} \ ;$$

le frequenze proprie sono le radici quadrate delle soluzioni dell'equazione:

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda A) &= m \begin{pmatrix} 2gR - 2R^2\lambda & -Rl\lambda \\ -Rl\lambda & gl - l^2\lambda \end{pmatrix} \\ &= m(R^2l^2\lambda^2 - 2glR(R+l)\lambda + 2g^2Rl) = 0 \end{aligned}$$

ossia

$$\lambda_{1,2} = \frac{g(R+l) \pm g\sqrt{R^2 + l^2}}{Rl} \ .$$

3) Se $R = \sqrt{3}l$, allora

$$\lambda_1 = (1 + \sqrt{3})\frac{g}{l} \qquad \lambda_2 = (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})\frac{g}{l}$$

e calcoliamo gli autovettori associati alle equazioni $(C - \lambda_1 A)\underline{u} = 0$, $(C - \lambda_2 A)\underline{v} = 0$. Si ha:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}mgl - 6mgl(1+\sqrt{3}) & -mgl(1+\sqrt{3})\sqrt{3} \\ -mgl(1+\sqrt{3})\sqrt{3} & mgl - mgl(1+\sqrt{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= -mgl \begin{pmatrix} 6 + 4\sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

e lasciando u_1 arbitrario si trova:

$$u_2 = -(1 + \sqrt{3})u_1 \ .$$

Analogamente per $\underline{v}$:

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}mgl - 6mgl(1-\frac{\sqrt{3}}{3}) & -mgl(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\sqrt{3} \\ -mgl(1-\frac{\sqrt{3}}{3})\sqrt{3} & mgl - mgl(1-\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= mgl \begin{pmatrix} 4\sqrt{3}-6 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

e lasciando v_1 arbitrario si ha:

$$v_2 = (3-\sqrt{3})v_1 \ .$$

Imponiamo le condizioni di ortonormalità

$$\underline{u} \cdot A\underline{v} = 0 \ , \quad \underline{u} \cdot A\underline{u} = 1 \ , \quad \underline{v} \cdot A\underline{v} = 1 \ .$$

Si verifica facilmente che la prima relazione è soddisfatta; dalla seconda condizione si ottiene:

$$u_1 = \frac{1}{2\sqrt{m}\ l} \ ,$$

mentre dalla terza condizione si ha:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{12m}\ l} \ .$$

Pertanto si trova:

$$u_2 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{m}\ l}, \qquad v_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{12m}\ l} \ .$$

Quindi la matrice U è data da:

$$U = \frac{1}{\sqrt{m}\ l} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \end{pmatrix} \ .$$

Determiniamo l'inversa di U dalla relazione $U^{-1} = U^T A$ ossia

$$U^{-1} = \sqrt{m}\ l \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Dunque, introducendo le deviazioni $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ dalla posizione di equilibrio, i modi normali si ottengono tramite la relazione $\underline{\eta} = U^{-1}\underline{\xi}$ ossia

$$\begin{cases} \eta_1 = \sqrt{m}\ l(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2) \\ \eta_2 = \sqrt{m}\ l(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\xi_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\xi_2). \end{cases}$$

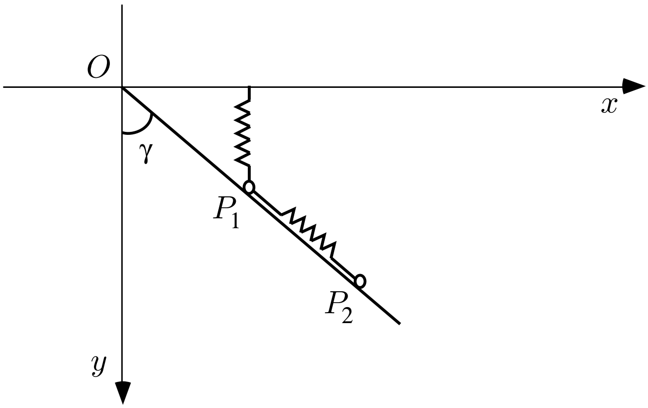
PO 6

Due punti materiali P_1 e P_2 di massa m possono scorrere senza attrito lungo una guida inclinata di angolo costante γ rispetto all'asse delle y di un sistema di riferimento in un piano verticale. Il primo punto è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$ che si mantiene sempre verticale e i due punti sono ulteriormente collegati da una molla, sempre di costante elastica k. Sia s_1 l'ascissa del primo punto lungo la guida, contata a partire dall'origine del sistema di riferimento. Sia s_2 la distanza tra i due punti.

1) Determinare la Lagrangiana di piccole oscillazioni del sistema;

2) calcolare le frequenze di piccole oscillazioni;

3) nel caso $\gamma = \frac{\pi}{4}$, calcolare i modi normali.



1) Le coordinate dei punti P_1 e P_2 sono:

$$P_1(x_1, y_1) = (s_1 \sin\gamma, s_1 \cos\gamma)$$
$$P_2(x_2, y_2) = ((s_1 + s_2)\sin\gamma, (s_1 + s_2)\cos\gamma)$$

e quindi

$$\underline{v}_1(\dot{s}_1 \sin\gamma, \dot{s}_1 \cos\gamma), \quad \underline{v}_2((\dot{s}_1 + \dot{s}_2)\sin\gamma, (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)\cos\gamma)$$

ossia

$$v_1^2 = \dot{s}_1^2, \qquad v_2^2 = (\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2 \ .$$

Pertanto l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} m(2\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2 + 2\dot{s}_1\dot{s}_2) \ .$$

L'energia potenziale è:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}ky_1^2 + \frac{1}{2}k|P_1 - P_2|^2 \\ &= -2mgs_1 \cos\gamma - mgs_2 \cos\gamma + \frac{1}{2}ks_1^2 \cos^2\gamma + \frac{1}{2}ks_2^2 \ . \end{aligned}$$

Calcoliamo le posizioni di equilibrio:

$$\begin{cases} V_1 = -2mg\cos\gamma + ks_1\cos^2\gamma = 0 \\ \\ V_2 = -mg\cos\gamma + ks_2 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$s_1 = \overline{s}_1 = \frac{2mg}{k\cos\gamma} \ , \qquad s_2 = \overline{s}_2 = \frac{mg\cos\gamma}{k} \ .$$

Per discutere la stabilità calcoliamo le derivate seconde:

$$\begin{cases} V_{11} = k\cos^2\gamma \\ \\ V_{12} = V_{21} = 0 \\ \\ V_{22} = k \end{cases}$$

e quindi la posizione di equilibrio $(\overline{s}_1, \overline{s}_2)$ è stabile. Introducendo le deviazioni:

$$\sigma_1 = s_1 - \frac{2mg}{k\cos\gamma} \qquad \sigma_2 = s_2 - \frac{mg\cos\gamma}{k} \ ,$$

la Lagrangiana di piccole oscillazioni è:

$$L_{p.o.} = \frac{1}{2}m(2\dot{\sigma}_1^2 + \dot{\sigma}_2^2 + 2\dot{\sigma}_1\dot{\sigma}_2) - \frac{1}{2}(k\cos^2\gamma\sigma_1^2 + k\sigma_2^2) \ .$$

2) Le frequenze di piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$\det(C - \lambda A) \ = \ 0 \ ,$$

dove

$$C = \begin{pmatrix} k\cos^2\gamma & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 2m & m \\ m & m \end{pmatrix}$$

ossia

$$m^2\lambda^2 - (2mk + mk\cos^2\gamma)\lambda + k^2\cos^2\gamma = 0 \ ,$$

ⓒ 88-7999-464-6

le cui soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2mk + mk\cos^2\gamma \pm \sqrt{4m^2k^2 + m^2k^2\cos^4\gamma}}{2m^2} \ .$$

Le frequenze proprie sono le radici quadrate di λ_1 e λ_2.

3) Per $\gamma = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{k}{m} \ .$$

Calcoliamo gli autovettori $\underline{u}$, $\underline{v}$ soluzioni di $(C - \lambda_1 A)\underline{u} = 0$ e $(C - \lambda_2 A)\underline{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{2} - \frac{k}{2}(5+\sqrt{17}) & -\frac{k}{4}(5+\sqrt{17}) \\ -\frac{k}{4}(5+\sqrt{17}) & k - \frac{k}{4}(5+\sqrt{17}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{k}{4}\begin{pmatrix} 8+2\sqrt{17} & 5+\sqrt{17} \\ 5+\sqrt{17} & 1+\sqrt{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia, per u_1 arbitrario,

$$u_2 = -\frac{3+\sqrt{17}}{4}u_1 \ .$$

Analogamente per $\underline{v}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{2} - \frac{k}{2}(5-\sqrt{17}) & -\frac{k}{4}(5-\sqrt{17}) \\ -\frac{k}{4}(5-\sqrt{17}) & k - \frac{k}{4}(5-\sqrt{17}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{k}{4}\begin{pmatrix} 8-2\sqrt{17} & 5-\sqrt{17} \\ 5-\sqrt{17} & 1-\sqrt{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

ossia, per v_1 arbitrario,

$$v_2 = -\frac{3-\sqrt{17}}{4}v_1 \ .$$

Imponiamo le condizioni di ortonormalità

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \ , \quad \underline{u}\cdot\underline{u} = 1 \ , \quad \underline{v}\cdot\underline{v} = 1 \ .$$

Si verifica facilmente che la prima relazione è soddisfatta; dalla seconda condizione risulta:

$$m\begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{3+\sqrt{17}}{4}u_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ -\frac{3+\sqrt{17}}{4}u_1 \end{pmatrix} = \frac{mu_1^2}{8}(17-\sqrt{17}) = 1$$

ossia

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{8}(17-\sqrt{17})}} \ .$$

Dalla terza condizione si ha:

$$m \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{3-\sqrt{17}}{4} v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{3-\sqrt{17}}{4} v_1 \end{pmatrix} = \frac{m v_1^2}{8}(17+\sqrt{17}) = 1$$

ossia

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{8}(17+\sqrt{17})}} \ .$$

Pertanto si trova:

$$u_2 = -\sqrt{\frac{1}{m}(1+\frac{4\sqrt{17}}{17})}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{1}{m}(1-\frac{4\sqrt{17}}{17})}$$

e quindi la matrice U è data da:

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{8}(17-\sqrt{17})}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{8}(17+\sqrt{17})}} \\ -\sqrt{\frac{1}{m}(1+\frac{4\sqrt{17}}{17})} & \sqrt{\frac{1}{m}(1-\frac{4\sqrt{17}}{17})} \end{pmatrix} \ .$$

Poniamo per brevità:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ;$$

determiniamo l'inversa di U dalla relazione $U^{-1} = U^T A$ ossia

$$U^{-1} = m \begin{pmatrix} 2a+c & a+c \\ 2b+d & b+d \end{pmatrix} \ .$$

Dunque, introducendo le deviazioni $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$ dalla posizione di equilibrio, i modi normali si ottengono tramite la relazione $\underline{y} = U^{-1}\underline{\sigma}$ ossia

$$\begin{cases} y_1 = m(2a+c)\sigma_1 + m(a+c)\sigma_2 \\ \\ y_2 = m(2b+d)\sigma_1 + m(b+d)\sigma_2 \ . \end{cases}$$

PO 7

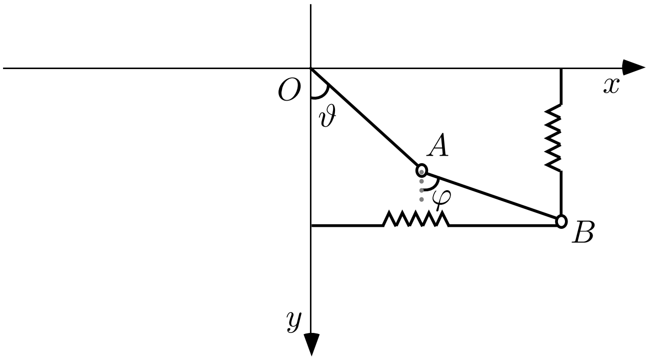
Due aste OA e AB di lunghezza l e massa trascurabile sono collegate tra loro in A e la prima asta ha un estremo coincidente con l'origine O di un riferimento (Oxy) in un piano verticale. In A e B si trovano due punti P_1 e P_2 di massa m; il punto P_2 è collegato agli assi del riferimento da due molle, entrambe di costante elastica $k > 0$, vincolate a rimanere parallele agli assi. Siano ϑ e φ gli angoli che le due aste formano con la verticale. Supponiamo $mg \geq \frac{3}{2}kl$.

1) Verificare che la posizione $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è di equilibrio stabile;

2) scrivere la Lagrangiana di piccole oscillazioni attorno alla posizione $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$;

3) determinare le frequenze proprie di piccole oscillazioni nel caso $mg = 3kl$;

4) determinare i modi normali relativi al punto 3).



1) Le coordinate dei due punti sono $P_1(x_1, y_1) = (l \sin\vartheta, l \cos\vartheta)$, $P_2(x_2, y_2) = (l \sin\vartheta + l \sin\varphi, l \cos\vartheta + l \cos\varphi)$. Quindi l'energia potenziale è:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2}k(x_2^2 + y_2^2) \\ &= -mg(2l\cos\vartheta + l\cos\varphi) + \frac{1}{2}kl^2[2 + 2\cos(\vartheta - \varphi)] \ . \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{cases} V_\vartheta = 2mgl \sin\vartheta - kl^2 \sin(\vartheta - \varphi) \\ \\ V_\varphi = mgl \sin\varphi + kl^2 \sin(\vartheta - \varphi) \ , \end{cases}$$

si riconosce subito che $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è una posizione di equilibrio. Inoltre, dalle relazioni

$$\begin{cases} V_{\vartheta\vartheta} = 2mgl \cos\vartheta - kl^2 \cos(\vartheta - \varphi) \\ \\ V_{\vartheta\varphi} = V_{\varphi\vartheta} = kl^2 \cos(\vartheta - \varphi) \\ \\ V_{\varphi\varphi} = mgl \cos\varphi - kl^2 \cos(\vartheta - \varphi) \ , \end{cases}$$

se $mg \geq \frac{3}{2}kl$ la configurazione $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è stabile.

ⓒ88-7999-464-6

2) Poiché i moduli dei quadrati delle velocità di P_1 e P_2 sono:

$$v_1^2 = l^2\dot{\vartheta}^2 \ , \qquad v_2^2 = l^2(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)) \ ,$$

l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)) \ .$$

Introducendo le deviazioni ξ, η dalla posizione di equilibrio, la Lagrangiana di piccole oscillazioni attorno a $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ risulta

$$L_{p.o.} = \frac{ml^2}{2}(2\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + 2\dot{\xi}\dot{\eta}) + \frac{1}{2}[(2mgl - kl^2)\xi^2 + (mgl - kl^2)\eta^2 + 2kl^2\xi\eta] \ .$$

3) Consideriamo il caso $mg = 3kl$; le matrici A e C di piccole oscillazioni relative all'energia cinetica e potenziale rispettivamente sono:

$$A = \begin{pmatrix} 2ml^2 & ml^2 \\ ml^2 & ml^2 \end{pmatrix} \ ,$$

$$C = \begin{pmatrix} 5kl^2 & kl^2 \\ kl^2 & 2kl^2 \end{pmatrix} \ .$$

Quindi le frequenze proprie sono soluzioni di

$$\begin{aligned} \det(C - \lambda A) &= l^2 \cdot \det\begin{pmatrix} 5k - 2m\lambda & k - m\lambda \\ k - m\lambda & 2k - m\lambda \end{pmatrix} \\ &= l^2(m^2\lambda^2 - 7mk\lambda + 9k^2) = 0 \end{aligned}$$

ossia

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2}\frac{k}{m} \ .$$

4) Per brevità di notazione, poniamo:

$$\alpha \equiv \frac{7 + \sqrt{13}}{2} \ , \qquad \beta \equiv \frac{7 - \sqrt{13}}{2} \ .$$

Calcoliamo il vettore $\underline{u} = (u_1, u_2)$ soluzione di $(C - \lambda_1 A)\underline{u} = 0$:

$$l^2k \cdot \begin{pmatrix} 5 - 2\alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & 2 - \alpha \end{pmatrix}\underline{u} \ = \ 0$$

ossia, lasciando u_1 arbitrario, si ha $u_2 \equiv \overline{u}_2 = \frac{5-2\alpha}{\alpha-1}u_1$.
Analogamente calcoliamo $\underline{v} = (v_1, v_2)$ soluzione di $(C - \lambda_2 A)\underline{v} = 0$:

ⓒ 88-7999-464-6

$$l^2 k \cdot \begin{pmatrix} 5-2\beta & 1-\beta \\ 1-\beta & 2-\beta \end{pmatrix} \underline{v} \; = \; 0$$

ossia, lasciando v_1 arbitrario, si ha $v_2 \equiv \overline{v}_2 = \frac{5-2\beta}{\beta-1} v_1$.

Imponiamo ora le condizioni di ortonormalità:

$$\underline{u} \cdot A\underline{v} = 0, \qquad \underline{u} \cdot A\underline{u} = 1, \qquad \underline{v} \cdot A\underline{v} = 1 \; .$$

Si controlla facilmente che la prima condizione è verificata; dalla seconda condizione si trova:

$$\underline{u} \cdot A\underline{u} = ml^2 u_1^2 \; \frac{2\alpha^2 - 10\alpha + 17}{(\alpha - 1)^2} \; = \; 1$$

e quindi

$$u_1 = \overline{u}_1 = \frac{\alpha - 1}{[ml^2(2\alpha^2 - 10\alpha + 17)]^{1/2}} \; .$$

Dalla terza condizione si ottiene infine:

$$\underline{v} \cdot A\underline{v} = ml^2 v_1^2 \; \frac{2\beta^2 - 10\beta + 17}{(\beta - 1)^2} \; = \; 1$$

e quindi

$$v_1 = \overline{v}_1 = \frac{\beta - 1}{[ml^2(2\beta^2 - 10\beta + 17)]^{1/2}} \; .$$

Pertanto la matrice U formata dai vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ è:

$$U = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 & \overline{v}_1 \\ \overline{u}_2 & \overline{v}_2 \end{pmatrix} \; ,$$

la cui inversa si ricava dalla relazione $U^{-1} = U^T A$:

$$U^{-1} = ml^2 \begin{pmatrix} 2\overline{u}_1 + \overline{u}_2 & \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \\ 2\overline{v}_1 + \overline{v}_2 & \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \end{pmatrix} \; .$$

Pertanto i modi normali $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ sono legati alle deviazioni (ξ, η) dalle relazioni:

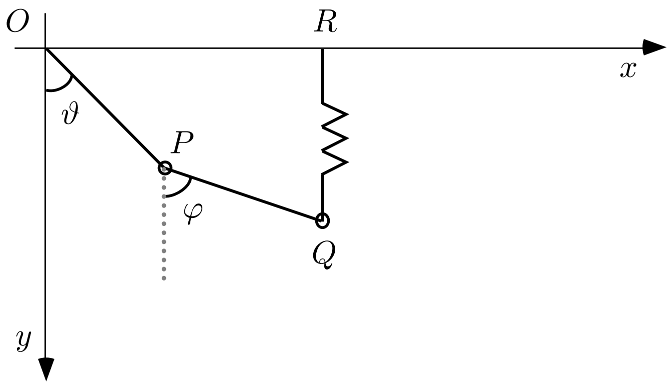
$$\begin{cases} \tilde{\xi} = ml^2[(2\overline{u}_1 + \overline{u}_2)\xi + (\overline{u}_1 + \overline{u}_2)\eta] \\[2ex] \tilde{\eta} = ml^2[(2\overline{v}_1 + \overline{v}_2)\xi + (\overline{v}_1 + \overline{v}_2)\eta] \; . \end{cases}$$

Esecizi proposti

1) In un piano verticale, due aste (OP e PQ) di lunghezza l e massa trascurabile hanno un estremo (P) in comune; la prima asta è vincolata a ruotare attorno all'origine O del sistema di riferimento. In corrispondenza di P e Q si trovano due punti materiali di massa m. Inoltre, il punto Q è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale.

a) Scrivere la Lagrangiana del sistema;

b) nel caso $mg > 2kl$, calcolare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



Soluzione:

a) Siano ϑ e φ gli angoli che le due aste formano con la verticale. La Lagrangiana del sistema è

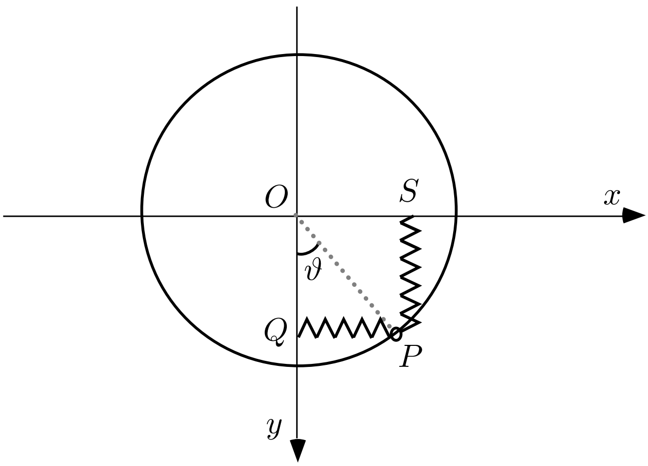
$$L(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \vartheta, \varphi) = ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi))$$
$$+ 2mgl\cos\vartheta + mgl\cos\varphi - \frac{1}{2}kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)^2 \ .$$

©88-7999-464-6

b) Nell'ipotesi $mg > 2kl$ la posizione di equilibrio $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$ è stabile e la frequenza di piccole oscillazioni è $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$, dove λ è soluzione di

$$\det \begin{pmatrix} 2mgl - 2kl^2 - 2ml^2\lambda & -ml^2\lambda \\ -ml^2\lambda & mgl - 2kl^2 - ml^2\lambda \end{pmatrix} = 0 \ .$$

2) Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere lungo una circonferenza di raggio R, il cui centro coincide con l'origine O di un sistema di riferimento verticale. Il punto P è collegato a due molle di costante elastica $k > 0$, che rimangono, rispettivamente, parallele agli assi x e y. Sia ϑ l'angolo che il raggio OP forma con la verticale. Determinare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

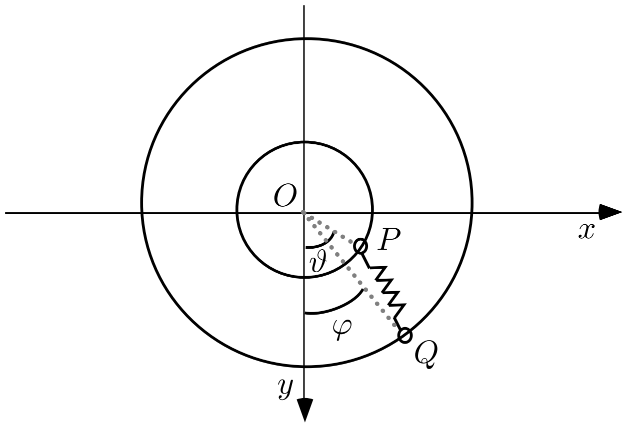


Soluzione: La posizione $\vartheta = 0$ è di equilibrio stabile e la frequenza di piccole oscillazioni risulta essere data da

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{R}} \ .$$

3) In un piano verticale, due punti P e Q di massa m sono vincolati a scorrere lungo due circonferenze concentriche di raggi R e r $(r < R)$. I due punti sono collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Siano (ϑ, φ) gli angoli che i segmenti congiungenti l'origine del sistema di riferimento con i punti P e Q formano con la verticale. Calcolare la frequenza di piccole oscillazioni relativa al punto di equilibrio stabile $(\vartheta, \varphi) = (0, 0)$.

ⓒ 88-7999-464-6

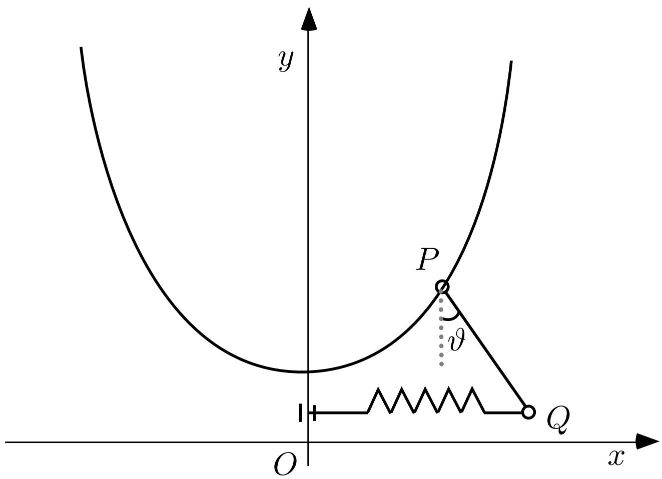


Soluzione: La frequenza di piccole oscillazioni è $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$, dove λ è soluzione di

$$\det\begin{pmatrix} mgr + krR - mr^2\lambda & -krR \\ -krR & mgR + krR - mR^2\lambda \end{pmatrix} = 0 \ .$$

4) In un piano verticale (Oxy), un punto materiale P di massa m, soggetto alla forza peso è vincolato a scorrere lungo una parabola di equazione $y = x^2 + l$. A tale punto è appesa un'asta di lunghezza $l > 0$ e massa trascurabile, che reca all'estremità libera un punto materiale Q di massa m. Il punto Q è collegato all'asse delle ordinate tramite una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre orizzontale. Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale.

a) Scrivere la Lagrangiana del sistema.
b) Trovare le frequenze proprie di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile $(\vartheta, x) = (0, 0)$.



ⓒ88-7999-464-6

Soluzione:
a) La Lagrangiana del sistema è:

$$L(\dot{\vartheta}, \dot{x}, \vartheta, x) = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\vartheta}^2 + 4x\dot{x}\dot{\vartheta}l\sin\vartheta + 2\dot{x}^2(1+4x^2) + 2\dot{x}\dot{\vartheta}l\cos\vartheta) - 2mgx^2 + mgl\cos\vartheta - \frac{k}{2}(x + l\sin\vartheta)^2 \ .$$

b) La frequenza di piccole oscillazioni è $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$, dove λ è soluzione di

$$\det\begin{pmatrix} mgl + kl^2 - ml^2\lambda & kl - ml\lambda \\ kl - ml\lambda & 4mg + k - 2m\lambda \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Capitolo 4
Momenti d'inerzia

• Consideriamo un sistema di N punti materiali di massa m_i $(i = 1, ..., N)$ e sia $\mathcal{T} \in \mathbf{R}^3$ un sistema di riferimento mobile con l'origine O coincidente con il centro di massa del sistema. Indichiamo con $\underline{r}^{(i)} \equiv (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ il vettore posizione dell'i–esimo punto rispetto al riferimento $\mathcal{T}$. Si definisce *tensore d'inerzia* la quantità

$$I_{hk}^O \;=\; \sum_{i=1}^{N} m_i \left[|\underline{r}^{(i)}|^2 \delta_{hk} - x_h^{(i)} x_k^{(i)} \right] \;, \qquad (I)$$

dove $\delta_{hk} = 1$ per $h = k$ e $\delta_{hk} = 0$ per $h \neq k$. Poiché la matrice d'inerzia $I_O \equiv (I_{hk}^O)$ è simmetrica $(I_{hk}^O = I_{kh}^O)$, essa può essere diagonalizzata. Le componenti diagonali I_1^O, I_2^O, I_3^O si dicono *momenti principali d'inerzia.*

• Sia C un corpo rigido di massa m e densità ϱ. Se C è omogeneo, si ha $\varrho = \frac{m}{V}$, dove V è il volume del corpo. La definizione del tensore d'inerzia si estende facilmente al caso di un corpo rigido continuo, sostituendo nella (I) la somma con l'integrale esteso a tutto il corpo.

• **Teorema di Huyghens–Steiner:** Per calcolare i momenti d'inerzia rispetto a un polo Q distinto da O, si può usare la relazione

$$I_j^Q \;=\; I_j^O + md^2 \;, \qquad j = 1, 2, 3,$$

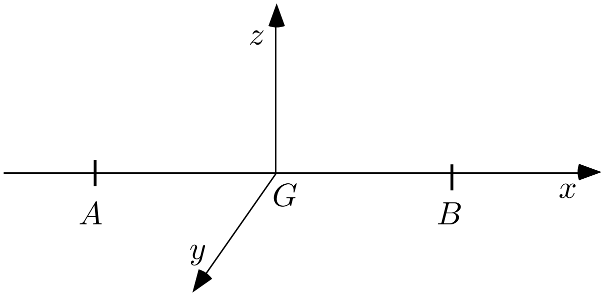
dove d indica la distanza tra gli assi principali passanti per O e Q.

MI 1

Calcolare i momenti principali di inerzia di un'asta omogenea di massa m e lunghezza l,

1) rispetto al baricentro;

2) rispetto ad una delle sue estremità.



1) Scegliamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G dell'asta, l'asse x coincidente con la direzione dell'asta e gli assi y, z ortogonali all'asse x. Pertanto l'asta è individuata da $-\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2}$, $y = z = 0$. Sia ϱ la densità di massa dell'asta: $\varrho = \frac{m}{l}$; allora, il momento d'inerzia I_1 rispetto all'asse x è nullo, mentre i momenti d'inerzia I_2, I_3 rispetto agli assi y e z sono uguali e si ha:

$$I_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varrho x^2 dx \;=\; \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx \;=\; \frac{ml^2}{12} \;=\; I_3 \ .$$

Pertanto, la matrice principale d'inerzia è data da:

$$I \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix} \ .$$

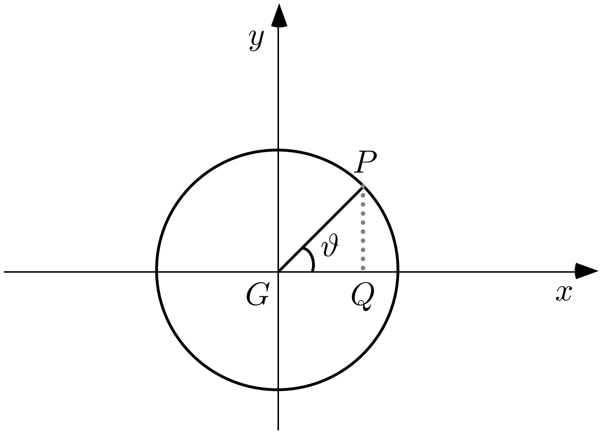
2) Dal teorema di Huyghens–Steiner si ottiene che il momento d'inerzia rispetto ad un'estremità (A) dell'asta è:

$$I_A \;=\; I_G + m|AG|^2 \;=\; \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} \;=\; \frac{ml^2}{3} \ .$$

ⓒ 88-7999-464-6

MI 2

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di un anello omogeneo di massa m e raggio R.



Prendiamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G dell'anello, gli assi x e y nel piano dell'anello e l'asse z ortogonale ad essi. Sia ϑ l'angolo che un generico punto P dell'anello forma con l'asse x, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. La lunghezza della circonferenza vale $2\pi R$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{2\pi R}$. Allora, il momento d'inerzia I_3 rispetto all'asse z è:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \varrho R^2 \ R d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi R} \ R^3 d\vartheta = mR^2 \ ,$$

essendo $Rd\vartheta$ l'elemento di curva. I momenti d'inerzia rispetto agli assi x e y coincidono e si ha:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \varrho R^2 \sin^2 \vartheta \ R d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{m}{2\pi R} R^3 \sin^2 \vartheta \ d\vartheta = \frac{mR^2}{2} \ ,$$

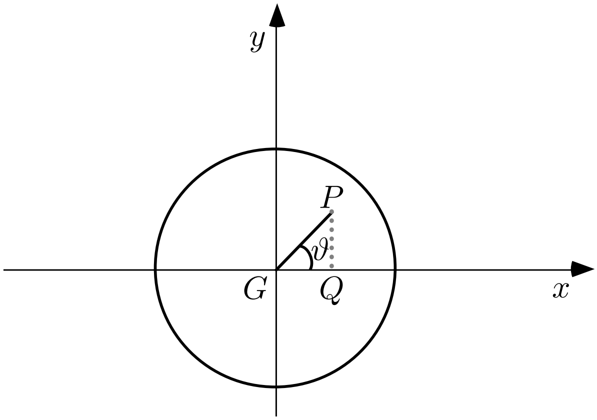
poiché la distanza dall'asse x vale $|PQ| = R \sin \vartheta$ e inoltre $\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta \ d\vartheta = \pi$. Infine, poiché $I_1 = I_2$ la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$I \ = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix} \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

MI 3

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di un disco omogeneo di massa m e raggio R.



Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G del disco, gli assi x e y nel piano del disco e l'asse z ortogonale ad essi. Siano r, ϑ le coordinate polari di un generico punto P del disco: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. L'area del disco vale πR^2 e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{\pi R^2}$. Allora, il momento d'inerzia I_3 rispetto all'asse z è:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^R \varrho r^2 \ r \ dr \ d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} \ r^3 \ dr \ d\vartheta = \frac{mR^2}{2} \ ,$$

essendo $rdrd\vartheta$ l'elemento di area. I momenti d'inerzia rispetto agli assi x e y coincidono e si ha:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_O^R \varrho r^2 \sin^2\vartheta \ r \ dr \ d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{m}{\pi R^2} r^3 \sin^2\vartheta \ dr \ d\vartheta = \frac{mR^2}{4} \ ,$$

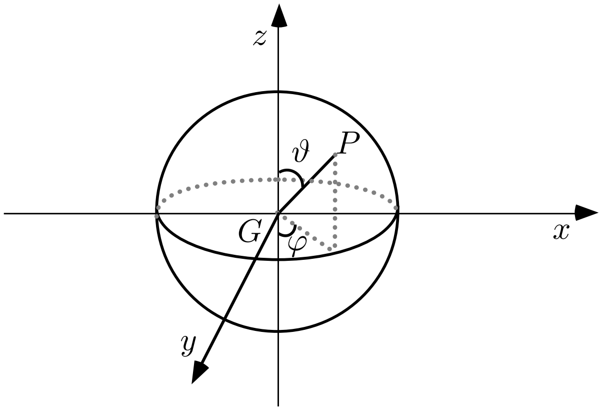
poiché la distanza dall'asse x vale $|PQ| = r \sin\vartheta$ e inoltre $\int_0^{2\pi} \sin^2\vartheta \ d\vartheta = \pi$. Infine, poiché $I_1 = I_2$ la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$I \ = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \ .$$

© 88-7999-464-6

MI 4

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di una superficie sferica omogenea di massa m e raggio R.



Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G della superficie sferica. Siano φ, ϑ le coordinate polari di un generico punto P sulla superficie, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$. La superficie totale vale $4\pi R^2$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{4\pi R^2}$. Per simmetria i tre momenti d'inerzia coincidono e si ha:

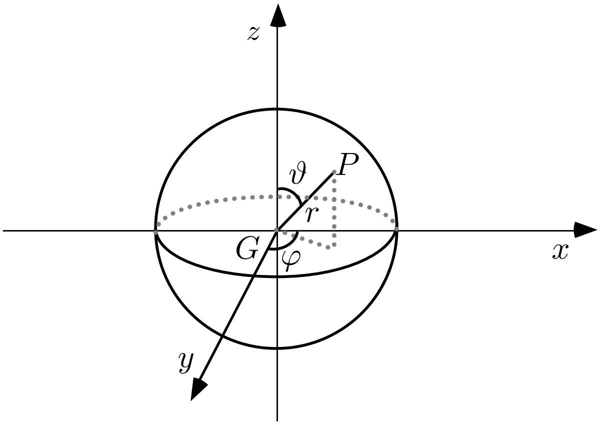
$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho (R \sin\vartheta)^2 \; R^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{4\pi R^2} \; R^4 \; \sin^3\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi = \frac{2mR^2}{3} \; , \end{aligned}$$

essendo $R^2 \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi$ l'elemento di superficie. Inoltre, $\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \; d\vartheta = \frac{4}{3}$. Pertanto, la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$I \;=\; \begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{3} \end{pmatrix} \; .$$

MI 5

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di una sfera omogenea di massa m e raggio R.



Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G della sfera. Siano r, φ, ϑ le coordinate polari di un generico punto P della sfera, $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi R^3$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Per simmetria i tre momenti d'inerzia coincidono e si ha:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \varrho (r \sin\vartheta)^2 \; r^2 \sin\vartheta \; dr \; d\vartheta \; d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \; r^4 \; \sin^3\vartheta \; dr \; d\vartheta \; d\varphi = \frac{2mR^2}{5} \; ,
\end{aligned}
$$

essendo $r^2 \sin\vartheta \; dr \; d\vartheta \; d\varphi$ l'elemento di volume; inoltre, $\int_0^{\pi} \sin^3\vartheta \; d\vartheta = \frac{4}{3}$. Infine, la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$
I = \begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix} .
$$

© 88-7999-464-6

MI 6

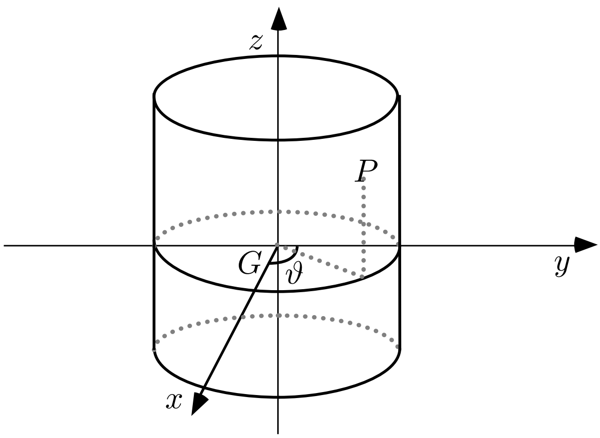
Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro della superficie laterale di un cilindro omogeneo con raggio di base R, altezza h e massa m.

Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G del cilindro. Siano ϑ, z le coordinate cilindriche sulla superficie, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$. La superficie del cilindro vale $2\pi Rh$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{2\pi Rh}$.
Calcoliamo dapprima il momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho\ R^2\ Rd\vartheta\ dz \ = \ mR^2\ ,$$

poiché l'elemento di superficie vale $Rd\vartheta\ dz$. I momenti d'inerzia rispetto agli assi x e y coincidono e si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho\ (R^2 \cos^2 \vartheta + z^2)\ Rd\vartheta\ dz \\ &= \frac{m}{2\pi Rh} R^3\ h\pi + \frac{m}{2\pi Rh}\ R \cdot 2\pi\ \frac{1}{3}\ \frac{h^3}{4} = \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12}\ . \end{aligned}$$



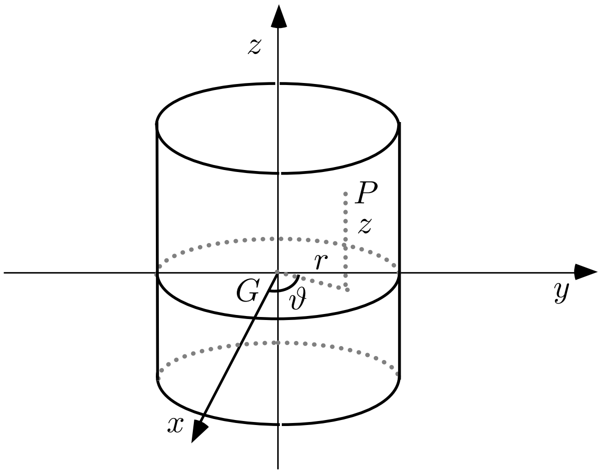
Pertanto la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$I \ = \ \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}\ .$$

MI 7

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di un cilindro omogeneo con raggio di base R, altezza h e massa m.

Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G del cilindro. Siano r, ϑ, z le coordinate cilindriche, $0 \le r \le R$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}$. Il volume del cilindro vale $\pi R^2 h$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{m}{\pi R^2 h}$.



Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I_3 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho \, r^2 \, r \, dr \, d\vartheta \, dz \; = \; \frac{mR^2}{2} \; ,$$

poiché l'elemento di volume è $r \, dr \, d\vartheta \, dz$. I momenti d'inerzia rispetto agli assi x e y coincidono e si ha:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho \, (r^2 \cos^2 \vartheta + z^2) \; r \, dr \, d\vartheta \, dz \\ &= \frac{m}{\pi R^2 h} \, (\frac{R^4}{4} \pi h + \frac{R^2}{2} \; 2\pi \; \frac{h^3}{12}) = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \; . \end{aligned}$$

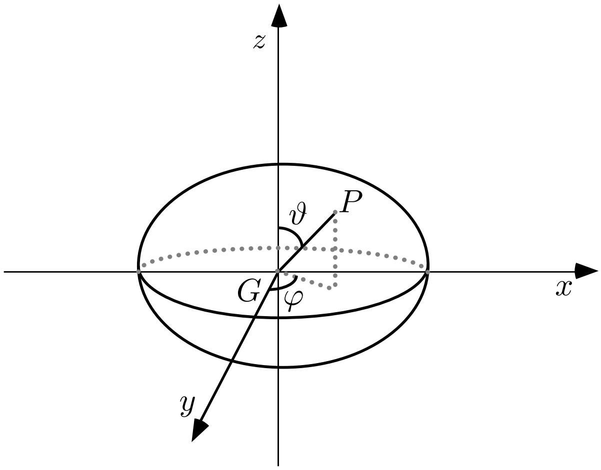
Pertanto la matrice principale d'inerzia assume la forma:

$$I \; = \; \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix} \; .$$

© 88-7999-464-6

MI 8

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di un ellissoide omogeneo di massa m e semiassi a, b, c.



Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G e gli assi coincidenti con le direzioni principali dell'ellissoide. Siano r, ϑ, φ le coordinate ellissoidiche, con $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ossia

$$\begin{cases} x = ar \sin\vartheta \cos\varphi \\ \\ y = br \sin\vartheta \sin\varphi \\ \\ z = cr \cos\vartheta \ . \end{cases}$$

Il volume dell'ellissoide è $\frac{4}{3}\pi abc$ e quindi la densità è: $\varrho = \frac{3m}{4\pi abc}$. Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse x. Poiché l'elemento di volume vale $abcr^2 \sin\vartheta \ dr \ d\vartheta \ d\varphi$, si ha:

$$\begin{aligned} I_1 = \ & abc \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(b^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\vartheta) r^4 \sin\vartheta \ dr \ d\vartheta \ d\varphi \\ = \ & \frac{m(b^2+c^2)}{5} \ , \end{aligned}$$

essendo $\int_0^\pi \sin^3\vartheta \ d\vartheta = \frac{4}{3}$, $\int_0^\pi \cos^2\vartheta \sin\vartheta \ d\vartheta = \frac{2}{3}$.

ⓒ88-7999-464-6

Analogamente si trovano gli altri due momenti d'inerzia e precisamente:

$$I_2 = \frac{m(a^2+c^2)}{5} \ , \qquad I_3 = \frac{m(a^2+b^2)}{5} \ .$$

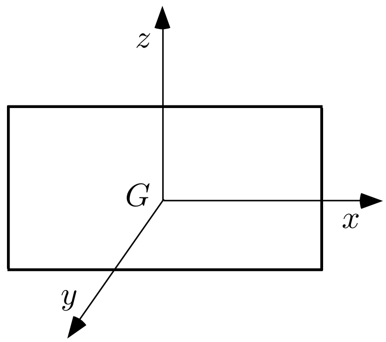
Pertanto la matrice principale d'inerzia è:

$$I \ = \ \begin{pmatrix} \frac{m(b^2+c^2)}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+c^2)}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{5} \end{pmatrix} \ .$$

© 88-7999-464-6

MI 9

Calcolare i momenti principali di inerzia rispetto al baricentro di una lamina omogenea rettangolare di massa m e lati a, b.



Consideriamo il sistema di riferimento $Oxyz$ con l'origine O coincidente con il baricentro G della lamina, gli assi x e y nel piano della lamina e l'asse z ortogonale ad essi. Pertanto $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, $z = 0$, mentre la densità della lamina vale $\varrho = \frac{m}{ab}$. Calcoliamo il momento d'inerzia rispetto all'asse x:

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \varrho y^2 \; dx \; dy \;=\; \frac{mb^2}{12} \; .$$

Analogamente si trova:

$$I_2 \;=\; \frac{ma^2}{12} \; .$$

Rispetto all'asse z, si ha:

$$I_3 \;=\; \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \varrho(x^2 + y^2) \; dx \; dy \;=\; \frac{m(a^2 + b^2)}{12} \; .$$

Pertanto la matrice principale d'inerzia assume la seguente espressione:

$$I \;=\; \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix} \; .$$

Capitolo 5
Dinamica del corpo rigido

• **Equazioni cardinali:** Consideriamo un sistema di N punti materiali di massa m_i $(i = 1, ..., N)$, sia $\underline{x}_i$ la posizione dell'i–esimo punto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale con origine O e sia $\underline{v}_i$ la corrispondente velocità. Si definisce *quantità di moto*

$$\underline{P} \ = \ \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{\dot{x}}_i$$

e *momento angolare* con polo O:

$$\underline{\Gamma}_O \ = \ \sum_{i=1}^{N} OP_i \wedge m_i \underline{v}_i \ .$$

Le *equazioni cardinali* sono dunque

$$\begin{cases} \frac{d\underline{P}}{dt} = \underline{F} \\ \\ \frac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{P} = \underline{M}_O \ , \end{cases}$$

dove $\underline{F}$ e $\underline{M}_O$ sono il risultante e il momento delle forze esterne.

• Nel caso di un corpo rigido le velocità di due punti qualsiasi O, Q del corpo sono legate dalla relazione

$$\underline{v}_Q \ = \ \underline{v}_O + \underline{\omega} \wedge OQ \ ,$$

dove $\underline{\omega}$ è la *velocità angolare* del corpo rigido. Le definizioni della quantità di moto e del momento angolare si estendono facilmente al caso di un corpo rigido continuo. In particolare, il momento angolare è dato dalla seguente relazione:

$$\underline{\Gamma}_O \ = \ I_O \underline{\omega} + mOG \wedge \underline{v}_O \ ,$$

©88-7999-464-6

dove I_O è la matrice principale d'inerzia e $G \equiv (\underline{x}_G)$ è il baricentro del corpo rigido. Le equazioni cardinali diventano quindi:

$$\begin{cases} m\ddot{\underline{x}}_G = \underline{F} \\ \\ I_O\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \wedge I_O\underline{\omega} + mOG \wedge \ddot{\underline{x}}_O = \underline{M}_O \ . \end{cases}$$

• **Teorema di König:** Prendendo l'origine O coincidente con il baricentro G del corpo rigido, l'energia cinetica si può decomporre nel moto traslatorio del baricentro e nel moto rotazionale attorno a G:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega} \cdot I_G\underline{\omega} \ ,$$

dove I_G è la matrice principale d'inerzia rispetto al baricentro.

• Se il sistema è soggetto a sollecitazioni attive conservative di energia potenziale V vale ancora il formalismo lagrangiano introdotto per lo studio della dinamica di un punto materiale. In particolare possiamo considerare la funzione lagrangiana $L = T - V$, a cui sono associate le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \ , \qquad i = 1, ..., n,$$

avendo indicato con $(x_1, ..., x_n)$ un sistema di coordinate indipendenti atto a descrivere un sistema con n gradi di libertà.

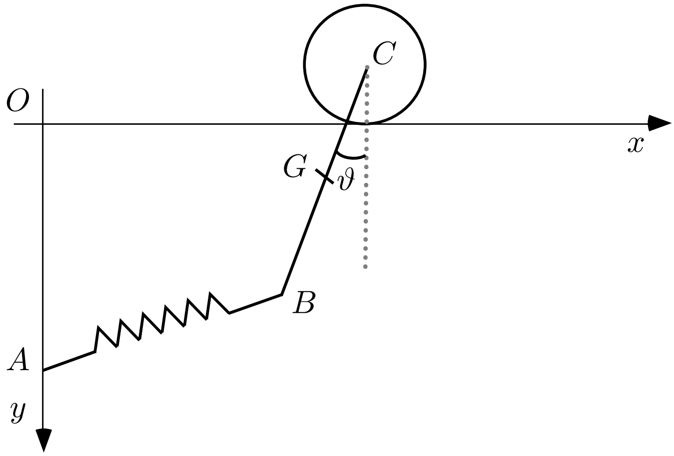
CR 1

In un piano verticale, un disco di massa M e raggio R è vincolato a ruotare senza strisciare lungo l'asse orizzontale. Al centro del disco è appesa un'asta di massa m e lunghezza l, al cui estremo libero è collegata una molla di costante elastica $k > 0$. Il punto di applicazione della molla ha coordinate $(0, l)$. Sia x l'ascissa del centro del disco e ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare dei parametri.

© 88-7999-464-6



1) La Lagrangiana globale è data dalla differenza dell'energia cinetica (del disco e dell'asta) e dell'energia potenziale (relativa alla forza peso e alla forza elastica). Siano C il baricentro del disco, G il baricentro dell'asta e A, B gli estremi di applicazione della molla. Siano v_C e v_G i moduli delle velocità dei baricentri, ω_d, ω_a le velocità angolari del disco e dell'asta e I_C, I_G i rispettivi momenti d'inerzia. L'energia cinetica T assume dunque la forma:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_d^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_a^2 \ . \qquad (T1)$$

Poiché i baricentri hanno coordinate

$$C(x_C, y_C) = C(x, -R) \ , \qquad G(x_G, y_G) = G\left(x - \frac{l}{2}\sin\vartheta, \frac{l}{2}\cos\vartheta - R\right) \ ,$$

le rispettive velocità sono:

$$\underline{v}_C(\dot{x}, 0) \ , \qquad \underline{v}_G\left(\dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right) \ .$$

Pertanto:

$$v_C^2 = \dot{x}^2 \ , \qquad v_G^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 - l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \ .$$

Inoltre, i momenti d'inerzia del disco e dell'asta sono, rispettivamente,

$$I_C = \frac{MR^2}{2} \ , \qquad I_G = \frac{ml^2}{12} \ .$$

Calcoliamo infine le velocità angolari del disco e dell'asta. Sia D il punto di contatto del disco con la guida orizzontale; poiché D ha per definizione velocità nulla, segue la relazione:

$$\underline{v}_C = \underline{\omega}_d \wedge DC$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_d \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_d R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (P1)$$

dove $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ sono i versori fondamentali del sistema di riferimento. Dalla $(P1)$ si ottiene $\omega_d = \frac{\dot{x}}{R}$. Per il calcolo della velocità angolare dell'asta, prendiamo G e B come punti di riferimento:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_G + \underline{\omega}_a \wedge GB$$

ossia

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} - l\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_a \\ -\frac{l}{2}\sin\vartheta & \frac{l}{2}\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \omega_a\frac{l}{2}\cos\vartheta \\ -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \omega_a\frac{l}{2}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} ; \end{aligned}$$

uguagliando, ad esempio, i membri di destra e di sinistra della prima riga, si ricava

$$\omega_a \;=\; \dot{\vartheta} \; .$$

Inserendo i risultati ottenuti nella $(T1)$, si ricava l'espressione dell'energia cinetica globale:

$$T = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \; .$$

L'energia potenziale V è data dalla seguente espressione:

$$V = -mgy_G + \frac{1}{2}k|AB|^2$$

ed essendo $A(0, l)$, $B(x - l\sin\vartheta, l\cos\vartheta - R)$, si ha:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= x^2 - 2lx\sin\vartheta - 2(l+R)l\cos\vartheta + (l+R)^2 + l^2 \\ &= x^2 - 2lx\sin\vartheta - 2(l+R)l\cos\vartheta + cost. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$V = -mg\frac{l}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{2}k(x^2 - 2lx\sin\vartheta - 2(l+R)l\cos\vartheta) + cost.$$

© 88-7999-464-6

Infine, la Lagrangiana completa è:

$$L = L(x, \dot{x}, \vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M + m\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$
$$+ mg\frac{l}{2}\cos\vartheta - \frac{1}{2}k(x^2 - 2lx\sin\vartheta - 2(l+R)l\cos\vartheta) \ .$$

2) Per ottenere le posizioni di equilibrio, determiniamo i valori di x e ϑ tali che le derivate prime dell'energia potenziale sono nulle:

$$\begin{cases} V_x = k(x - l\sin\vartheta) = 0 \\ \\ V_\vartheta = mg\frac{l}{2}\sin\vartheta - klx\cos\vartheta + kl(l+R)\sin\vartheta = 0 \ , \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} x = l\sin\vartheta \\ \\ \sin\vartheta(mg\frac{l}{2} - kl^2\cos\vartheta + kl(l+R)) = 0 \ . \end{cases}$$

Le posizioni di equilibrio sono dunque:

$$(\vartheta_1, x_1) = (0, 0), \qquad (\vartheta_2, x_2) = (\pi, 0) \ ,$$

e inoltre:

$$(\vartheta_3, x_3) = (\arccos[\frac{1}{kl}(\frac{1}{2}mg + k(l+R))], l\sin\vartheta_3),$$
$$(\vartheta_4, x_4) = (-\vartheta_3, l\sin\vartheta_4) \ .$$

Per discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio, calcoliamo l'hessiano dell'energia potenziale:

$$\mathcal{H}(V)(\vartheta, x) = \begin{pmatrix} k & -kl\cos\vartheta \\ -kl\cos\vartheta & mg\frac{l}{2}\cos\vartheta + klx\sin\vartheta + kl(l+R)\cos\vartheta \end{pmatrix} \ .$$

Nella posizione di equilibrio $(\vartheta_1, x_1) = (0, 0)$ risulta:

$$\mathcal{H}(V)(\vartheta_1, x_1) = \begin{pmatrix} k & -kl \\ -kl & mg\frac{l}{2} + kl(l+R) \end{pmatrix} \ ;$$

poiché la traccia di tale matrice è positiva ($\mathrm{tr}(\mathcal{H}(V)) = k + mg\frac{l}{2} + kl(l+R)$) e il determinante è positivo ($\det(\mathcal{H}(V)) = mg\frac{l}{2}k + k^2lR$), la configurazione $(\vartheta_1, x_1) = (0, 0)$ è di equilibrio stabile.

Analogamente, l'hessiano calcolato in (ϑ_2, x_2) vale:

$$\mathcal{H}(V)(\vartheta_2, x_2) = \begin{pmatrix} k & kl \\ kl & -mg\frac{l}{2} - kl(l+R) \end{pmatrix} ;$$

poiché il determinante è negativo $(\det(\mathcal{H}(V)) = -mg\frac{l}{2}k - 2k^2l^2 - klR)$, la configurazione $(\vartheta_2, x_2) = (\pi, 0)$ è di equilibrio instabile.
Infine, l'hessiano dell'energia potenziale calcolato in (ϑ_3, x_3) vale:

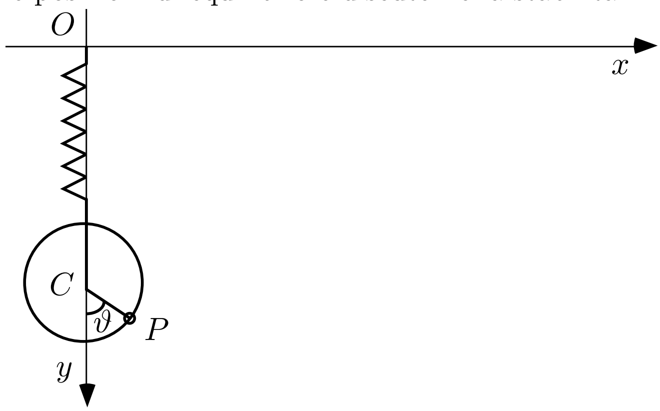
$$\mathcal{H}(V)(\vartheta_3, x_3) = \begin{pmatrix} k & -\frac{1}{2}mg - k(l+R) \\ -\frac{1}{2}mg - k(l+R) & kl^2 \end{pmatrix} .$$

Poiché il determinante di tale matrice è negativo $(\det(\mathcal{H}(V)) = -\frac{1}{4}m^2g^2 - k^2R^2 - mgk(l+R) - 2k^2lR)$, la configurazione (ϑ_3, x_3) è di equilibrio instabile. Lo stesso risultato si ottiene per (ϑ_4, x_4).

CR 2

In un piano verticale, un disco di massa M e raggio R ha il centro vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse y. Una molla di costante elastica $k > 0$ collega il centro del disco all'origine del sistema di riferimento. Lungo il bordo del disco può scorrere un punto materiale P di massa m. Sia y l'ordinata del centro C del disco e ϑ l'angolo che la retta congiungente C e P forma con la verticale.

1) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema;
2) individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.



1) La Lagrangiana globale è data dalla differenza dell'energia cinetica (del disco e del punto materiale) e dell'energia potenziale (relativa alla forza peso e alla forza elastica). Sia $C(x_C, y_C) = C(0, y)$ il baricentro del disco e $P(x_P, y_P) = P(R\sin\vartheta, y + R\cos\vartheta)$ il punto materiale.

ⓒ 88-7999-464-6

Dunque, $\underline{v}_C(0,\dot{y})$ e $\underline{v}_P(R\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \dot{y} - R\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$, da cui si ricava: $v_C^2 = \dot{y}^2$, $v_P^2 = \dot{y}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{y}\dot{\vartheta}\sin\vartheta$. Pertanto l'energia cinetica assume la seguente espressione:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}mv_P^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + R^2\dot{\vartheta}^2 - 2R\dot{y}\dot{\vartheta}\sin\vartheta) \ .$$

L'energia potenziale relativa alla forza peso del disco e del punto P e alla forza elastica assume la forma:

$$V = \frac{1}{2}k|OC|^2 - Mgy_C - mgy_P = \frac{1}{2}ky^2 - Mgy - mg(y + R\cos\vartheta) \ .$$

Pertanto la Lagrangiana completa è:

$$\begin{aligned} L = L(y,\dot{y},\vartheta,\dot{\vartheta}) &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\vartheta}^2 \\ &- mR\dot{y}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \frac{1}{2}ky^2 + (M+m)gy + mgR\cos\vartheta \ . \end{aligned}$$

Le equazioni del moto del sistema sono dunque:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

ed essendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (M+m)\dot{y} - mR\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta} - mR\dot{y}\sin\vartheta \ , \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} - mR\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - mR\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta = -ky + (M+m)g \\ \\ mR^2\ddot{\vartheta} - mR\ddot{y}\sin\vartheta = -mgR\sin\vartheta \ . \end{cases}$$

2) Per determinare le posizioni di equilibrio, calcoliamo i valori di y e ϑ tali che le derivate prime dell'energia potenziale sono nulle:

$$\begin{cases} V_y = ky - (M+m)g = 0 \\ \\ V_\vartheta = mgR\sin\vartheta = 0 \ , \end{cases}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} y = \frac{(M+m)g}{k} \\ \vartheta = 0, \quad \vartheta = \pi \ . \end{cases}$$

ⓒ88-7999-464-6

Le configurazioni di equilibrio sono dunque:

$$(y_1, \vartheta_1) = (\frac{(M+m)g}{k}, 0), \qquad (y_2, \vartheta_2) = (\frac{(M+m)g}{k}, \pi) \ .$$

Per discutere la stabilità delle posizioni di equilibrio, calcoliamo l'hessiano dell'energia potenziale:

$$\mathcal{H}(V)(y, \vartheta) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR\cos\vartheta \end{pmatrix} \ .$$

Nella posizione di equilibrio $(y_1, \vartheta_1) = (\frac{(M+m)g}{k}, 0)$ risulta:

$$\mathcal{H}(V)(y_1, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix} \ ;$$

poiché gli autovalori λ_1, λ_2 di tale matrice sono entrambi positivi ($\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = mgR$), la posizione di equilibrio (y_1, ϑ_1) è stabile.
Analogamente, l'hessiano calcolato in (y_2, ϑ_2) vale:

$$\mathcal{H}(V)(y_2, \vartheta_2) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -mgR \end{pmatrix} \ ;$$

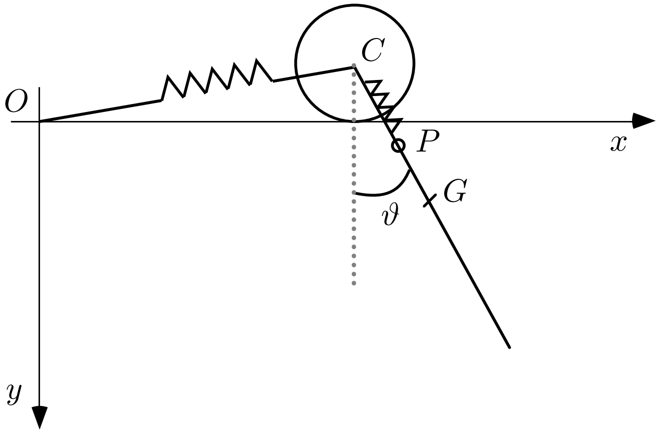
poiché un autovalore è negativo ($\lambda_2 = -mgR$), la posizione di equilibrio (y_2, ϑ_2) è instabile.

CR 3

In un piano verticale, un disco di massa M e raggio R rotola senza strisciare lungo l'asse delle ascisse. Il centro C del disco è collegato all'origine del sistema di riferimento tramite una molla di costante elastica $k_1 > 0$. Al centro del disco è appesa un'asta di massa m e lunghezza l. Lungo l'asta può muoversi un punto materiale P di massa μ, il quale è collegato al centro del disco tramite una molla di costante elastica $k_2 > 0$.

Sia x l'ascissa del centro del disco, ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale e $s > 0$ l'ascissa del punto P lungo l'asta, contata positivamente da C.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
2) determinare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità;
3) nel caso $k_1 = 0$ determinare gli integrali primi del sistema.



1) L'energia cinetica totale è somma delle energie cinetiche del disco T_d, dell'asta T_a e del punto P, T_P. Siano C e G i baricentri del disco e dell'asta. Le velocità angolari del disco e dell'asta sono, rispettivamente, $\omega_d = \frac{\dot{x}}{R}$ e $\omega_a = \dot{\vartheta}$, mentre i momenti d'inerzia sono pari a $I_C = \frac{MR^2}{2}$ e $I_G = \frac{ml^2}{12}$. Pertanto, l'energia cinetica del disco è:

$$T_d = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_d^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \ .$$

L'energia cinetica dell'asta è:

$$T_a = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_a^2 \ ,$$

dove $G(x_G, y_G) = G(x + \frac{l}{2}\sin\vartheta, \frac{l}{2}\cos\vartheta - R)$ è il baricentro dell'asta. Poiché $\underline{v}_G(\dot{x} + \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_G^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$, si ha:

$$T_a = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2 \ .$$

Infine, l'energia cinetica del punto P è:

$$T_P = \frac{1}{2}\mu v_P^2 \ .$$

Poiché $P(x_P, y_P) = P(x + s\sin\vartheta, s\cos\vartheta - R)$, si ha

$$\underline{v}_P(\dot{x} + \dot{s}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$$

ossia

$$v_P^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\sin\vartheta + 2s\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \ .$$

Pertanto, l'energia cinetica totale assume la seguente espressione:

$$T = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2$$
$$+ \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\sin\vartheta + 2s\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)\ .$$

L'energia potenziale delle due molle e della forza peso dell'asta e del punto P è data da:

$$V = \frac{1}{2}k_1|OC|^2 + \frac{1}{2}k_2|CP|^2 - mgy_G - \mu g y_P$$
$$= \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2s^2 - mg\frac{l}{2}\cos\vartheta - \mu gs\cos\vartheta + cost.$$

Infine, la Lagrangiana completa è:

$$L(x,\dot{x},s,\dot{s},\vartheta,\dot{\vartheta}) = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2$$
$$+ \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 2\dot{x}\dot{s}\sin\vartheta + 2s\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta)$$
$$- \frac{1}{2}k_1x^2 - \frac{1}{2}k_2s^2 + mg\frac{l}{2}\cos\vartheta + \mu gs\cos\vartheta\ .$$

2) Per determinare le posizioni di equilibrio, calcoliamo per quali valori delle variabili lagrangiane (x,ϑ,s) si annullano le derivate prime dell'energia potenziale ossia

$$\begin{cases} V_x = k_1x = 0 \\ \\ V_\vartheta = (mg\frac{l}{2} + \mu gs)\sin\vartheta = 0 \\ \\ V_s = k_2s - \mu g\cos\vartheta = 0\ . \end{cases}$$

Dalla prima relazione risulta $x = 0$, mentre la seconda relazione è soddisfatta per $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ (si osservi che essendo $s > 0$, la soluzione $s = -\frac{ml}{2\mu}$ risulta inaccettabile). Infine, dalla terza relazione risulta $s = \frac{\mu g\cos\vartheta}{k_2}$ e pertanto la soluzione $\vartheta = \pi$ è inaccettabile. In conclusione, l'unica possibile configurazione di equilibrio è:

$$(x_1,\vartheta_1,s_1) = (0,0,\frac{\mu g}{k_2})\ .$$

Per definire il carattere di stabilità o instabilità della posizione di equilibrio,

© 88-7999-464-6

determiniamo l'hessiano dell'energia potenziale:

$$\mathcal{H}(V)(x,\vartheta,s) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{mgl}{2} + \mu g s)\cos\vartheta & \mu g \sin\vartheta \\ 0 & \mu g \sin\vartheta & k_2 \end{pmatrix} .$$

Calcolando l'hessiano nella posizione di equilibrio si ottiene:

$$\mathcal{H}(V)(x_1,\vartheta_1,s_1) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mgl}{2} + \frac{\mu^2 g^2}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo la matrice diagonale, i tre autovalori, coincidenti con le componenti della diagonale principale, sono positivi. Pertanto la configurazione (x_1, ϑ_1, s_1) è di equilibrio stabile.

3) Ponendo $k_1 = 0$ la Lagrangiana risulta indipendente dalla variabile x. Dalla prima delle equazioni di Lagrange risulta:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0 ;$$

si ha quindi l'integrale primo:

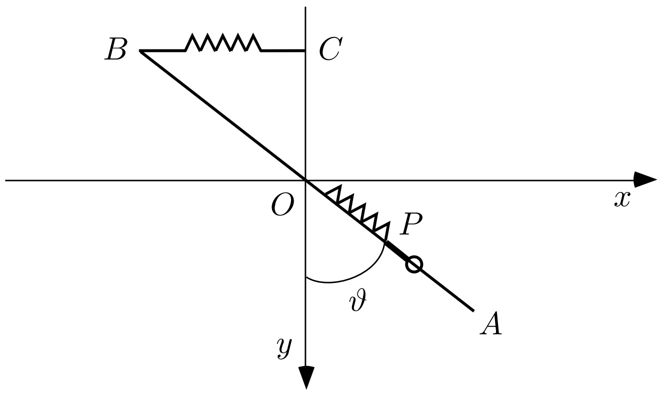
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (\frac{3}{2}M + m + \mu)\dot{x} + \frac{1}{2}ml\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \mu\dot{s}\sin\vartheta + \mu s\dot{\vartheta}\cos\vartheta = cost.$$

Inoltre, poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva l'energia meccanica totale $E = T + V$.

CR 4

Un'asta AB di massa M e lunghezza l è libera di ruotare attorno al suo baricentro, che coincide con l'origine di un sistema di riferimento in un piano verticale. Ad un estremo libero dell'asta è applicata una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre orizzontale. Lungo l'asta può scorrere un punto materiale P di massa m, collegato al baricentro dell'asta tramite una molla di costante elastica $k > 0$. Sia s l'ascissa parametrica di P lungo l'asta contata a partire dall'origine del riferimento e sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale.

1) Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema;
2) determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;
3) calcolare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



1) L'energia cinetica totale ha la forma:

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega_a^2 + \frac{1}{2} m v_P^2 \ ,$$

dove $I_O = \frac{Ml^2}{12}$ è il momento d'inerzia dell'asta attorno al baricentro, $\omega_a = \dot{\vartheta}$ è la velocità angolare dell'asta, mentre v_P è la velocità del punto P. Poiché $P(x_P, y_P) = P(s \sin\vartheta, s\cos\vartheta)$, si ha $\underline{v}_P(\dot{s}\sin\vartheta + s\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_P^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2$. Pertanto:

$$T = \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2) \ .$$

Detti B, C gli estremi di applicazione della prima molla, l'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} k|OP|^2 + \frac{1}{2} k|BC|^2 - mgy_P \\ &= \frac{1}{2}\frac{kl^2}{4}\sin^2\vartheta + \frac{1}{2} ks^2 - mgs\cos\vartheta \ . \end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana è pari alla differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale ossia

$$L(s, \dot{s}, \vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{Ml^2}{24}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2) - \frac{1}{2} ks^2 - \frac{1}{2}\frac{kl^2}{4}\sin^2\vartheta + mgs\cos\vartheta \ .$$

Le equazioni di Lagrange sono quindi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial s} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

© 88-7999-464-6

ed essendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{Ml^2}{12}\dot{\vartheta} + ms^2\dot{\vartheta} \ , \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = ms\dot{\vartheta}^2 - ks + mg\cos\vartheta \\ \\ \frac{Ml^2}{12}\ddot{\vartheta} + ms^2\ddot{\vartheta} + 2ms\dot{s}\dot{\vartheta} = -mgs\sin\vartheta - \frac{kl^2}{4}\sin\vartheta\cos\vartheta \ . \end{cases}$$

2) Per calcolare le posizioni di equilibrio, determiniamo i valori delle variabili lagrangiane (s, ϑ) per cui si annullano le derivate prime dell'energia potenziale ossia

$$\begin{cases} V_s = ks - mg\cos\vartheta = 0 \\ \\ V_\vartheta = \sin\vartheta(mgs + \frac{kl^2}{4}\cos\vartheta) = 0 \ . \end{cases}$$

Pertanto si ha $\vartheta = 0$ oppure $\vartheta = \pi$ e $s = \frac{mg}{k}\cos\vartheta$, mentre la soluzione $s = -\frac{kl^2}{4mg}\cos\vartheta$ conduce alle ulteriori posizioni di equilibrio $s = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $s = 0$, $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. In definitiva, le posizioni di equilibrio sono

$$(s_1, \vartheta_1) = (\frac{mg}{k}, 0) \ , \quad (s_2, \vartheta_2) = (-\frac{mg}{k}, \pi) \ ,$$
$$(s_3, \vartheta_3) = (0, \frac{\pi}{2}) \ , \quad (s_4, \vartheta_4) = (0, \frac{3}{2}\pi) \ .$$

Si osservi che le precedenti configurazioni di equilibrio sono equivalenti a coppie e corrispondono ad una rotazione di π dell'asta. Sarà pertanto sufficiente analizzare la stabilità delle configurazioni $(s_1, \vartheta_1) = (\frac{mg}{k}, 0)$ e $(s_3, \vartheta_3) = (0, \frac{\pi}{2})$. A tale scopo determiniamo l'hessiano dell'energia potenziale:

$$\mathcal{H}(V)(s, \vartheta) = \begin{pmatrix} k & mg\sin\vartheta \\ mg\sin\vartheta & mgs\cos\vartheta + \frac{kl^2}{4}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \end{pmatrix} \ .$$

Valutando l'hessiano nella posizione di equilibrio (s_1, ϑ_1) si ottiene:

$$\mathcal{H}(V)(s_1, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{m^2g^2}{k} + \frac{kl^2}{4} \end{pmatrix}$$

e quindi (s_1, ϑ_1) è di equilibrio stabile. Per quanto riguarda la posizione (s_3, ϑ_3) si ha:

$$\mathcal{H}(V)(s_3, \vartheta_3) = \begin{pmatrix} k & mg \\ mg & -\frac{kl^2}{4} \end{pmatrix} \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Poiché il determinante di tale matrice è negativo, la posizione di equilibrio (s_3, ϑ_3) è instabile.

3) Le frequenze di piccole oscillazioni sono soluzioni dell'equazione

$$\det(\mathcal{H}(V)(s_1, \vartheta_1) - \lambda T_{po}(s_1, \vartheta_1)) = 0 \ ,$$

dove $T_{po}(s_1, \vartheta_1)$ è la matrice associata all'energia cinetica di piccole oscillazioni, calcolata nella posizione di equilibrio. Pertanto:

$$T_{po}(s_1, \vartheta_1) = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12} + ms_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12} + \frac{m^3 g^2}{k^2} \end{pmatrix} \ .$$

Quindi, si ottiene:

$$\det \begin{pmatrix} k - m\lambda & 0 \\ 0 & \frac{m^2 g^2}{k} + \frac{kl^2}{4} - (\frac{Ml^2}{12} + \frac{m^3 g^2}{k^2})\lambda \end{pmatrix} = 0 \ ,$$

da cui si ricava:

$$\lambda_1 = \frac{k}{m} \ , \qquad \lambda_2 = \frac{3k(4m^2 g^2 + k^2 l^2)}{Ml^2 k^2 + 12 m^3 g^2} \ .$$

Le frequenze di piccole oscillazioni sono infine,

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_1} \ , \qquad \omega_{3,4} = \sqrt{\lambda_2} \ .$$

CR 5

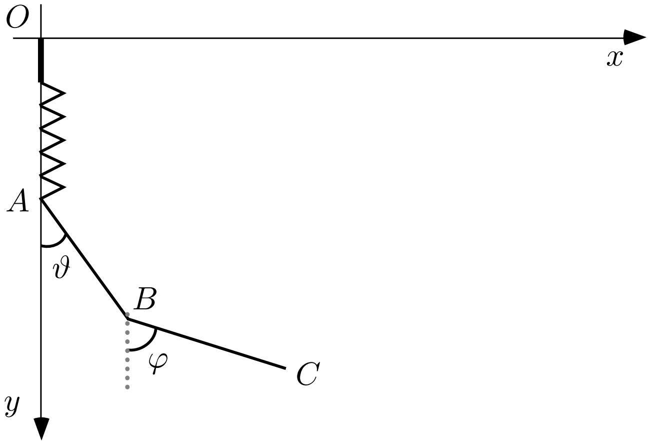
In un piano verticale, un'asta AB di massa m e lunghezza l ha un estremo vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse verticale e ad esso è applicata una molla di costante elastica $k > 0$, mentre l'altro estremo di applicazione coincide con l'origine del sistema di riferimento. La molla si mantiene sempre verticale. All'altra estremità dell'asta è appesa una seconda asta BC di massa m e lunghezza l. Siano ϑ e φ gli angoli che le due aste formano con la verticale.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;

2) individuare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità;

3) determinare la frequenza di piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

© 88-7999-464-6



1) La Lagrangiana è la differenza dell'energia cinetica delle due aste e dell'energia potenziale relativa alla forza peso e alla forza elastica. Siano G_1 e G_2 i baricentri delle due aste e $\underline{v}_{G_1}$, $\underline{v}_{G_2}$ le rispettive velocità, I_{G_1}, I_{G_2} i momenti d'inerzia rispetto ai baricentri e ω_{a_1}, ω_{a_2} le velocità angolari. Denotiamo con A, B, C gli estremi delle aste come indicato in figura e sia y l'ordinata di A. Dunque, l'energia cinetica totale ha la forma:

$$T = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}\omega_{a_1}^2 + \frac{1}{2}mv_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}\omega_{a_2}^2 \ .$$

Le coordinate dei baricentri sono:

$$G_1(x_{G_1}, y_{G_1}) = (\frac{l}{2}\sin\vartheta, y + \frac{l}{2}\cos\vartheta),$$

$$G_2(x_{G_2}, y_{G_2}) = (l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi, y + l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi)$$

ossia

$$\underline{v}_{G_1}(\frac{l}{2}\dot\vartheta\cos\vartheta, \dot y - \frac{l}{2}\dot\vartheta\sin\vartheta),\ \underline{v}_{G_2}(l\dot\vartheta\cos\vartheta + \frac{l}{2}\dot\varphi\cos\varphi, \dot y - l\dot\vartheta\sin\vartheta - \frac{l}{2}\dot\varphi\sin\varphi).$$

Pertanto si ottiene: $v_{G_1}^2 = \frac{l^2}{4}\dot\vartheta^2 + \dot y^2 - l\dot\vartheta\dot y\sin\vartheta$, $v_{G_2}^2 = l^2\dot\vartheta^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + \dot y^2 + l^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) - 2l\dot\vartheta\dot y\sin\vartheta - l\dot\varphi\dot y\sin\varphi$. Inoltre, i momenti d'inerzia sono pari a: $I_{G_1} = I_{G_2} = \frac{ml^2}{12}$, mentre le velocità angolari sono: $\omega_{a_1} = \dot\vartheta$ e $\omega_{a_2} = \dot\varphi$. Raccogliendo tutti i termini, l'energia cinetica assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned} T = &\frac{2}{3}ml^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) + m\dot y^2 \\ &- \frac{3}{2}ml\dot\vartheta\dot y\sin\vartheta - \frac{1}{2}ml\dot\varphi\dot y\sin\varphi \ . \end{aligned}$$

ⓒ88-7999-464-6

L'energia potenziale è data da:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k|OA|^2 - mgy_{G_1} - mgy_{G_2} \\
&= \frac{1}{2}ky^2 - 2mgy - \frac{3}{2}mgl\cos\vartheta - mg\frac{l}{2}\cos\varphi \ .
\end{aligned}
$$

Infine, la Lagrangiana è la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema:

$$
\begin{aligned}
L(y, \dot{y}, \vartheta, \dot{\vartheta}, \varphi, \dot{\varphi}) &= \frac{2}{3}ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) + m\dot{y}^2 \\
&- \frac{3}{2}ml\dot{\vartheta}\dot{y}\sin\vartheta - \frac{1}{2}ml\dot{\varphi}\dot{y}\sin\varphi - \frac{1}{2}ky^2 + 2mgy + \frac{3}{2}mgl\cos\vartheta + mg\frac{l}{2}\cos\varphi \ .
\end{aligned}
$$

2) Per determinare le posizioni di equilibrio, calcoliamo i valori di y, ϑ e φ in corrispondenza dei quali si annullano le derivate prime dell'energia potenziale:

$$
\begin{cases}
V_y = ky - 2mg = 0 \\
\\
V_\vartheta = \frac{3}{2}mgl\sin\vartheta = 0 \\
\\
V_\varphi = mgl\sin\varphi = 0 \ .
\end{cases}
$$

Da tali relazioni si ricava facilmente che le possibili configurazioni di equilibrio sono:

$$
\begin{aligned}
(y_1, \vartheta_1, \varphi_1) &= (\frac{2mg}{k}, 0, 0), \qquad (y_2, \vartheta_2, \varphi_2) = (\frac{2mg}{k}, \pi, 0), \\
(y_3, \vartheta_3, \varphi_3) &= (\frac{2mg}{k}, 0, \pi), \qquad (y_4, \vartheta_4, \varphi_4) = (\frac{2mg}{k}, \pi, \pi) \ .
\end{aligned}
$$

Per definire la stabilità delle posizioni di equilibrio, calcoliamo l'hessiano dell'energia potenziale:

$$
\mathcal{H}(V)(y, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mgl\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & mgl\cos\varphi \end{pmatrix} \ .
$$

Un semplice calcolo mostra che gli autovalori associati a $\mathcal{H}(V)(y_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ sono positivi e quindi la posizione di equilibrio $(y_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ è stabile. Viceversa, l'hessiano associato alle altre posizioni di equilibrio ammette almeno un autovalore negativo e quindi tali posizioni sono instabili.

© 88-7999-464-6

3) Per determinare la frequenza di piccole oscillazioni relativa alla configurazione $(y_1, \vartheta_1, \varphi_1)$ determiniamo la matrice A di piccole oscillazioni associata all'energia cinetica del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}ml^2 & \frac{1}{2}ml^2 \\ 0 & \frac{1}{2}ml^2 & \frac{1}{3}ml^2 \end{pmatrix} .$$

Le frequenze di piccole oscillazioni si ottengono risolvendo l'equazione:

$$\det(\mathcal{H}(V)(y_1, \vartheta_1, \varphi_1) - \lambda A) =$$
$$= \begin{pmatrix} k - 2m\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mgl - \frac{4}{3}ml^2\lambda & -\frac{1}{2}ml^2\lambda \\ 0 & -\frac{1}{2}ml^2\lambda & mgl - \frac{1}{3}ml^2\lambda \end{pmatrix} ,$$

da cui si ricava:

$$\lambda_1 = \frac{k}{2m} ,$$

mentre le altre soluzioni risolvono l'equazione:

$$(\frac{3}{2}mgl - \frac{4}{3}ml^2\lambda)(mgl - \frac{1}{3}ml^2\lambda) - \frac{m^2l^4}{4}\lambda^2 = 0$$

ossia

$$\lambda_{2,3} = \frac{33 \pm \sqrt{711}}{7} \frac{g}{l} .$$

Infine, le frequenze di piccole oscillazioni sono le radici quadrate di λ_1, λ_2, λ_3.

CR 6

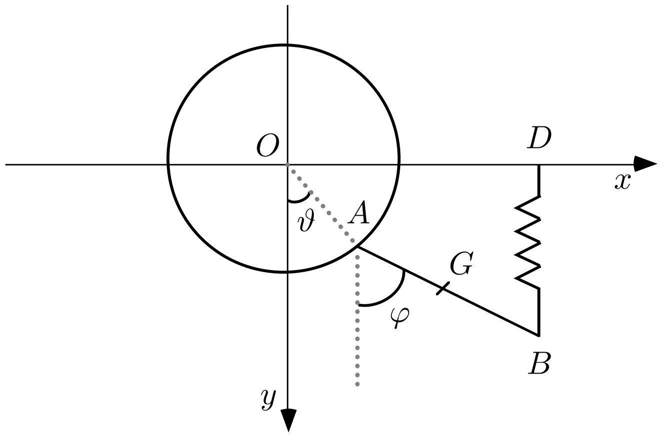
In un piano verticale un'asta di massa m e lunghezza l ha un'estremità (A) vincolata a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di raggio R. All'altra estremità dell'asta è collegata una molla di costante elastica $k > 0$ che si mantiene sempre verticale. Siano ϑ, φ gli angoli che OA e l'asta formano con la verticale.

1) Determinare la Lagrangiana del sistema;

2) verificare che $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ è una posizione di equilibrio;

3) determinare sotto quali condizioni sui parametri la configurazione $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$ è di equilibrio stabile;

4) sotto tali condizioni, calcolare la frequenza di piccole oscillazioni relativa alla posizione di equilibrio stabile $\vartheta = 0$, $\varphi = 0$.



1) Indicando con $G(x_G, y_G)$ il baricentro dell'asta, l'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \ ,$$

dove $I_G = \frac{ml^2}{12}$ è il momento d'inerzia e ω il modulo della velocità angolare dell'asta, che determiniamo dalla relazione:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge GA \ . \tag{V}$$

Poiché $A(R\sin\vartheta, R\cos\vartheta)$, $G(R\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi, R\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi)$, la (V) diventa:

$$\begin{pmatrix} R\dot\vartheta\cos\vartheta \\ -R\dot\vartheta\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\dot\vartheta\cos\vartheta + \frac{l}{2}\dot\varphi\cos\varphi \\ -R\dot\vartheta\sin\vartheta - \frac{l}{2}\dot\varphi\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 0 & 0 & \omega \\ -\frac{l}{2}\sin\varphi & -\frac{l}{2}\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

dove $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$, $\underline{i}_3$ sono i versori fondamentali del sistema di riferimento. Da tale relazione si ricava

$$\omega \ = \ -\dot\varphi \ .$$

Inoltre, essendo $v_G^2 = R^2\dot\vartheta^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + Rl\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)$, si ha

$$T = \frac{1}{2} m (R^2\dot\vartheta^2 + \frac{l^2}{3}\dot\varphi^2 + Rl\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)) \ .$$

© 88-7999-464-6

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_G + \frac{1}{2}k|BD|^2 \\ &= -mg(R\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi) + \frac{1}{2}k(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)^2 \end{aligned}$$

e quindi la Lagrangiana completa è data da:

$$\begin{aligned} L(\vartheta,\dot\vartheta,\varphi,\dot\varphi) = \frac{1}{2}m(R^2\dot\vartheta^2 + \frac{l^2}{3}\dot\varphi^2 + Rl\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)) \\ + mg(R\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi) - \frac{1}{2}k(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)^2 \ . \end{aligned}$$

2) Per determinare le posizioni di equilibrio annulliamo le derivate prime dell'energia potenziale:

$$\begin{cases} V_\vartheta = mgR\sin\vartheta - k(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)R\sin\vartheta = 0 \\ \\ V_\varphi = mg\frac{l}{2}\sin\varphi - k(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)l\sin\varphi = 0 \ , \end{cases}$$

che ammette come soluzione $(\vartheta,\varphi) = (0,0)$.

3) Per determinare il carattere di stabilità della configurazione $(\vartheta,\varphi) = (0,0)$, calcoliamo l'hessiano dell'energia potenziale. Poiché risulta:

$$\begin{cases} V_{\vartheta\vartheta} = mgR\cos\vartheta - kR\cos\vartheta(R\cos\vartheta + l\cos\varphi) + kR^2\sin^2\vartheta \\ \\ V_{\vartheta\varphi} = V_{\varphi\vartheta} = klR\sin\vartheta\sin\varphi \\ \\ V_{\varphi\varphi} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi - kl\cos\varphi(R\cos\vartheta + l\cos\varphi) + kl^2\sin^2\varphi \ , \end{cases}$$

si ha:

$$\mathcal{H}(V)(0,0) = \begin{pmatrix} mgR - kR(R+l) & 0 \\ 0 & mg\frac{l}{2} - kl(R+l) \end{pmatrix} \ .$$

Pertanto la configurazione $(\vartheta,\varphi) = (0,0)$ è stabile, se i due autovalori $\lambda_1 = mgR - kR(R+l)$ e $\lambda_2 = mg\frac{l}{2} - kl(R+l)$ sono entrambi positivi.

4) La matrice di piccole oscillazioni associata all'energia cinetica è:

$$A = \begin{pmatrix} mR^2 & \frac{1}{2}mRl \\ \frac{1}{2}mRl & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix} \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Pertanto le frequenze di piccole oscillazioni sono le radici quadrate delle soluzioni λ_1, λ_2 dell'equazione:

$$\det(\mathcal{H}(V)(0,0) - \lambda A) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} mgR - kR(R+l) - \lambda mR^2 & -\frac{1}{2}mRl\lambda \\ -\frac{1}{2}mRl\lambda & mg\frac{l}{2} - kl(R+l) - \frac{ml^2}{3}\lambda \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Posto $\alpha \equiv mgR - kR(R+l)$, $\beta \equiv mg\frac{l}{2} - kl(R+l)$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$ per la condizione di stabilità), si ha:

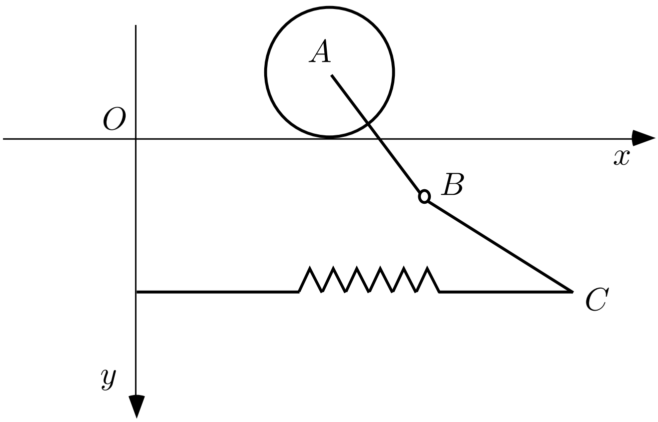
$$\frac{1}{12}m^2l^2R^2\lambda^2 - (mR^2\beta + \frac{ml^2}{3}\alpha)\lambda + \alpha\beta = 0 \ ,$$

le cui soluzioni sono i quadrati delle frequenze di piccole oscillazioni.

CR 7

In un piano verticale (Oxy) un disco di massa M e raggio R è vincolato a ruotare senza strisciare lungo l'asse delle ascisse. Al centro A del disco è appesa un'asta di massa m e lunghezza l, alla cui estremità B è collegata una seconda asta di massa m e lunghezza l, collegata all'asse verticale da una molla di costante elastica $k > 0$ vincolata a rimanere sempre orizzontale.

Scrivere la Lagrangiana del sistema.



Denotiamo con x l'ascissa del centro A del disco, con ϑ, φ gli angoli che le aste AB e BC formano con la verticale.
L'energia cinetica del disco è:

$$T_d = \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}I_A\omega^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \ .$$

© 88-7999-464-6

L'energia cinetica dell'asta AB si calcola come segue: denotando con G il suo baricentro, $G(x + \frac{l}{2}\sin\vartheta, \frac{l}{2}\cos\vartheta - R)$, si ha:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2 \ ,$$

essendo $v_G^2 = \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$. Analogamente, per l'asta BC si ha:

$$T_{BC} = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}I_D\omega^2 \ ,$$

dove D è il baricentro dell'asta: $D(x + l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi, l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi - R)$, da cui si ricava:

$$v_D^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi) \ .$$

Pertanto:

$$T_{BC} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}^2 \ .$$

L'energia potenziale delle due aste e della forza elastica è data dalla seguente espressione:

$$V = -mg(\frac{l}{2}\cos\vartheta - R) - mg(l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi - R) + \frac{1}{2}k(x + l\sin\vartheta + l\sin\varphi)^2 \ .$$

La Lagrangiana del sistema è data dalla somma dei contributi dell'energia cinetica del disco, delle aste e dell'energia potenziale:

$$L = T_d + T_{AB} + T_{BC} - V \ .$$

CR 8

Un'asta di massa m e lunghezza l è vincolata a ruotare attorno al suo baricentro, coincidente con l'origine di un sistema di riferimento (Oxy) di un piano verticale. Ad un'estremità dell'asta è appeso un disco di massa M e raggio R. Sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale e φ l'angolo che un raggio di riferimento del disco forma con la verticale.

1) Scrivere la Lagrangiana del sistema;
2) determinare le posizioni di equilibrio;
3) determinare gli integrali primi del sistema;

4) tramite gli integrali primi di cui al punto 3), ricondurre il problema al caso unidimensionale.

1) L'energia cinetica del sistema ha la forma:

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} I_G \omega_d^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 \ ,$$

dove $I_O = \frac{ml^2}{12}$ è il momento d'inerzia dell'asta, $I_G = \frac{MR^2}{2}$ è il momento d'inerzia del disco, ω_d è la velocità angolare, mentre $\underline{v}_G$ è la velocità del baricentro G del disco. Poiché

$$G(x_G, y_G) = G(\frac{l}{2} \sin\vartheta, \frac{l}{2} \cos\vartheta),$$

si ha $\underline{v}_G(\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_G^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2$. Calcoliamo la velocità angolare del disco tramite la formula:

$$\underline{v}_G = \underline{v}_D + \underline{\omega}_d \wedge DG \ ,$$

dove D è il punto di intersezione del raggio di riferimento con il disco,

$$D(\frac{l}{2} \sin\vartheta + R\sin\varphi, \frac{l}{2} \cos\vartheta + R\cos\varphi)$$

e quindi la velocità è

$$\underline{v}_D(\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + R\dot{\varphi}\cos\varphi, -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - R\dot{\varphi}\sin\varphi).$$

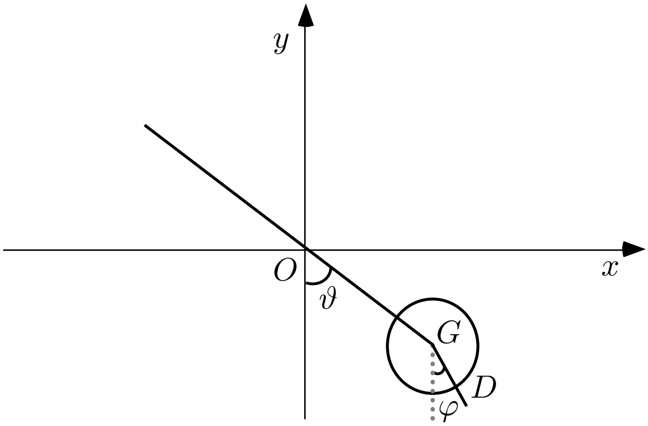
Dunque:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_d \\ -R\sin\varphi & -R\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta + R\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta - R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_d R\cos\varphi \\ -\omega_d R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\omega_d = -\dot{\varphi} \ .$$

© 88-7999-464-6



Pertanto:

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\dot{\varphi}^2 \ .$$

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$V = -Mgy_G = -Mg\frac{l}{2}\cos\vartheta \ .$$

Dunque, la Lagrangiana è:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{24}(m+3M)l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2 + Mg\frac{l}{2}\cos\vartheta \ .$$

2) Poiché l'energia potenziale dipende solo da ϑ, l'equilibrio nella variabile φ è indifferente, mentre rispetto alla variabile ϑ si ha:

$$V_\vartheta = Mg\frac{l}{2}\sin\vartheta = 0 \ ,$$

da cui si ricavano le posizioni di equilibrio:

$$\vartheta = 0 \ , \qquad \vartheta = \pi \ .$$

3) Poiché la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$E = \frac{1}{24}(m+3M)l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{MR^2}{4}\dot{\varphi}^2 - Mg\frac{l}{2}\cos\vartheta = cost. \qquad (E)$$

Inoltre, la Lagrangiana non dipende esplicitamente dalla variabile φ e quindi dall'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \ ,$$

si ottiene:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{MR^2}{2}\dot{\varphi} = cost. \qquad (pf)$$

4) Dalla (pf) si ricava:

$$\dot{\varphi} \ = \ \frac{2p_\varphi}{MR^2} \ ;$$

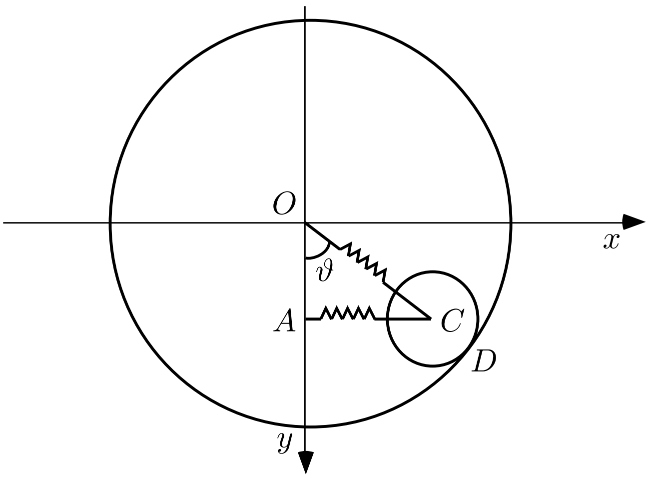
eliminando $\dot{\varphi}$ nella (E) si ottiene l'energia del sistema unidimensionale:

$$E = \frac{1}{24}(m+3M)l^2\dot{\vartheta}^2 - Mg\frac{l}{2}\cos\vartheta + \frac{p_\varphi^2}{MR^2} \ .$$

CR 9

In un piano verticale, un disco di massa m e raggio r è vincolato a ruotare senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R ($R > r$). Al centro C del disco sono collegate due molle, di costante elastica $k > 0$. La prima molla è applicata nell'origine del sistema di riferimento, mentre la seconda molla è vincolata a mantenersi sempre orizzontale (con estremi di applicazione A e C come in figura). Sia ϑ l'angolo che la congiungente OC forma con la verticale.

1) Scrivere l'equazione di Lagrange;
2) ritrovare l'equazione del moto tramite la seconda equazione cardinale.



© 88-7999-464-6

1) L'energia cinetica del disco ha la forma:

$$T = \frac{1}{2} I_C \omega_d^2 + \frac{1}{2} m v_C^2 \ ,$$

dove $I_C = \frac{mr^2}{2}$ è il momento d'inerzia del disco, ω_d è la velocità angolare, mentre $\underline{v}_C$ è la velocità del centro C. Poiché $C((R-r)\sin\vartheta, (R-r)\cos\vartheta)$, si ha $\underline{v}_C((R-r)\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -(R-r)\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_C^2 = (R-r)^2\dot{\vartheta}^2$. Calcoliamo la velocità angolare del disco tramite la formula:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_D + \underline{\omega}_d \wedge DC \ .$$

Denotiamo con $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ i versori fondamentali del sistema di riferimento; poiché $\underline{v}_D = 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (R-r)\dot{\vartheta}\cos\vartheta \\ -(R-r)\dot{\vartheta}\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_d \\ -r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega_d r\cos\vartheta \\ -\omega_d r\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ossia

$$\omega_d = \frac{R-r}{r}\dot{\vartheta} \ .$$

Pertanto:

$$T = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 \ = \ \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 \ .$$

L'energia potenziale è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k|OC|^2 + \frac{1}{2}k|AC|^2 - mgy_C \\
&= \frac{1}{2}k(R-r)^2\sin^2\vartheta - mg(R-r)\cos\vartheta + cost.
\end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana è data dalla seguente espressione:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2}k(R-r)^2\sin^2\vartheta + mg(R-r)\cos\vartheta \ .$$

L'equazione di Lagrange del moto è quindi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta}$$

ⓒ88-7999-464-6

ossia
$$\frac{3}{2}m(R-r)\ddot{\vartheta} + mg\sin\vartheta + k(R-r)\sin\vartheta\cos\vartheta \ = \ 0 \ . \qquad (L)$$

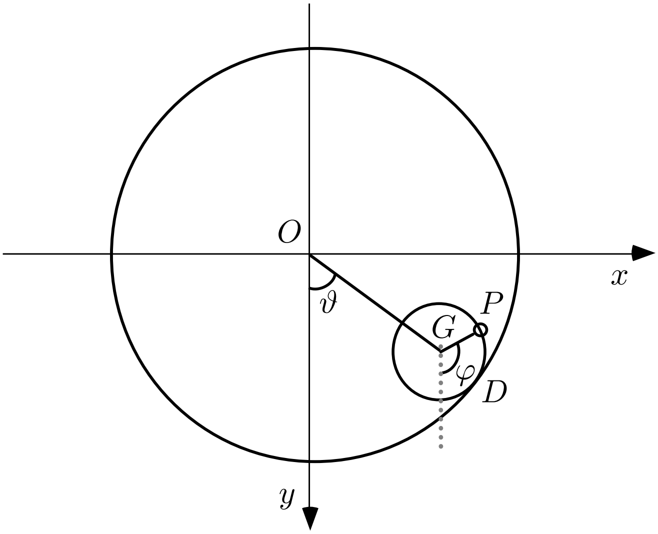
2) Possiamo utilizzare la seconda equazione cardinale per determinare l'equazione del moto. Scegliendo come polo il punto D di contatto tra il disco e la guida, è nullo il momento della reazione vincolare; pertanto la seconda equazione cardinale con polo D fornisce l'equazione pura del moto. Sia $\underline{\Gamma}_D$ il momento della quantità di moto con polo D e sia $\underline{M}_D^{(e)}$ il momento delle forze esterne (attive e reattive) con polo D. Allora, la seconda equazione cardinale si scrive nella forma:
$$\dot{\underline{\Gamma}}_D \ = \ \underline{M}_D^{(e)} \ .$$
Per quanto riguarda il momento angolare, si ha: $\Gamma_D = I_D\omega_d$, dove I_D è il momento d'inerzia con polo D. Dal teorema di Huyghens–Steiner, si ha:
$$I_D = I_C + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 \ .$$
Pertanto:
$$\Gamma_D \ = \ \frac{3}{2}mr(R-r)\dot{\vartheta} \ .$$
Il momento totale delle forze esterne è dato dalla seguente espressione:
$$\underline{M}_D^{(e)} = DC \wedge m\underline{g} - kDC \wedge AC - kDC \wedge OC \ .$$
Poiché le direzioni OC e DC sono coincidenti, $-kDC \wedge OC = 0$. Calcoliamo allora i due rimanenti prodotti vettoriali:
$$DC \wedge m\underline{g} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = -mgr\sin\vartheta\underline{k} \ ,$$
$$-kDC \wedge AC = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \\ -k(R-r)\sin\vartheta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -kr(R-r)\sin\vartheta\cos\vartheta\underline{k} \ .$$
Raccogliendo i risultati precedenti, la seconda equazione cardinale con polo D si riscrive nella forma:
$$\frac{3}{2}mr(R-r)\ddot{\vartheta} = -mgr\sin\vartheta - kr(R-r)\sin\vartheta\cos\vartheta \ ,$$
equivalente alla (L).

ⓒ 88-7999-464-6

CR 10

In un piano verticale, un anello di massa M e raggio r ruota senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R $(R > r)$. Lungo l'anello può scorrere un punto materiale P di massa m. Indichiamo con G il baricentro dell'anello e con D il punto di contatto anello-guida. Siano ϑ e φ gli angoli che OG e GP formano con la verticale.

1) Scrivere le equazioni di Lagrange;
2) ritrovare le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali;
3) determinare la reazione vincolare che si esercita tra il punto materiale e l'anello.



1) L'energia cinetica dell'anello e del punto P è data da:

$$T = \frac{1}{2} I_G \omega_a^2 + \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} m v_P^2 \ ,$$

dove $I_G = Mr^2$ è il momento d'inerzia dell'anello, ω_a è la sua velocità angolare, mentre $\underline{v}_G$ e $\underline{v}_P$ sono le velocità del baricentro G dell'anello e del punto P. Poiché $G(x_G, y_G) = ((R-r)\sin\vartheta, (R-r)\cos\vartheta)$, $P(x_P, y_P) = ((R-r)\sin\vartheta + r\sin\varphi, (R-r)\cos\vartheta + r\cos\varphi)$, si ha: $\underline{v}_G = ((R-r)\dot\vartheta\cos\vartheta, -(R-r)\dot\vartheta\sin\vartheta)$, $\underline{v}_P = ((R-r)\dot\vartheta\cos\vartheta + r\dot\varphi\cos\varphi, -(R-r)\dot\vartheta\sin\vartheta - r\dot\varphi\sin\varphi)$. Dunque, $v_G^2 = (R-r)^2\dot\vartheta^2$, $v_P^2 = (R-r)^2\dot\vartheta^2 + r^2\dot\varphi^2 + 2r(R-r)\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)$.
Calcoliamo la velocità angolare dell'anello tramite la formula:

$$\underline{v}_G = \underline{v}_D + \underline{\omega}_a \wedge DG \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Siano $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ i versori fondamentali del sistema di riferimento; poiché $\underline{v}_D = 0$, si ha:

$$\begin{pmatrix} (R-r)\dot\vartheta\cos\vartheta \\ -(R-r)\dot\vartheta\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & \omega_a \\ -r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_a r\cos\vartheta \\ -\omega_a r\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$\omega_a = \frac{R-r}{r}\dot\vartheta \ .$$

Pertanto:

$$T = M(R-r)^2\dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}[(R-r)^2\dot\vartheta^2 + r^2\dot\varphi^2 + 2r(R-r)\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)] \ .$$

L'energia potenziale è data da:

$$\begin{aligned} V &= -Mgy_G - mgy_P \\ &= -Mg(R-r)\cos\vartheta - mg[(R-r)\cos\vartheta + r\cos\varphi] \ . \end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana è data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned} L(\vartheta,\dot\vartheta,\varphi,\dot\varphi) &= \frac{1}{2}(2M+m)(R-r)^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\varphi^2 \\ &+ mr(R-r)\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) + (M+m)g(R-r)\cos\vartheta + mgr\cos\varphi \ . \end{aligned}$$

Le equazioni di Lagrange del moto sono:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} \end{cases}$$

ed essendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta} &= (2M+m)(R-r)^2\dot\vartheta + mr(R-r)\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) \\ \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} &= mr^2\dot\varphi + mr(R-r)\dot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi) \ , \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{cases} (2M+m)(R-r)\ddot\vartheta + mr\ddot\varphi\cos(\vartheta-\varphi) + mr\dot\varphi^2\sin(\vartheta-\varphi) = \\ \qquad = -(M+m)g\sin\vartheta \\ \\ mr^2\ddot\varphi + mr(R-r)\ddot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi) - mr(R-r)\dot\vartheta^2\sin(\vartheta-\varphi) = \\ \qquad = -mgr\sin\varphi \ . \end{cases}$$

© 88-7999-464-6

2) La seconda equazione cardinale con polo D per l'anello e il punto materiale ha la forma:

$$\underline{\dot{\Gamma}}_D + mDP \wedge \underline{a}_P = DG \wedge M\underline{g} + DP \wedge m\underline{g} \ , \qquad (II)$$

dove $\underline{\Gamma}_D = I_D \underline{\omega}_a$ è il momento angolare dell'anello rispetto al polo D e $\underline{a}_P$ è l'accelerazione del punto P. Dal teorema di Huyghens–Steiner, si ha: $I_D = I_G + Mr^2 = 2Mr^2$, mentre in precedenza abbiamo trovato che $\underline{\omega}_a = \frac{R-r}{r}\dot{\vartheta}\underline{k}$, laddove $\underline{k}$ è il versore dell'asse z.
Calcoliamo l'accelerazione di P:

$$\begin{aligned}\underline{a}_P = (a_x, a_y) = ((R-r)\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - (R-r)\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ -(R-r)\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - (R-r)\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi) \ .\end{aligned}$$

Allora, indicando con $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ i versori fondamentali del sistema di riferimento, i precedenti prodotti vettoriali sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} mDP \wedge \underline{a}_P &= m \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin\vartheta + r\sin\varphi & -r\cos\vartheta + r\cos\varphi & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= m[(-r\sin\vartheta + r\sin\varphi)a_y - (-r\cos\vartheta + r\cos\varphi)a_x]\underline{k} \\ &= m[r(R-r)\ddot{\vartheta} - (R-r)r\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) - r^2\ddot{\varphi} \\ &+ r^2\ddot{\varphi}\cos(\vartheta-\varphi) - r^2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\vartheta) - r(R-r)\dot{\vartheta}^2\sin(\varphi-\vartheta)]\underline{k} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DG \wedge M\underline{g} &= \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin\vartheta & -r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & Mg & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-Mgr\sin\vartheta)\underline{k} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DP \wedge m\underline{g} &= \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -r\sin\vartheta + r\sin\varphi & -r\cos\vartheta + r\cos\varphi & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} \\ &= mgr(-\sin\vartheta + \sin\varphi)\underline{k} \ . \end{aligned}$$

Raccogliendo tutti i termini la (II) diventa:

$$\begin{aligned} &2M(R-r)\ddot{\vartheta} + m(R-r)\ddot{\vartheta} - m(R-r)\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) - mr\ddot{\varphi} \\ &+ mr\ddot{\varphi}\cos(\vartheta-\varphi) + mr\dot{\varphi}^2\sin(\vartheta-\varphi) + m(R-r)\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta-\varphi) \qquad (IIb) \\ &= -Mg\sin\vartheta - mg\sin\vartheta + mg\sin\varphi \ , \end{aligned}$$

che è uguale alla differenza delle due equazioni di Lagrange.

ⓒ88-7999-464-6

Utilizziamo ora la prima equazione cardinale per il punto P:

$$m\underline{a}_P = m\underline{g} + \underline{\Phi}_P \ , \qquad (IIP)$$

dove $\underline{\Phi}_P$ è la reazione vincolare tra anello e punto materiale. Per ottenere un'equazione pura, proiettiamo la (IIP) lungo la direzione ortogonale a GP; pertanto, moltiplichiamo scalarmente la (IIP) con il versore $(\cos\varphi, -\sin\varphi)$:

$$ma_x \cos\varphi - ma_y \sin\varphi = -mg\sin\varphi$$

ossia

$$r\ddot{\varphi} + (R-r)\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) - (R-r)\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta-\varphi) = -g\sin\varphi \ ,$$

equivalente alla seconda equazione di Lagrange. Sottraendo tale equazione dalla (IIb) si ottiene la prima equazione di Lagrange.

3) Per determinare la reazione vincolare $\underline{\Phi}_P$ tra il punto materiale e l'anello proiettiamo la (IIP) lungo la direzione GP ossia moltiplichiamo scalarmente per il versore $(-\sin\varphi, -\cos\varphi)$:

$$-ma_x \sin\varphi - ma_y\cos\varphi = -mg\cos\varphi + \Phi_P$$

ossia

$$-m(R-r)\ddot{\vartheta}\sin(\varphi-\vartheta) + m(R-r)\dot{\vartheta}^2\cos(\vartheta-\varphi) + mr\dot{\varphi}^2 = -mg\cos\varphi + \Phi_P \ ,$$

e quindi:

$$\Phi_P = -m(R-r)\ddot{\vartheta}\sin(\varphi-\vartheta) + m(R-r)\dot{\vartheta}^2\cos(\vartheta-\varphi) + mr\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \ .$$

CR 11

In un piano verticale, un disco di massa M e raggio R ruota senza strisciare lungo l'asse orizzontale. Al centro del disco C è appesa un'asta di massa m e lunghezza $2l$ e in C è attaccata una molla di costante elastica $k > 0$, il cui estremo di applicazione coincide con l'origine del sistema di riferimento. Indicata con x l'ascissa del centro C e con ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale:

1) scrivere le equazioni di Lagrange del moto;

2) ritrovare le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali.

1) La Lagrangiana è pari alla differenza dell'energia cinetica (del disco e dell'asta) e dell'energia potenziale (relativa alla forza peso e alla forza elastica). Siano $C(x_C, y_C) = (x, -R)$ il baricentro del disco, $G(x_G, y_G) =$

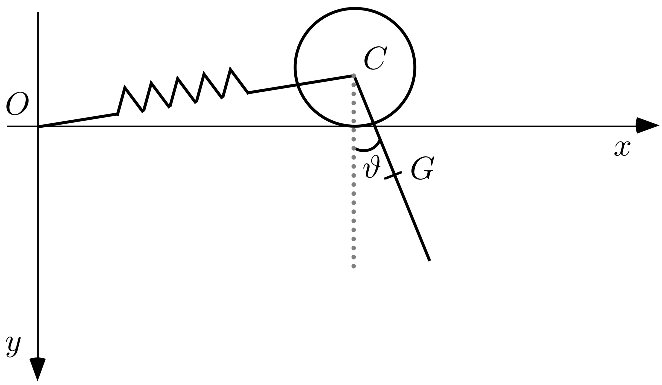
© 88-7999-464-6

$(x + l\sin\vartheta, l\cos\vartheta - R)$ il baricentro dell'asta. Pertanto le rispettive velocità sono: $\underline{v}_C = (\dot{x}, 0)$, $\underline{v}_G = (\dot{x} + l\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta)$ ossia $v_C^2 = \dot{x}^2$, $v_G^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\vartheta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$. L'energia cinetica T assume dunque la forma:

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega_d^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_a^2 \ ,$$

dove $I_C = \frac{MR^2}{2}$ e $I_G = \frac{ml^2}{3}$ sono i momenti d'inerzia del disco e dell'asta, mentre $\omega_d = \frac{\dot{x}}{R}$ e $\omega_a = -\dot{\vartheta}$ sono le rispettive velocità angolari. Pertanto, si ottiene:

$$T = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{3}\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta \ .$$



L'energia potenziale è:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k|OC|^2 - mgy_G \\ &= \frac{1}{2}kx^2 - mgl\cos\vartheta + \text{cost.} \end{aligned}$$

Infine, la Lagrangiana totale assume la forma:

$$L(x, \dot{x}, \vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{3}\dot{\vartheta}^2 + ml\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \frac{1}{2}kx^2 + mgl\cos\vartheta \ .$$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} \\ \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (\frac{3}{2}M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - ml\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = -kx \\ \frac{4ml^2}{3}\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}\cos\vartheta = -mgl\sin\vartheta \ . \end{cases}$$

2) Per ottenere le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali, calcoliamo la seconda equazione cardinale per l'intero sistema (disco e asta) con polo D, dove D è il punto di contatto tra il disco e la guida orizzontale:

$$\underline{\dot{\Gamma}}_D^{(d)} + \underline{\dot{\Gamma}}_D^{(a)} = DG \wedge m\underline{g} + DC \wedge (-kOC) \ , \tag{E}$$

dove $\underline{\Gamma}_D^{(d)}$ e $\underline{\Gamma}_D^{(a)}$ sono i momenti angolari del disco e dell'asta con polo D; indicando con $(\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3)$ i versori fondamentali del sistema di riferimento, si ha:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\Gamma}}_D^{(d)} &= I_D \underline{\dot{\omega}}_d = \frac{3}{2} MR\ddot{x}\ \underline{i}_3 \\ \underline{\dot{\Gamma}}_D^{(a)} &= I_G \underline{\dot{\omega}}_a + mDG \wedge \underline{a}_G \ , \end{aligned}$$

poiché dal teorema di Huyghens–Steiner si ha

$$I_D = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \ ,$$

mentre $\underline{a}_G$ è l'accelerazione del baricentro dell'asta:

$$\begin{aligned} \underline{a}_G &= (a_x, a_y) \\ &= (\ddot{x} + l\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta, -l\ddot{\vartheta}\sin\vartheta - l\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta) \ . \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} DG \wedge \underline{a}_G &= \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ l\sin\vartheta & l\cos\vartheta - R & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= [l\sin\vartheta a_y - (l\cos\vartheta - R)a_x]\ \underline{i}_3 \\ &= [-l^2\ddot{\vartheta} - l\ddot{x}\cos\vartheta + R\ddot{x} + Rl\ddot{\vartheta}\cos\vartheta - Rl\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta]\ \underline{i}_3 \ . \end{aligned}$$

Calcoliamo i rimanenti prodotti vettoriali:

$$DG \wedge m\underline{g} = \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ l\sin\vartheta & l\cos\vartheta - R & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = mgl\sin\vartheta\underline{i}_3 \ ,$$

$$DC \wedge (-kOC) = \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 0 & -R & 0 \\ -kx & kR & 0 \end{pmatrix} = -kRx\underline{i}_3 \ .$$

© 88-7999-464-6

Raccogliendo tutti i termini la (E) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}MR\ddot{x} - \frac{ml^2}{3}\ddot{\vartheta} - ml^2\ddot{\vartheta} - ml\ddot{x}\cos\vartheta + mR\ddot{x} + mRl\ddot{\vartheta}\cos\vartheta \\ - mRl\dot{\vartheta}^2\sin\vartheta = mgl\sin\vartheta - kRx \ , \end{aligned} \tag{F}$$

pari alla differenza tra la prima equazione di Lagrange (moltiplicata per R) trovata al punto 1) e la seconda equazione di Lagrange.
Applichiamo ora la seconda equazione cardinale con polo C alla sola asta; poiché il contributo della reazione vincolare esercitata dal disco sull'asta si annulla, si ha:

$$\underline{\dot{\Gamma}}_C^{(a)} = CG \wedge m\underline{g} \ ,$$

dove $\underline{\dot{\Gamma}}_C^{(a)} = I_G \underline{\dot{\omega}}_a + mCG \wedge \underline{a}_G$. Poiché $CG = (l\sin\vartheta, l\cos\vartheta)$, si ha:

$$\begin{aligned} mCG \wedge \underline{a}_G &= \det\begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ ml\sin\vartheta & ml\cos\vartheta & 0 \\ a_x & a_y & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-ml^2\ddot{\vartheta} - ml\ddot{x}\cos\vartheta)\underline{i}_3 \ . \end{aligned}$$

Pertanto, la seconda equazione cardinale per l'asta diventa:

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\vartheta} + ml\ddot{x}\cos\vartheta = -mgl\sin\vartheta \ ,$$

che combinata con la (F) fornisce le equazioni del moto cercate.

CR 12

Un'asta OA di massa m e lunghezza l è appesa all'origine di un sistema di riferimento in un piano verticale. Alla estremità libera (A) è appesa una seconda asta (AB) di massa m e lunghezza l. All'estremità B della seconda asta è collegata una molla di costante elastica $k > 0$, vincolata a rimanere sempre verticale. Siano ϑ e φ gli angoli che le due aste formano con la verticale.

1) Scrivere le equazioni di Lagrange;

2) ritrovare le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali.

1) La Lagrangiana completa è uguale alla differenza dell'energia cinetica delle due aste e dell'energia potenziale della molla e delle forze peso. Siano G, H i baricentri delle due aste e I_G, I_H i rispettivi momenti d'inerzia. Allora, l'energia cinetica assume la forma:

$$T = \frac{1}{2}I_G\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_H\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}mv_H^2 \ ,$$

ⓒ88-7999-464-6

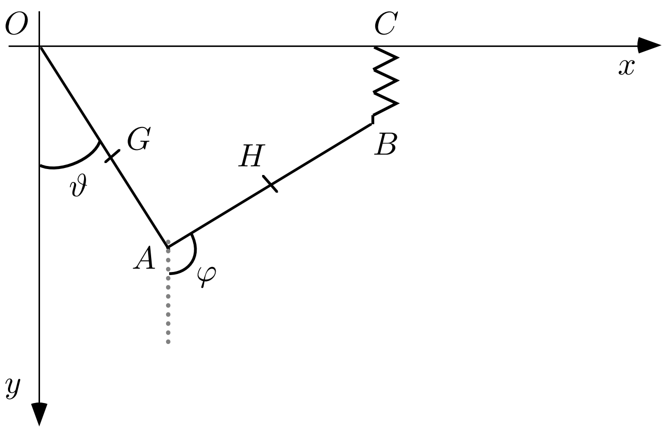
dove $\omega_1 = -\dot{\vartheta}$, $\omega_2 = -\dot{\varphi}$ sone le velocità angolari delle due aste e v_G, v_H, i moduli delle velocità dei baricentri. Poiché $G(x_G, y_G) = (\frac{l}{2}\sin\vartheta, \frac{l}{2}\cos\vartheta)$, $H(x_H, y_H) = (l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi, l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi)$, le velocità sono

$$\underline{v}_G = (\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\cos\vartheta, -\frac{l}{2}\dot{\vartheta}\sin\vartheta),$$

$$\underline{v}_H = (l\dot{\vartheta}\cos\vartheta + \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi, -l\dot{\vartheta}\sin\vartheta - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi)$$

ossia

$$\begin{aligned} v_G^2 &= \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2 \\ v_H^2 &= l^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)\ . \end{aligned}$$



Poiché $I_G = I_H = \frac{ml^2}{12}$, l'energia cinetica è data dalla seguente espressione:

$$T = \frac{1}{2}\frac{4ml^2}{3}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta - \varphi)\ .$$

Inoltre, $|BC|^2 = (l\cos\vartheta + l\cos\varphi)^2$ e quindi l'energia potenziale è:

$$\begin{aligned} V &= -mgy_G - mgy_H + \frac{1}{2}k|BC|^2 \\ &= -\frac{3}{2}mgl\cos\vartheta - mg\frac{l}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)^2\ . \end{aligned}$$

© 88-7999-464-6

Pertanto la Lagrangiana completa assume la forma:

$$L(\vartheta,\dot\vartheta,\varphi,\dot\varphi)=\frac{1}{2}\frac{4ml^2}{3}\dot\vartheta^2+\frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot\varphi^2+\frac{1}{2}ml^2\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)$$
$$+\frac{3}{2}mgl\cos\vartheta+mg\frac{l}{2}\cos\varphi-\frac{1}{2}kl^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)^2\ .$$

Le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\vartheta}=\frac{\partial L}{\partial\vartheta}\\[2ex] \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=\frac{\partial L}{\partial\varphi}\end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases}\frac{4}{3}ml^2\ddot\vartheta+\frac{1}{2}ml^2\ddot\varphi\cos(\vartheta-\varphi)+\frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2\sin(\vartheta-\varphi)=-\frac{3}{2}mgl\sin\vartheta\\[2ex] +kl^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\sin\vartheta\\[2ex] \frac{ml^2}{3}\ddot\varphi+\frac{ml^2}{2}\ddot\vartheta\cos(\vartheta-\varphi)-\frac{ml^2}{2}\dot\vartheta^2\sin(\vartheta-\varphi)=-\frac{mgl}{2}\sin\varphi\\[2ex] +kl^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\sin\varphi\ .\end{cases}$$

2) Per ritrovare le equazioni del moto tramite le equazioni cardinali, calcoliamo la seconda equazione cardinale per le due aste con polo O:

$$\underline{\dot\Gamma}_O^{(1)}+\underline{\dot\Gamma}_O^{(2)}=OG\wedge m\underline{g}+OH\wedge m\underline{g}+OB\wedge(-kCB)\ , \qquad (E)$$

dove le derivate dei momenti angolari delle aste hanno le seguenti espressioni:

$$\underline{\dot\Gamma}_O^{(1)}=I_O\dot\omega_1\underline{i}_3=-\frac{ml^2}{3}\ddot\vartheta\underline{i}_3$$
$$\underline{\dot\Gamma}_O^{(2)}=I_H\dot\omega_2\underline{i}_3+mOH\wedge\underline{a}_H\ ,$$

dove abbiamo usato il teorema di Huyghens–Steiner per la valutazione di I_O ($I_O=\frac{ml^2}{12}+\frac{ml^2}{4}$) e dove abbiamo indicato con $\underline{a}_H$ l'accelerazione del baricentro della seconda asta ($\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$, $\underline{i}_3$ sono i versori fondamentali del sistema di riferimento). Poiché

$$\underline{a}_H=\Big(l\ddot\vartheta\cos\vartheta-l\dot\vartheta^2\sin\vartheta+\frac{l}{2}\ddot\varphi\cos\varphi-\frac{l}{2}\dot\varphi^2\sin\varphi,$$
$$-l\ddot\vartheta\sin\vartheta-l\dot\vartheta^2\cos\vartheta-\frac{l}{2}\ddot\varphi\sin\varphi-\frac{l}{2}\dot\varphi^2\cos\varphi\Big)\ ,$$

©88-7999-464-6

si ha:

$$
\begin{aligned}
mOH \wedge \underline{a}_H &= \left[\left(l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi\right)a_y - \left(l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi\right)a_x\right]\underline{i}_3 \\
&= -ml^2\left[\ddot{\vartheta} + \frac{1}{4}\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}\ddot{\varphi}\cos(\vartheta-\varphi) + \frac{1}{2}\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi)\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta-\varphi) + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\vartheta-\varphi)\right]\underline{i}_3 \ .
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda i rimanenti prodotti vettoriali, si ha:

$$
OG \wedge m\underline{g} = \det\begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ \frac{l}{2}\sin\vartheta & \frac{l}{2}\cos\vartheta & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = mg\frac{l}{2}\sin\vartheta\underline{i}_3 \ ,
$$

$$
\begin{aligned}
OH \wedge m\underline{g} &= \det\begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi & l\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} \\
&= mg\left(l\sin\vartheta + \frac{l}{2}\sin\varphi\right)\underline{i}_3 \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
OB \wedge (-kCB) &= \det\begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ l\sin\vartheta + l\sin\varphi & l\cos\vartheta + l\cos\varphi & 0 \\ 0 & -kl(\cos\vartheta + \cos\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\
&= -kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)(\sin\vartheta + \sin\varphi)\underline{i}_3 \ .
\end{aligned}
$$

Raccogliendo tutti i termini la (E) assume la forma:

$$
\begin{aligned}
&\frac{ml^2}{3}\ddot{\vartheta} + \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi} + ml^2\ddot{\vartheta} + \frac{ml^2}{4}\ddot{\varphi} + \frac{ml^2}{2}\ddot{\varphi}\cos(\vartheta-\varphi) + \frac{ml^2}{2}\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) \\
&- \frac{ml^2}{2}\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta-\varphi) + \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2\sin(\vartheta-\varphi) \\
&= -\frac{3}{2}mgl\sin\vartheta - \frac{1}{2}mgl\sin\varphi + kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)(\sin\vartheta + \sin\varphi) \ ,
\end{aligned} \tag{F}
$$

pari alla somma delle due equazioni di Lagrange determinate al punto 1).
Applichiamo ora la seconda equazione cardinale con polo A alla seconda asta; poiché il contributo della reazione vincolare esercitata dalla prima asta si annulla, si ha:

$$
\underline{\dot{\Gamma}}_A^{(2)} = AH \wedge m\underline{g} + AB \wedge (-kCB) \ , \tag{G}
$$

ⓒ 88-7999-464-6

dove $\dot{\underline{\Gamma}}_A^{(2)} = I_H \underline{\dot{\omega}}_2 + mAH \wedge \underline{a}_H$. Calcoli simili ai precedenti portano a:

$$AH \wedge \underline{a}_H = \left[-\frac{l^2}{2}\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) + \frac{l^2}{2}\dot{\vartheta}^2 \sin(\vartheta-\varphi) - \frac{l^2}{4}\ddot{\varphi} \right] \underline{i}_3 \ ,$$

poiché $AH = (\frac{l}{2}\sin\varphi, \frac{l}{2}\cos\varphi)$. Inoltre, poiché

$$AH \wedge m\underline{g} = \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ \frac{l}{2}\sin\varphi & \frac{l}{2}\cos\varphi & 0 \\ 0 & mg & 0 \end{pmatrix} = mg\frac{l}{2}\sin\varphi \underline{i}_3 \ ,$$

$$\begin{aligned} AB \wedge (-kCB) &= -k \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ l\sin\varphi & l\cos\varphi & 0 \\ 0 & l(\cos\vartheta + \cos\varphi) & 0 \end{pmatrix} \\ &= -kl^2(\cos\vartheta + \cos\varphi)\sin\varphi \underline{i}_3 \ , \end{aligned}$$

la (G) diventa:

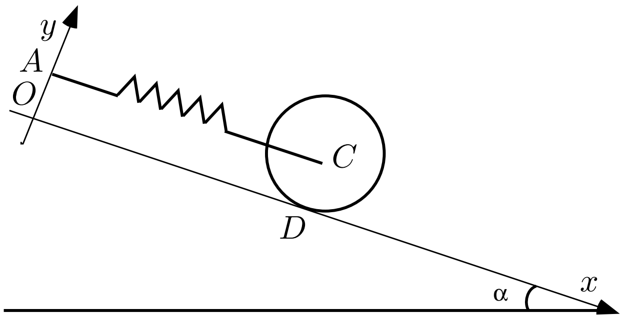
$$\begin{aligned} &\frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi} + \frac{ml^2}{2}\ddot{\vartheta}\cos(\vartheta-\varphi) - \frac{ml^2}{2}\dot{\vartheta}^2\sin(\vartheta-\varphi) = -mg\frac{l}{2}\sin\varphi \\ &+ kl^2(\cos\vartheta+\cos\varphi)\sin\varphi \ ; \end{aligned}$$

combinando la precedente equazione con la (F) si ottengono le equazioni del moto cercate.

CR 13

In un piano verticale, un disco di massa m e raggio R rotola senza strisciare lungo una guida inclinata di angolo α rispetto all'orizzontale. Al centro C del disco è collegata una molla di costante elastica $k > 0$. Il punto A di applicazione è tale che la molla si mantenga sempre parallela rispetto al piano inclinato. Sia Oxy un sistema di riferimento con l'asse x coincidente con la direzione del piano inclinato e l'asse y perpendicolare ad essa (vedere figura). Detta x l'ascissa del centro C del disco,

1) determinare l'equazione di Lagrange del moto;
2) ritrovare l'equazione del moto tramite le equazioni cardinali.



1) La Lagrangiana è pari alla differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale (relativa alla forza peso e alla forza elastica). Sia $C(x_C, y_C) = (x, R)$ il baricentro del disco; allora:

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \ ,$$

dove $v_C^2 = \dot{x}^2$ è il quadrato della velocità del baricentro del disco, $I_C = \frac{mR^2}{2}$ è il momento d'inerzia del disco e $\omega = -\frac{\dot{x}}{R}$ è la velocità angolare. Pertanto:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{x}^2}{R^2} \ = \ \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \ .$$

L'energia potenziale è data dal contributo della forza peso del disco e della forza elastica della molla; a meno di costanti inessenziali, la quota di C vale $-x\sin\alpha$ e quindi:

$$V = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

Pertanto,

$$L(x, \dot{x}) = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + mgx\sin\alpha - \frac{1}{2}kx^2 \ .$$

L'equazione del moto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

diventa:

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} \ = \ mg\sin\alpha - kx \ .$$

2) Per ricavare l'equazione del moto tramite le equazioni cardinali, applichiamo la seconda equazione cardinale con polo D, dove D è il punto di contatto disco–guida:

$$\underline{\dot{\Gamma}}_D = DC \wedge m\underline{g} + DC \wedge (-kAC) \ , \qquad (E)$$

dove

$$\underline{\Gamma}_D = I_D \omega \underline{i}_3 = -\frac{3}{2} m R \dot{x} \underline{i}_3$$

(dal teorema di Huyghens–Steiner: $I_D = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$) avendo denotato con $\underline{i}_1$, $\underline{i}_2$, $\underline{i}_3$ i versori fondamentali. Inoltre:

$$DC \wedge m\underline{g} = \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 0 & R & 0 \\ mg\sin\alpha & -mg\cos\alpha & 0 \end{pmatrix} = -mgR\sin\alpha \ \underline{i}_3 \ ,$$

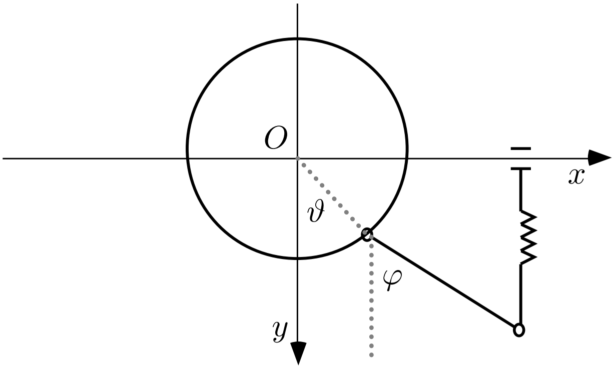
$$DC \wedge (-kAC) = \det \begin{pmatrix} \underline{i}_1 & \underline{i}_2 & \underline{i}_3 \\ 0 & R & 0 \\ -kx & 0 & 0 \end{pmatrix} = kxR \ \underline{i}_3 \ .$$

Raccogliendo i termini la (E) diventa:

$$\frac{3}{2} m R \ddot{x} \ = \ mgR\sin\alpha - kRx \ .$$

Esercizi proposti

1) In un piano verticale, un'asta di massa m e lunghezza l ha un estremo vincolato a scorrere lungo una guida circolare di raggio $R > 0$. L'altra estremità dell'asta è collegata all'asse delle ascisse tramite una molla di costante elastica $k > 0$ vincolata a rimanere sempre verticale. Determinare le equazioni di Lagrange del sistema.



Soluzione: La Lagrangiana del sistema è

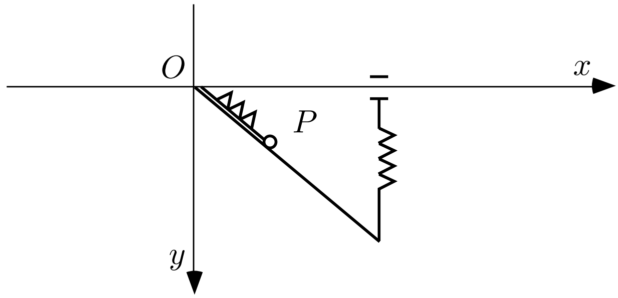
$$L(\dot\vartheta, \dot\varphi, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2}m(R^2\dot\vartheta^2 + \frac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + lR\dot\vartheta\dot\varphi\cos(\vartheta - \varphi)) + \frac{ml^2}{24}\dot\varphi^2$$
$$+ mg(R\cos\vartheta + \frac{l}{2}\cos\varphi) - \frac{k}{2}(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)^2$$

e le equazioni di Lagrange sono

$$mR^2\ddot\vartheta + \frac{1}{2}mlR\ddot\varphi\cos(\vartheta - \varphi) - \frac{1}{2}mlR\dot\varphi^2\sin(\vartheta - \varphi) =$$
$$- mgR\sin\vartheta + kR(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)\sin\vartheta$$
$$\frac{ml^2}{3}\ddot\varphi + \frac{1}{2}mlR\ddot\vartheta\cos(\vartheta - \varphi) - \frac{1}{2}mlR\dot\vartheta^2\sin(\vartheta - \varphi) =$$
$$- \frac{mgl}{2}\sin\varphi + kl(R\cos\vartheta + l\cos\varphi)\sin\varphi\ .$$

ⓒ88-7999-464-6

2) In un piano verticale, un'asta di massa M e lunghezza l ha un estremo vincolato nell'origine; l'altro estremo è collegato ad una molla di costante elastica $k > 0$, che si mantiene sempre verticale. Lungo l'asta puó scorrere un punto materiale P di massa m, collegato all'origine del sistema di riferimento tramite una molla di costante elastica $k > 0$. Determinare la Lagrangiana del sistema e individuare le posizioni di equilibrio.



Soluzione: Sia s l'ascissa di P lungo l'asta contata a partire dall'origine e sia ϑ l'angolo che l'asta forma con la verticale. La Lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned} L(\dot\vartheta, \dot s, \vartheta, s) = & \frac{1}{2}m(\dot s^2 + s^2\dot\vartheta^2) + \frac{1}{6}Ml^2\dot\vartheta^2 + mgs\cos\vartheta + Mg\frac{l}{2}\cos\vartheta \\ & - \frac{1}{2}ks^2 - \frac{1}{2}kl^2\cos^2\vartheta \ . \end{aligned}$$

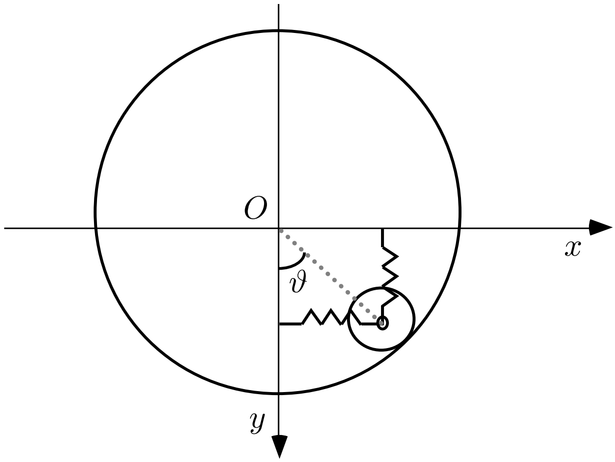
Le posizioni di equilibrio sono: $(\vartheta, s) = (0, \frac{mg}{k})$, $(\pi, -\frac{mg}{k})$, $(\vartheta_3, \frac{mg}{k}\cos\vartheta_3)$, $(\vartheta_4, \frac{mg}{k}\cos\vartheta_4)$, dove

$$\vartheta_{3,4} \ = \ \pm\mathrm{arccos}\frac{Mgl/2}{kl^2 - m^2g^2/k} \ ,$$

la cui esistenza è soggetta alla condizione $|\frac{Mgl/2}{kl^2 - m^2g^2/k}| \leq 1$.

3) Un disco di massa m e raggio $r > 0$ rotola senza strisciare lungo una guida circolare di raggio R ($R > r$) di un riferimento verticale. Il centro del disco è collegato agli assi del riferimento tramite due molle di costanti elastiche $k > 0$, che si mantengono sempre parallele agli assi. Determinare la Lagrangiana del sistema.

© 88-7999-464-6



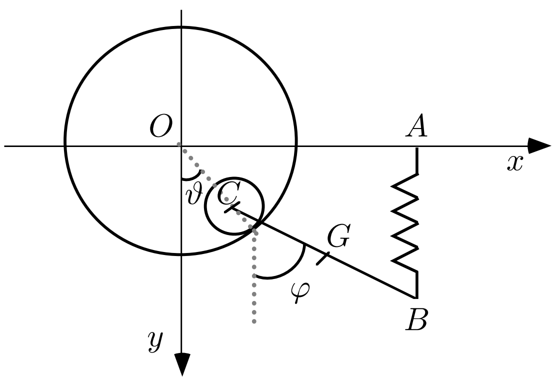
Soluzione: Sia ϑ l'angolo che il centro del disco forma con la verticale. La velocità angolare del disco è

$$\omega = \frac{R-r}{r}\dot{\vartheta} \ .$$

La Lagrangiana del sistema è data da

$$L(\dot{\vartheta}, \vartheta) = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 + mg(R-r)\cos\vartheta \ .$$

4) In un piano verticale un disco materiale di massa M e raggio r è vincolato a ruotare senza strisciare lungo una guida circolare di raggio $R > r$. Al centro C del disco è appesa un'asta materiale di massa m e lunghezza l. Alla estremità libera B dell'asta è collegata una molla di costante elastica $k > 0$ che si mantiene sempre verticale. Siano ϑ, φ gli angoli che OC e l'asta formano con la verticale. Determinare la Lagrangiana del sistema.



©88-7999-464-6

Soluzione: La Lagrangiana del sistema è:

$$L(\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \vartheta, \varphi = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m((R-r)^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2$$
$$+ (R-r)l\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos(\vartheta-\varphi)) + Mg(R-r)\cos\vartheta + mg((R-r)\cos\vartheta$$
$$+ \frac{l}{2}\cos\varphi) - \frac{k}{2}((R-r)\cos\vartheta + l\cos\varphi)^2 \ .$$

Capitolo 6
Meccanica Hamiltoniana

• Funzione Hamiltoniana: Consideriamo un sistema meccanico a n gradi di libertà, descritto dalla Lagrangiana $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ in coordinate indipendenti $\underline{q} = (q_1, ..., q_n)$. Introduciamo i momenti cinetici p_j associati alle variabili q_j tramite la relazione

$$p_j \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \;, \qquad j = 1, ..., n \;, \tag{p}$$

che supponiamo invertibile rispetto alle $\dot{q}_j$ ossia

$$\det \| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \| \neq 0 \;.$$

Si definisce *funzione Hamiltoniana*

$$H \;=\; \underline{p}\, \underline{\dot{q}} \;-\; L \;,$$

dove si intende che le velocità $\underline{\dot{q}}$ siano espresse in termini di $\underline{q}$ e $\underline{p}$ tramite le (p). Le equazioni di Hamilton del moto sono:

$$\begin{cases} \underline{\dot{p}} \;=\; -\frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \\ \\ \underline{\dot{q}} \;=\; \frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \;. \end{cases}$$

• **Funzione generatrice di una trasformazione canonica:** Sia

$$\begin{cases} \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t) \\ \\ \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t) \end{cases}$$

una trasformazione canonica. Sia

$$F \;=\; F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$$

ⓒ88-7999-464-6

la funzione generatrice associata a tale trasformazione. Le equazioni di trasformazione sono

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} \\ \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}} \end{cases} .$$

Sia $K(\underline{P}, \underline{Q}, t)$ l'Hamiltoniana nelle nuove variabili; allora:

$$K(\underline{P}, \underline{Q}, t) = H(\underline{p}, \underline{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Forme equivalenti (con diverse dipendenze dalle variabili) della funzione generatrice sono le seguenti:
i) $F = F(\underline{q}, \underline{P}, t)$ con equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} \underline{p} = \frac{\partial F}{\partial \underline{q}} \\ \underline{Q} = \frac{\partial F}{\partial \underline{P}} \end{cases} ;$$

ii) $F = F(\underline{p}, \underline{Q}, t)$ con equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} \underline{q} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{p}} \\ \underline{P} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{Q}} \end{cases} ;$$

iii) $F = F(\underline{p}, \underline{P}, t)$ con equazioni di trasformazione:

$$\begin{cases} \underline{q} = -\frac{\partial F}{\partial \underline{p}} \\ \underline{Q} = \frac{\partial F}{\partial \underline{P}} \end{cases} .$$

• **Criterio di canonicità:** Siano $f = f(\underline{p}, \underline{q})$, $g = g(\underline{p}, \underline{q})$; si definisce *parentesi di Poisson* tra f e g la quantità

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k} .$$

Una trasformazione

$$\begin{cases} \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t) \\ \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t) \end{cases}$$

© 88-7999-464-6

è canonica se valgono le seguenti relazioni:

$$\{Q_i, Q_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$$
$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \ , \qquad i, j = 1, ..., n \ .$$

Nel caso unidimensionale ($n = 1$) è sufficiente verificare la relazione

$$\{Q, P\} \ = \ 1 \ ,$$

poiché $\{Q, Q\}$ e $\{P, P\}$ sono identicamente nulle.

• **Metodo di Hamilton–Jacobi:** Determiniamo una trasformazione ca–nonica

$$\begin{cases} \underline{Q} = \underline{Q}(\underline{q}, \underline{p}, t) \\ \underline{P} = \underline{P}(\underline{q}, \underline{p}, t) \end{cases}$$

con funzione generatrice $F = F(\underline{q}, \underline{Q}, t)$, tale che l'Hamiltoniana nelle variabili trasformate sia identicamente nulla:

$$K(\underline{P}, \underline{Q}, t) \ = \ 0 \ .$$

Poiché

$$K(\underline{P}, \underline{Q}, t) \ = \ H(\underline{p}, \underline{q}, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \ ,$$

si ottiene *l'equazione di Hamilton–Jacobi:*

$$H(\frac{\partial F}{\partial \underline{q}}, \underline{q}, t) \ + \ \frac{\partial F}{\partial t} \ = \ 0 \ .$$

Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili sono:

$$\begin{cases} \dot{\underline{P}} \ = \ 0 \\ \dot{\underline{Q}} \ = \ 0 \end{cases}$$

ossia $\underline{P}$ e $\underline{Q}$ sono vettori costanti. Se l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo si può scrivere la funzione generatrice nella forma:

$$F(\underline{q}, \underline{Q}, t) \ = \ W(\underline{q}, \underline{Q}) - \alpha t \ ,$$

con α costante. L'equazione di Hamilton–Jacobi diventa:

$$H(\frac{\partial W}{\partial \underline{q}}, \underline{q}) \ = \ \alpha \ .$$

• **Sistemi integrabili:** Un sistema si dice *integrabile* (o *integrabile per quadrature*) se è possibile trovare una soluzione analitica delle equazioni del moto tramite un numero finito di operazioni, quali inversione di funzioni o calcolo di integrali (da cui il termine di "quadrature"). Nel caso Hamiltoniano, un sistema è integrabile se si conoscono n integrali primi che soddisfano opportuni requisiti. In particolare, se si conoscono n coordinate cicliche, allora gli n impulsi corrispondenti sono integrali primi e il sistema è integrabile.
Per dimostrare l'integrabilità di un sistema descritto da un'Hamlitoniana $H(\underline{p}, \underline{q})$, gli n integrali primi I_1, ..., I_n, devono soddisfare le condizioni di:
1) involutività: $\{I_j, I_k\} = 0$, per ogni $j, k = 1, ..., n$;
2) indipendenza: se la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial p_n} & \frac{\partial I_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial q_n} \\ \vdots & & & & & \\ \frac{\partial I_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial I_n}{\partial p_n} & \frac{\partial I_n}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial I_n}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

ha rango n;
3) in luogo della condizione 2) si può richiedere che valga:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial I_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial I_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial I_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} \neq 0 \ ;$$

si noti che tale condizione di non singolarità è più forte dell'indipendenza, perché il minore di rango n può essere diverso da $\frac{\partial I}{\partial p}$.

Fissato un punto $(\underline{p}_0, \underline{q}_0)$, sia $\underline{\alpha}_0 = \underline{I}(\underline{p}_0, \underline{q}_0)$; definiamo la varietà

$$M_{\underline{\alpha}} = \{(\underline{p}, \underline{q}) \in \mathbf{R}^{2n} /\ I_1(\underline{p}, \underline{q}) = \alpha_1, ..., I_n(\underline{p}, \underline{q}) = \alpha_n\} \ .$$

Teorema di Liouville–Arnold: supponiamo che l'Hamiltoniana $H(\underline{p}, \underline{q})$, $\underline{p}$, $\underline{q} \in \mathbf{R}^n$, ammetta n integrali primi I_1, ...,I_n, soddisfacenti le condizioni di involutività, indipendenza e non singolarità. Supponiamo inoltre che la varietà $M_{\underline{\alpha}}$ sia compatta in un opportuno intorno di $\underline{\alpha}_0$. Allora, esiste una trasformazione $(\underline{p}, \underline{q}) \to (\underline{A}, \underline{\varphi})$ con $\underline{A} \in \mathbf{R}^n$, $\underline{\varphi} \in (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n$, tale che l'Hamiltoniana trasformata K assume la forma:

$$K(\underline{A}, \underline{\varphi}) \ = \ K(\underline{A}) \ .$$

Il teorema di Liouville–Arnold fornisce un algoritmo esplicito per costruire le variabili $(\underline{A}, \underline{\varphi})$, che sono dette "variabili azione–angolo". Come conseguenza

© 88-7999-464-6

del fatto di aver trasformato l'Hamiltoniana in una funzione che dipende solo dalle azioni $\underline{A}$, si ottiene l'integrabilità del sistema di partenza.

• **Variabili azione–angolo:** Introduciamo come momenti trasformati le *variabili d'azione* $(A_1, ..., A_n)$, definite dalla relazione

$$A_i \ = \ \oint p_i \ dq_i \ ,$$

dove l'integrale è esteso ad un periodo di oscillazione del sistema. Se l'Hamiltoniana di partenza è completamente integrabile, essa dipenderà unicamente dalle variabili d'azione:

$$K \ = K(A_1, ..., A_n) \ . \tag{K}$$

Le variabili canoniche coniugate alle A_i sono dette *variabili d'angolo,* che indichiamo con $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Dalle equazioni di Hamilton associate alla (K) risulta

$$\begin{cases} \dot{A}_i \ = \ 0 \\ \\ \dot{\varphi}_i \ = \ \frac{\partial K(A_1,...,A_n)}{\partial A_i} \equiv \omega_i \ , \end{cases}$$

dove $\underline{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)$ viene detta *frequenza fondamentale* del sistema. Pertanto si avrà:

$$\begin{cases} A_i \ = \ \text{cost.} \\ \\ \varphi_i \ = \ \omega_i \ t + \varphi_i^o \ , \qquad \varphi_i^o = \text{cost.} \end{cases}$$

• **Teoria delle perturbazioni:** Si consideri l'Hamiltoniana *quasi-integrabile* in variabili azione–angolo $(\underline{A}, \underline{\varphi})$ $(\underline{A} \in \mathbf{R}^n$, $\underline{\varphi} \in (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^n)$:

$$H(\underline{A}, \underline{\varphi}) \ = \ h(\underline{A}) + \varepsilon f(\underline{A}, \underline{\varphi}) \ , \tag{H}$$

dove ε è un parametro positivo, $0 < \varepsilon << 1$. Determiniamo una trasformazione canonica con funzione generatrice

$$F(\underline{A}', \underline{\varphi}) = \underline{A}' \cdot \underline{\varphi} + \varepsilon \Phi(\underline{A}', \underline{\varphi})$$

ossia

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{A}' + \varepsilon \frac{\partial \Phi(\underline{A}',\underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}}, \\ \\ \underline{\varphi}' = \underline{\varphi} + \varepsilon \frac{\partial \Phi(\underline{A}',\underline{\varphi})}{\partial \underline{A}'} \ , \end{cases}$$

ⓒ88-7999-464-6

dove la funzione $\Phi(\underline{A}', \underline{\varphi})$ è scelta in modo da rimuovere la perturbazione in (H) a $O(\varepsilon^2)$. Dalla (H) si ha:

$$h(\underline{A}' + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\varphi}}) + \varepsilon f(\underline{A}' + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\varphi}}, \underline{\varphi}) =$$
$$= h(\underline{A}') + \varepsilon[\underline{\omega}(\underline{A}') \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\varphi}} + f(\underline{A}', \underline{\varphi})] + O(\varepsilon^2) \ ,$$

dove

$$\underline{\omega}(\underline{A}') \ \equiv \ \frac{\partial h(\underline{A}')}{\partial \underline{A}} \ .$$

Decomponendo la funzione f nella forma:

$$f(\underline{A}, \underline{\varphi}) = \tilde{f}(\underline{A}, \underline{\varphi}) + f_0(\underline{A}) \ ,$$

dove $f_0(\underline{A})$ è la media di f sugli angoli $\underline{\varphi}$, deve risultare:

$$\underline{\omega}(\underline{A}') \cdot \frac{\partial \Phi(\underline{A}', \underline{\varphi})}{\partial \underline{\varphi}} + \tilde{f}(\underline{A}', \underline{\varphi}) \ = \ 0 \ , \qquad (\Phi)$$

che determina la funzione generatrice della trasformazione canonica. La nuova Hamiltoniana assumerà la forma:

$$H^{(1)}(\underline{A}', \underline{\varphi}') = h^{(1)}(\underline{A}') + \varepsilon^2 f^{(1)}(\underline{A}', \underline{\varphi}') \ ,$$

dove $f^{(1)}$ è la nuova funzione perturbatrice e

$$h^{(1)}(\underline{A}') \ = \ h(\underline{A}') + \varepsilon f_0(\underline{A}') \ .$$

• Se l'Hamiltoniana iniziale dipende esplicitamente dal tempo, la funzione generatrice dipenderà anch'essa dal tempo e si dovrà sostituire la (Φ) con l'equazione

$$\underline{\omega}(\underline{A}') \cdot \frac{\partial \Phi(\underline{A}', \underline{\varphi}, t)}{\partial \underline{\varphi}} + \frac{\partial \Phi(\underline{A}', \underline{\varphi}, t)}{\partial t} + \tilde{f}(\underline{A}', \underline{\varphi}, t) \ = \ 0 \ .$$

MH 1

a) Scrivere la funzione di Hamilton corrispondente alla Lagrangiana:

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z) \ .$$

ⓒ 88-7999-464-6

I momenti cinetici coniugati sono:

$$p_x = m\dot{x} \ , \quad p_y = m\dot{y} \ , \quad p_z = m\dot{z}$$

e quindi:

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \ , \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \ , \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m} \ .$$

Pertanto la nuova Hamiltoniana è:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L$$

ed esprimendo $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ in termini di p_x, p_y, p_z, si ha:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) \ .$$

b) Scrivere la funzione di Hamilton corrispondente alla Lagrangiana:

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2) - V(r, \vartheta, \varphi) \ .$$

I momenti cinetici coniugati sono:

$$p_r = m\dot{r} \ , \quad p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta} \ , \quad p_\varphi = mr^2 \sin^2\vartheta\dot{\varphi}$$

e quindi:

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \ , \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mr^2} \ , \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2\vartheta} \ .$$

Pertanto la nuova Hamiltoniana è:

$$\begin{aligned} H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi) &= p_r\dot{r} + p_\vartheta\dot{\vartheta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L \\ &= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\vartheta}\right) + V(r, \vartheta, \varphi) \ . \end{aligned}$$

MH 2

Scrivere la funzione di Hamilton associata alla Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2e^t + q\dot{q}e^t + q^2) \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Il momento cinetico coniugato alla variabile q è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{m}{2}(2\dot{q}e^t + qe^t)$$

e quindi

$$\dot{q} = \frac{p}{m}e^{-t} - \frac{q}{2} \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} H(p,q,t) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{m}{2}\left[\frac{1}{m^2}p^2e^{-t} + \frac{q^2}{4}e^t - \frac{1}{m}pq - q^2\right] \\ &= \frac{1}{2m}p^2e^{-t} - \frac{1}{2}pq + \frac{m}{2}\left(\frac{q^2}{4}e^t - q^2\right) \ . \end{aligned}$$

MH 3

Data la Lagrangiana

$$L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2 \ ,$$

scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le equazioni di Hamilton associate.

Il momento cinetico coniugato alla variabile q è

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + q$$

e quindi

$$\dot{q} = p - q \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} H(p,q) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{5}{2}q^2 \ . \end{aligned}$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p + 5q \\ \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q \ . \end{cases}$$

Derivando la seconda equazione rispetto al tempo si ha:

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} = 6q$$

© 88-7999-464-6

ossia

$$\ddot{q} - 6q \;=\; 0 \;,$$

la cui soluzione è

$$q(t) = A_1 e^{\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t} \;,$$

dove A_1 e A_2 sono costanti arbitrarie. Pertanto da $p = q + \dot{q}$ si ricava:

$$p(t) = \left(A_1 + \sqrt{6}A_1\right) e^{\sqrt{6}t} + \left(A_2 - \sqrt{6}A_2\right) e^{-\sqrt{6}t} \;.$$

MH 4

Data la Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) \;=\; \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + 2q^2\dot{q}) - q^2 \;,$$

determinare la corrispondente Hamiltoniana e risolvere le relative equazioni di Hamilton.

Il momento cinetico coniugato alla variabile q è

$$p \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \;=\; m(\dot{q} + q^2) \;.$$

Pertanto la funzione di Hamilton è:

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{p^2}{m} - q^2 p - \frac{m}{2}\left(\frac{p^2}{m^2} + q^4 - 2\frac{p}{m}q^2 + 2q^2\frac{p}{m} - 2q^4\right) + q^2 \\ &= \frac{p^2}{2m} - q^2 p + \frac{m}{2}q^4 + q^2 \;. \end{aligned}$$

Le relative equazioni di Hamilton sono:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 2qp - 2mq^3 - 2q \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} - q^2 \;. \end{cases}$$

Derivando ancora la seconda equazione ed usando la prima si ottiene

$$\ddot{q} + \frac{2}{m}q \;=\; 0 \;.$$

Pertanto:

$$q(t) \;=\; A\cos\left(\sqrt{\frac{2}{m}}\; t + \alpha\right) \;,$$

con A, α costanti.

MH 5

Dire per quali valori di α e β la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \ . \end{cases}$$

Trovare la funzione generatrice in corrispondenza di tali valori.

Usiamo le parentesi di Poisson per verificare la canonicità della trasformazione; in particolare, poiché la trasformazione è unidimensionale, basta verificare la condizione

$$\{Q, P\} \equiv \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \ = \ 1 \ .$$

Pertanto si ha:

$$-\frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta q} \cdot \alpha e^{\beta q} \ = \ 1 \ ,$$

che è soddisfatta per $\beta = -1$ e $\alpha \neq 0$. Dunque la trasformazione diventa:

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{-q} \\ \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{q} \ . \end{cases} \tag{PQ}$$

Cerchiamo una funzione generatrice $F = F(q, P)$, le cui equazioni di trasformazione sono:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} \\ \\ Q = \frac{\partial F}{\partial P} \ . \end{cases}$$

Dalla (PQ) si ha:

$$\begin{cases} p = \frac{P}{\alpha} e^{q} \\ \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{q} \ . \end{cases}$$

Pertanto deve risultare

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{\alpha} e^{q}$$

ossia $F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^{q} + f(P)$, dove $f(P)$ è una funzione totale di P; analogamente dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{\alpha} e^{q} \ ,$$

ⓒ 88-7999-464-6

si trova $F(q,P) = \frac{P}{\alpha}e^q + g(q)$, dove $g(q)$ dipende solo dalla variabile q. Confrontando le due espressioni per la funzione generatrice si ottiene $f(P) = g(q) = 0$ e quindi

$$F(q,P) = \frac{P}{\alpha}e^q \ .$$

MH 6

Dire per quali valori delle costanti α, β, γ, la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} P = p^\alpha \sin(\beta q) \\ \\ Q = p^\gamma \cos(\beta q) \ . \end{cases}$$

In corrispondenza di tali valori determinare la funzione generatrice.

Utilizzando le parentesi di Poisson deve essere

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

ossia

$$-p^\gamma \alpha\beta \sin^2(\beta q) p^{\alpha-1} - \beta\gamma p^{\alpha+\gamma-1}\cos^2(\beta q) = 1 \ .$$

Imponiamo che sia

$$-\alpha\beta p^{\alpha+\gamma-1} = -\beta\gamma p^{\alpha+\gamma-1} = 1$$

ossia

$$\alpha + \gamma = 1 \ , \qquad -\alpha\beta = 1 \ , \qquad -\beta\gamma = 1 \ .$$

Pertanto la trasformazione è canonica per

$$\alpha = \frac{1}{2} \ , \quad \beta = -2 \ , \quad \gamma = \frac{1}{2} \ .$$

Quindi si avrà:

$$\begin{cases} P = -\sqrt{p}\sin(2q) \\ \\ Q = \sqrt{p}\cos(2q) \ . \end{cases}$$

Determiniamo la funzione generatrice nella forma $F = F(q,Q)$:

$$\begin{cases} p = \frac{Q^2}{\cos^2(2q)} = \frac{\partial F}{\partial q} \\ \\ P = -Q\frac{\sin(2q)}{\cos(2q)} = -\frac{\partial F}{\partial Q} \end{cases}$$

ⓒ88-7999-464-6

e quindi

$$F(q, Q) = \frac{Q^2}{2} \ \mathrm{tg}(2q) \ .$$

MH 7

Determinare dei valori opportuni delle costanti A, α, β, in corrispondenza dei quali la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q = \ln(\frac{1}{q} e^{\alpha p}) \\ \\ P = Aqe^{\beta p} \ . \end{cases}$$

Per tali valori dei parametri determinare la corrispondente funzione generatrice.

Utilizzando le parentesi di Poisson deve essere

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

ossia

$$-A\beta e^{\beta p} - A\alpha e^{\beta p} = 1 \ .$$

Ponendo $\beta = 0$, la precedente relazione diventa

$$-A\alpha = 1 \ .$$

Scegliamo, ad esempio

$$A = \frac{1}{2} \ , \qquad \alpha = -2 \ .$$

In corrispondenza di tali valori la trasformazione diventa:

$$\begin{cases} Q = \ln(\frac{1}{q} e^{-2p}) \\ \\ P = \frac{1}{2} q \ . \end{cases}$$

Determiniamo la trasformazione generatrice nella forma $F = F(P, p)$:

$$\begin{cases} q = 2P = -\frac{\partial F}{\partial p} \\ \\ Q = \ln(\frac{1}{2P} e^{-2p}) = \frac{\partial F}{\partial P} \ . \end{cases}$$

Dalla prima relazione si ha:

$$F(p, P) = -2Pp + f(P) \ ,$$

dove la funzione $f(P)$ è determinata dalla seconda relazione:

$$-2p + f'(P) = \ln\left(\frac{1}{2P}e^{-2p}\right)$$

e quindi

$$f'(P) = \ln\left(\frac{1}{2P}\right)$$

ossia

$$f(P) = \int \ln\left(\frac{1}{2P}\right)\, dP$$

e

$$F(p,P) \;=\; -2Pp + \int \ln\left(\frac{1}{2P}\right)\, dP\ .$$

MH 8

Verificare che la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q_1 = p_2 \\ \\ Q_2 = 3p_1 + 2p_2 \\ \\ P_1 = -q_2 + \frac{2}{3}q_1 \\ \\ P_2 = -\frac{1}{3}q_1\ . \end{cases}$$

Utilizzando le parentesi di Poisson devono essere verificate le seguenti relazioni:

$$\{Q_1, P_1\} = \{Q_2, P_2\} = 1$$
$$\{Q_1, Q_2\} = \{Q_1, P_2\} = \{Q_2, P_1\} = \{P_1, P_2\} = 0\ .$$

Per quanto riguarda le prime due relazioni si ha:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = -\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 1$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = -3\frac{\partial P_2}{\partial q_1} = 1\ .$$

Analogamente si verificano le altre relazioni.

©88-7999-464-6

MH 9

Dire se la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_2}\cos q_1 \\ Q_2 = \sqrt{p_1}\cos q_2 \\ P_1 = -2\sqrt{p_2}\sin q_1 \\ P_2 = -2\sqrt{p_1}\sin q_2 \ . \end{cases}$$

Utilizzando le parentesi di Poisson devono essere verificate le seguenti relazioni:

$$\{Q_1, P_1\} = \{Q_2, P_2\} = 1$$
$$\{Q_1, Q_2\} = \{Q_1, P_2\} = \{Q_2, P_1\} = \{P_1, P_2\} = 0 \ .$$

Per quanto riguarda le prime due relazioni si ha:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_1}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = 0 \ .$$

© 88-7999-464-6

Per le rimanenti relazioni si ha:

$$\begin{aligned}
\{Q_1, Q_2\} &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial Q_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial Q_2}{\partial q_2} = \\
&= -\frac{\sqrt{p_2}}{2\sqrt{p_1}}\sin q_1 \cos q_2 + \frac{\sqrt{p_1}}{2\sqrt{p_2}}\cos q_1 \sin q_2 \neq 0 \\
\{Q_1, P_2\} &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = \\
&= \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\sin q_1 \sin q_2 + \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\cos q_1 \cos q_2 \neq 0 \\
\{Q_2, P_1\} &= -\frac{\partial Q_2}{\partial p_1}\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\frac{\partial P_1}{\partial p_2} = \\
&= \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\cos q_1 \cos q_2 + \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\sin q_1 \sin q_2 \neq 0 \\
\{P_1, P_2\} &= \frac{\partial P_1}{\partial q_1}\frac{\partial P_2}{\partial p_1} - \frac{\partial P_1}{\partial p_2}\frac{\partial P_2}{\partial q_2} = \\
&= 2\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\cos q_1 \sin q_2 - 2\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}\sin q_1 \cos q_2 \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Pertanto la trasformazione non è canonica.

MH 10

Trovare dei valori opportuni per le costanti A, α e β e una forma della funzione $g(p)$ tali che la trasformazione

$$\begin{cases} P = g(p)\mathrm{sh}(\beta q) \\ \\ Q = Ap^{\alpha}\mathrm{ch}(\beta q) \end{cases}$$

sia canonica. In corrispondenza di tali valori trovare la funzione generatrice. Applicare la trasformazione all'Hamiltoniana

$$H(p, q) = p \ \mathrm{ch}\left(-\frac{4}{A}q\right)$$

e risolvere le equazioni di Hamilton associate alla nuova Hamiltoniana.

Utilizzando le parentesi di Poisson deve risultare

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = 1$$

ossia

$$Ap^{\alpha}\beta \mathrm{sh}^2(\beta q)g'(p) - A\alpha p^{\alpha-1}\beta \mathrm{ch}^2(\beta q)g(p) = 1 \ . \qquad (PP)$$

Imponiamo che si abbia

$$A\beta p^{\alpha} g'(p) = A\alpha p^{\alpha-1}\beta g(p)$$

ossia

$$\frac{g'(p)}{g(p)} = \frac{\alpha}{p} \ .$$

Risolvendo tale equazione si trova

$$\ln(g(p)) = \ln(p^{\alpha})$$

e quindi

$$g(p) = p^{\alpha} \ .$$

Ricordando che $\mathrm{ch}^2(\beta q) - \mathrm{sh}^2(\beta q) = 1$, la (PP) diventa:

$$-A\alpha\beta p^{2\alpha-1} = 1 \ ;$$

pertanto scegliamo

$$\alpha = \frac{1}{2} \ , \qquad \beta = -\frac{2}{A}$$

lasciando A arbitrario. Con tali valori delle costanti e tale scelta della funzione $g(p)$ la trasformazione

$$\begin{cases} P = \sqrt{p}\ \mathrm{sh}(-\frac{2}{A}q) \\ \\ Q = A\sqrt{p}\ \mathrm{ch}(-\frac{2}{A}q) \end{cases}$$

è canonica.

Determiniamo la funzione generatrice nella forma $F = F(q, Q)$:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{Q^2}{A^2 \mathrm{ch}^2\left(-\frac{2}{A}q\right)} \\ P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{Q}{A}\frac{\mathrm{sh}\left(-\frac{2}{A}q\right)}{\mathrm{ch}\left(-\frac{2}{A}q\right)} \end{cases}$$

e quindi

$$F(q, Q) = -\frac{Q^2}{2A}\mathrm{th}\left(-\frac{2}{A}q\right) \ .$$

Applichiamo la trasformazione all'Hamiltoniana

$$H(p, q) = p\ \mathrm{ch}\left(-\frac{4}{A}q\right) \ ,$$

che riscriviamo nella forma:

$$H(p,q) = p\ \left(\mathrm{sh}^2\left(-\frac{2}{A}q\right) + \mathrm{ch}^2\left(-\frac{2}{A}q\right)\right)\ .$$

Allora, l'Hamiltoniana nelle variabili trasformate (P, Q) diventa:

$$\tilde{H}(P,Q) = P^2 + \frac{Q^2}{A^2}\ .$$

Le equazioni di Hamilton associate alla nuova Hamiltoniana sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = P \\ \\ \dot{P} = -\frac{Q}{A^2}\ . \end{cases}$$

Derivando nuovamente la prima equazione e sostituendo l'espressione di $\dot{P}$ si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico con frequenza $\frac{1}{A}$:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{A^2}Q\ =\ 0\ .$$

La soluzione di tale equazione è:

$$Q(t)\ =\ a_0 \cos\left(\frac{t}{A} + a_1\right)\ ,$$

con a_0, a_1 costanti arbitrarie, mentre la soluzione per la variabile P è:

$$P(t) = -\frac{a_0}{A}\sin\left(\frac{t}{A} + a_1\right)\ .$$

MH 11

Si applichi la trasformazione canonica

$$\begin{cases} P = -2\sqrt{p}\sin q \\ \\ Q = \sqrt{p}\cos q \end{cases}$$

alla Hamiltoniana

$$H(p,q) = -p\ \sin(2q)$$

e si risolvano le equazioni di Hamilton associate alla nuova Hamiltoniana. Si determini la funzione generatrice nella forma $F = F(q, P)$.

©88-7999-464-6

Dalla trasformazione canonica si ricava facilmente che la nuova Hamiltoniana $K(P,Q)$ assume la forma:

$$K(P,Q) = P\ Q\ .$$

Pertanto le relative equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{P} = -P \\ \\ \dot{Q} = Q\ . \end{cases}$$

Dalla prima equazione $\dot{P} + P = 0$ si ricava

$$P(t) = Ae^{-t+\alpha}\ ,$$

mentre da $\dot{Q} - Q = 0$ si ha:

$$Q(t) = Be^{t+\beta}\ ,$$

con A, B, α, β costanti.

Poiché $F = F(q, P)$, si ha:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P^2}{4\sin^2 q}$$
$$Q = \frac{\partial F}{\partial P} = -\frac{P}{2}\frac{\cos q}{\sin q}$$

ossia

$$F(q, P) \ = \ -\frac{P^2}{4}\frac{\cos q}{\sin q}\ .$$

MH 12

Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) \ = \ \frac{p^2}{\alpha q^6} + \alpha q^4\ ,$$

con α costante. Si trovi l'equazione del moto $q = q(t)$ attraverso il metodo di Hamilton–Jacobi.

Poiché l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, cerchiamo una funzione generatrice della forma $F = W(q) - Et$. L'equazione di Hamilton–Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

ⓒ 88-7999-464-6

diventa

$$\frac{1}{\alpha q^6}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \alpha q^4 \;=\; E \;,$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{\alpha q^6 (E - \alpha q^4)}$$

ossia

$$W = \int \sqrt{\alpha q^6 (E - \alpha q^4)}\; dq \;.$$

Pertanto la funzione generatrice assume la forma:

$$F = \int \sqrt{\alpha q^6 (E - \alpha q^4)}\; dq \;-\; Et \;.$$

Sia $\beta = \frac{\partial F}{\partial E}$; allora:

$$\beta = \int \frac{\alpha q^6}{2\sqrt{\alpha q^6 (E - \alpha q^4)}}\; dq \;-\; t$$

ossia

$$\beta + t \;=\; \sqrt{\alpha} \int \frac{q^3}{2\sqrt{E - \alpha q^4}}\; dq \;.$$

Operando la sostituzione $x = E - \alpha q^4$, si trova:

$$\beta + t = \frac{\sqrt{\alpha}}{-4\alpha} \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4\alpha}\sqrt{E - \alpha q^4} \;.$$

Invertendo l'ultima relazione si trova:

$$q(t) \;=\; \left[\frac{1}{\alpha}\left[E - 16\alpha(t+\beta)^2\right]\right]^{1/4} \;.$$

MH 13

Si consideri l'Hamiltoniana

$$H(q,p) \;=\; \left(\frac{p}{2\cos q}\right)^2 + \alpha \sin^2 q \;,$$

con α costante. Si trovi l'equazione del moto $q = q(t)$ attraverso il metodo di Hamilton–Jacobi.

ⓒ88-7999-464-6

Poiché l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, cerchiamo una funzione generatrice della forma $F = W(q) - Et$. L'equazione di Hamilton–Jacobi

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E$$

diventa

$$\frac{1}{4\cos^2 q}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \alpha \sin^2 q = \ E \ ,$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial W}{\partial q} = 2\cos q \sqrt{E - \alpha \sin^2 q}$$

ossia

$$W = \int \ 2\cos q \sqrt{E - \alpha \sin^2 q} \ dq \ .$$

Pertanto la funzione generatrice assume la forma:

$$F = \int 2\cos q \sqrt{E - \alpha \sin^2 q} \ dq \ - \ Et \ .$$

Sia $\beta = \frac{\partial F}{\partial E}$; allora:

$$\beta = \int \frac{\cos q}{\sqrt{E - \alpha \sin^2 q}} \ dq \ - \ t$$

ossia

$$\beta + t \ = \ \int \frac{\cos q}{\sqrt{E - \alpha \sin^2 q}} \ dq \ .$$

Operando la sostituzione $x = \sin q$, si trova:

$$\beta + t = \int \frac{dx}{\sqrt{E - \alpha x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{E}} \sin q\right) \ .$$

Invertendo l'ultima relazione si trova:

$$q(t) \ = \ \arcsin\left[\sqrt{\frac{E}{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\alpha}(t + \beta)\right)\right] \ .$$

MH 14

Risolvere con il metodo di Hamilton–Jacobi il problema dell'oscillatore armonico, descritto dall'Hamiltoniana:

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}(p^2 + A^2 q^2) \ ,$$

© 88-7999-464-6

con A costante positiva.

Poiché l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo, possiamo scrivere la funzione generatrice F nella forma:

$$F = W(q) - Et \ .$$

Allora l'equazione di Hamilton–Jacobi diventa

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + A^2q^2\right] \ = \ E$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial q} \ = \ \sqrt{2mE - A^2q^2} \ .$$

Pertanto la funzione generatrice è:

$$F = \int \sqrt{2mE - A^2q^2} \ dq - Et \ .$$

Posto $\beta = \frac{\partial F}{\partial E}$, si ha:

$$\beta = m\int \frac{1}{\sqrt{2mE - A^2q^2}} \ dq - t$$

ed effettuando la sostituzione $x = \frac{Aq}{\sqrt{2mE}}$ si ha:

$$\beta + t \ = \ \frac{m}{A}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m}{A}\arcsin\frac{Aq}{\sqrt{2mE}} \ .$$

Invertendo tale relazione si ha:

$$q(t) \ = \ \frac{\sqrt{2mE}}{A}\sin\left[\frac{A}{m}(t+\beta)\right] \ .$$

MH 15

Tramite il metodo di Hamilton–Jacobi, si determini il moto associato alla Hamiltoniana

$$H(p,q) = \frac{p^2}{\sin^2 q} + \cos q \ .$$

Poiché l'Hamiltoniana è indipendente dal tempo, possiamo scrivere la funzione generatrice F nella forma:

$$F = W(q) - Et \ .$$

Dunque l'equazione di Hamilton–Jacobi diventa

$$\frac{1}{\sin^2 q}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \cos q \;=\; E$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial q} \;=\; \sin q\sqrt{E-\cos q}\ .$$

Pertanto la funzione generatrice completa è:

$$F = \int \sin q\sqrt{E-\cos q}\ dq - Et\ .$$

Poniamo $\beta = \frac{\partial F}{\partial E}$; allora:

$$\beta = \int \frac{\sin q}{2\sqrt{E-\cos q}}\ dq - t$$

ed effettuando la sostituzione $x = E - \cos q$ si ha:

$$\beta + t \;=\; \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \sqrt{E-\cos q}\ .$$

Invertendo tale relazione si ha:

$$q(t) \;=\; \arccos[E - (t+\beta)^2]\ .$$

MH 16

Si determinini con il metodo di Hamilton–Jacobi il moto associato all'Hamiltoniana

$$H(p,q) = \frac{p^2}{(\alpha+2\beta q)^2} - \alpha q - \beta q^2\ ,$$

dove α e β sono costanti reali.

Poiché $H(p,q)$ non dipende dal tempo, possiamo scrivere la funzione generatrice F nella forma:

$$F = W(q) - Et\ .$$

Dunque l'equazione di Hamilton–Jacobi diventa

$$\frac{1}{(\alpha+2\beta q)^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - \alpha q - \beta q^2 \;=\; E$$

ossia

$$\frac{\partial W}{\partial q} \;=\; (\alpha+2\beta q)\sqrt{E+\alpha q+\beta q^2}\ .$$

© 88-7999-464-6

Pertanto la funzione generatrice completa è:

$$F = \int (\alpha + 2\beta q)\sqrt{E + \alpha q + \beta q^2}\; dq - Et \; .$$

Poniamo $\gamma = \frac{\partial F}{\partial E}$; allora:

$$\gamma + t = \int \frac{\alpha + 2\beta q}{2\sqrt{E + \alpha q + \beta q^2}}\; dq$$

ed effettuando la sostituzione $x = E + \alpha q + \beta q^2$ si ha:

$$\gamma + t \;=\; \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} = \sqrt{E + \alpha q + \beta q^2} \; .$$

Da tale relazione si ottiene

$$\beta q^2 + \alpha q + E - (\gamma + t)^2 \;=\; 0$$

ossia

$$q(t) \;=\; \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta E + 4\beta(\gamma + t)^2}}{2\beta} \; .$$

MH 17

Data la Lagrangiana

$$L(q, \dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}(q^2\dot{q}^2 + \alpha q^2) \; ,$$

con α costante, scrivere la corrispondente Hamiltoniana e risolverne il moto con il metodo di Hamilton–Jacobi.

Il momento cinetico coniugato alla variabile q è

$$p \;=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \;=\; q^2\dot{q} \; .$$

Pertanto la funzione di Hamilton è:

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{q^2} - \frac{1}{2}\alpha q^2 \\ &= \frac{p^2}{2q^2} - \frac{1}{2}\alpha q^2 \; . \end{aligned}$$

ⓒ88-7999-464-6

Poiché l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, possiamo scrivere la funzione generatrice nella forma: $F(q, E, t) = W(q, E) - Et$. Pertanto l'equazione di Hamilton–Jacobi diventa:

$$\frac{1}{2q^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{2}\alpha q^2 = E$$

ossia

$$W = \int q\sqrt{2E + \alpha q^2}\, dq$$

e la funzione generatrice completa è:

$$F = \int q\sqrt{2E + \alpha q^2}\, dq \; - \; Et \; .$$

Sia

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial E} = \int \frac{q}{\sqrt{2E + \alpha q^2}} dq - t \; ;$$

ponendo $x = 2E + \alpha q^2$, l'integrale precedente si riduce a:

$$\beta = \int \frac{1}{2\alpha\sqrt{x}} dx - t = \frac{\sqrt{x}}{\alpha} - t = \frac{\sqrt{2E + \alpha q^2}}{\alpha} - t$$

e quindi

$$q(t) = \pm\sqrt{\alpha(\beta + t)^2 - \frac{2E}{\alpha}} \; .$$

MH 18

Risolvere con il metodo della separazione delle variabili il problema del moto di un punto materiale di massa m in un campo di forze centrali in coordinate polari r, ψ.

L'Hamiltoniana che descrive il problema ha la forma:

$$H(p_r, p_\psi, r) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\psi^2}{r^2}\right) + V(r) \; .$$

Poiché la coordinata ψ è ciclica e l'Hamiltoniana non dipende esplicitamente dal tempo, possiamo decomporre la funzione generatrice nella forma:

$$F = W(r) + \alpha_\psi \psi - Et \; , \qquad \alpha_\psi \equiv p_\psi \; .$$

© 88-7999-464-6

Pertanto l'equazione di Hamilton–Jacobi diventa:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}\right] + V(r) = E \ .$$

Dunque:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \sqrt{2mE - 2mV(r) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}$$

ossia

$$F = \int \sqrt{2mE - 2mV(r) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}\ dr + \alpha_\psi \psi - Et \ .$$

Posto

$$\beta = \frac{\partial F}{\partial E} \ ,$$

si ha:

$$t + \beta = \int \frac{m}{\sqrt{2mE - 2mV(r) - \frac{\alpha_\psi^2}{r^2}}}\ dr \ ,$$

che coincide con l'equazione fondamentale per il problema di forze centrali.

MH 19

Scrivere la funzione di Hamilton in coordinate cilindriche (r, φ, z) per il problema di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale $V(r, \varphi, z)$.

Nel caso $V(r, \varphi, z) = V_1(r) + V_2(z)$ determinare, con il metodo della separazione delle variabili, la funzione generatrice soluzione dell'equazione di Hamilton–Jacobi.

Le coordinate cilindriche (r, φ, z) sono legate alle coordinate cartesiane (x, y, z) dalle relazioni:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ \\ y = r\sin\varphi \\ \\ z = z \end{cases}$$

e quindi la Lagrangiana di un punto materiale di massa m soggetto ad una forza conservativa di energia potenziale $V(r, \varphi, z)$ si esprime nella forma:

$$L(r, \varphi, z, \dot r, \dot\varphi, \dot z) = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - V(r, \varphi, z) \ .$$

I corrispondenti momenti cinetici sono:

$$
\begin{aligned}
p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \\
p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{p_r}{m} \\
\dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{mr^2} \\
\dot{z} &= \frac{p_z}{m} \ .
\end{aligned}
$$

Pertanto la funzione di Hamilton è:

$$
\begin{aligned}
H &= p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + V(r,\varphi,z) \ .
\end{aligned}
$$

Nel caso in cui l'energia potenziale si decompone nella forma:

$$
V(r,\varphi,z) = V_1(r) + V_2(z)
$$

ossia

$$
H = H(p_r, p_\varphi, p_z, r, z) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + V_1(r) + V_2(z) \ ,
$$

la variabile φ è ciclica e con il metodo della separazione delle variabili possiamo scrivere la funzione generatrice nella forma:

$$
F \ = \ p_\varphi\varphi + W_1(r) + W_2(z) - Et \ .
$$

Pertanto poniamo:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{2m}(\frac{\partial W_1}{\partial r})^2 + V_1(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = E - \beta \\
\frac{1}{2m}(\frac{\partial W_2}{\partial z})^2 + V_2(z) = \beta \ .
\end{cases}
$$

© 88-7999-464-6

Quindi:

$$W_1(r) = \int \sqrt{2mE - 2m\beta - 2mV_1(r) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}\, dr$$
$$W_2(z) = \int \sqrt{2m\beta - 2mV_2(z)}\, dz$$

e la funzione generatrice completa è:

$$F(p_\varphi, E, \beta, r, \varphi, z, t) = p_\varphi \varphi + \int \sqrt{2mE - 2m\beta - 2mV_1(r) - \frac{p_\varphi^2}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{2m\beta - 2mV_2(z)}\, dz - Et \; .$$

MH 20

Dimostrare l'integrabilità del sistema di n oscillatori armonici disaccopiati con frequenze $\omega_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, ..., n)$, descritto dall'Hamiltoniana

$$H(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{i=1}^{n} H_i(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \; ,$$

dove p_i, $q_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, ..., n)$.

Le funzioni $H_i(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$ formano un sistema di n integrali primi in involuzione, poiché

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial q_k}\frac{\partial H_j}{\partial p_k} - \frac{\partial H_i}{\partial p_k}\frac{\partial H_j}{\partial q_k} = 0 \; ,$$

e soddisfano la condizione di non singolarità se i p_j non sono nulli; infatti:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial p_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial H_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix} = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \; .$$

Pertanto, fissato il vettore reale $E = (E_1, ..., E_n)$ con $E_i > 0$, il prodotto cartesiano delle curve chiuse

$$\gamma(E_i) = \{(p_i, q_i) \in \mathbf{R}^2 /\ H_i(p_i, q_i) = E_i\}$$

ⓒ88-7999-464-6

è compatto. Per il teorema di Liouville–Arnold il sistema di oscillatori armonici disaccoppiati è integrabile.

MH 21

Dimostrare che il moto nello spazio di un punto materiale di massa m sotto l'azione di un campo di forze kepleriano è integrabile.

L'Hamiltoniana che descrive il problema è data dalla funzione

$$H(p_r, p_\vartheta, p_\varphi, r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}) + V(r) \ ,$$

dove (r, ϑ, φ) sono le coordinate sferiche che descrivono il moto del punto materiale, $(p_r, p_\vartheta, p_\varphi)$ sono i momenti cinetici coniugati e $V(r) = -\frac{k}{r}$ è l'energia potenziale dovuta all'attrazione newtoniana di un punto materiale posto nella origine del sistema di riferimento. Introduciamo gli integrali primi:

$$\begin{aligned} I_1 &= p_\varphi \\ I_2 &= p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \\ I_3 &= \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}) + V(r) \ . \end{aligned}$$

Le funzioni I_j sono in involuzione:

$$\{I_1, I_2\} = \frac{\partial I_1}{\partial r}\frac{\partial I_2}{\partial p_r} - \frac{\partial I_1}{\partial p_r}\frac{\partial I_2}{\partial r} + \frac{\partial I_1}{\partial \vartheta}\frac{\partial I_2}{\partial p_\vartheta} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\vartheta}\frac{\partial I_2}{\partial \vartheta} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi}\frac{\partial I_2}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial I_1}{\partial p_\varphi}\frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = 0 \ ;$$

analogamente si ha:

$$\begin{aligned} \{I_1, I_3\} &= 0 \ , \\ \{I_2, I_3\} &= 0 \ . \end{aligned}$$

Inoltre, tali integrali primi soddisfano la condizione di non singolarità se p_r e p_ϑ sono diversi da zero:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial p_r} & \frac{\partial I_1}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_1}{\partial p_\varphi} \\ \frac{\partial I_2}{\partial p_r} & \frac{\partial I_2}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_2}{\partial p_\varphi} \\ \frac{\partial I_3}{\partial p_r} & \frac{\partial I_3}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_3}{\partial p_\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2p_\vartheta & \frac{2p_\varphi}{\sin^2 \vartheta} \\ p_r & \frac{p_\vartheta}{r^2} & \frac{p_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} \end{pmatrix} = -\frac{1}{m}\ (2p_r p_\vartheta) \ .$$

Sia $I_1 = \alpha_1$, $I_2 = \alpha_2$, $I_3 = E$; la varietà

$$M_{(\alpha_1,\alpha_2,E)} = \{(p_r, p_\vartheta, p_\varphi, r, \vartheta, \varphi) \in \mathbf{R}^6 /\ p_\varphi = \alpha_1,\ p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} = \alpha_2,$$
$$\frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\vartheta}) + V(r) = E\}$$

è compatta per $E < 0$ e per il teorema di Liouville–Arnold si dimostra l'integrabilità del sistema.

MH 22

Si dimostri l'integrabilità secondo Liouville del moto di un corpo rigido a struttura giroscopica di massa m e momenti d'inerzia A, B, C con $A = B < C$, soggetto all'azione di un campo di gravità di intensità g.

Siano ϑ, φ, ψ (con $0 \le \vartheta < \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \psi < 2\pi$) gli angoli di Eulero che definiscono la posizione del corpo rigido. La Lagrangiana del problema assume la seguente forma:

$$L(\dot\vartheta, \dot\varphi, \dot\psi, \vartheta, \varphi, \psi) = \frac{1}{2}A(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}C(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta)^2 - mgd\cos\vartheta\ ,$$

dove d indica la distanza del baricentro dall'origine del riferimento. Denotando con p_ϑ, p_φ, p_ψ i momenti cinetici coniugati a ϑ, φ, ψ, la corrispondente Hamiltoniana è data da:

$$H(p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi, \vartheta, \varphi, \psi) = \frac{p_\vartheta^2}{2A} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2C} + mgd\cos\vartheta\ .$$

Introduciamo gli integrali primi:

$$I_1 = p_\varphi$$
$$I_2 = p_\psi$$
$$I_3 = \frac{p_\vartheta^2}{2A} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2C} + mgd\cos\vartheta\ .$$

Gli integrali I_j sono in involuzione, poiché si verifica facilmente che

$$\{I_1, I_2\} = \{I_1, I_3\} = \{I_2, I_3\} = 0\ .$$

Inoltre, per $p_\vartheta \neq 0$ è soddisfatta la condizione di non singolarità:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_1}{\partial p_\varphi} & \frac{\partial I_1}{\partial p_\psi} \\ \frac{\partial I_2}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_2}{\partial p_\varphi} & \frac{\partial I_2}{\partial p_\psi} \\ \frac{\partial I_3}{\partial p_\vartheta} & \frac{\partial I_3}{\partial p_\varphi} & \frac{\partial I_3}{\partial p_\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{p_\vartheta}{A} & \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} & -\frac{p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}\cos\vartheta + \frac{p_\psi}{C} \end{pmatrix} = \frac{p_\vartheta}{A} \ .$$

Sia $I_1 = \alpha_1$, $I_2 = \alpha_2$, $I_3 = E$; la varietà

$$M_{(\alpha_1,\alpha_2,E)} = \{(p_\vartheta, p_\varphi, p_\psi, \vartheta, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^6 /\ p_\varphi = \alpha_1,\ p_\psi = \alpha_2,$$
$$\frac{p_\vartheta^2}{2A} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + \frac{p_\psi^2}{2C} + mgd\cos\vartheta = E\}$$

è compatta per $E > -mgd$ e per il teorema di Liouville–Arnold si dimostra l'integrabilità del sistema.

MH 23

Determinare le variabili azione–angolo per l'oscillatore armonico.

Sia

$$H(p,q) = \frac{1}{2m}(p^2 + \omega^2 q^2)$$

la funzione di Hamilton dell'oscillatore armonico. Posto $H(p,q) = E$, si ha:

$$p^2 = 2mE - \omega^2 q^2$$

e quindi la corrispondente variabile d'azione è:

$$A = \oint p dq = \oint \sqrt{2mE - \omega^2 q^2}\ dq \ .$$

Ponendo $q = \sqrt{\frac{2mE}{\omega^2}}\sin\vartheta$, si ha:

$$A = \int_0^{2\pi} \sqrt{2mE - 2mE\sin^2\vartheta}\ \sqrt{\frac{2mE}{\omega^2}}\cos\vartheta\ d\vartheta$$
$$= \frac{2mE}{\omega}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{2\pi mE}{\omega} \ .$$

Pertanto l'Hamiltoniana in variabili azione–angolo diventa:

$$E = H(A) = \frac{\omega}{2\pi m} A \ .$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{A} = 0 \\ \\ \dot{\varphi} = \frac{\omega}{2\pi m} = \text{cost.} \ , \end{cases}$$

le cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} A(t) = A_0 \\ \\ \varphi(t) = \frac{\omega}{2\pi m} t + \varphi(0) \ . \end{cases}$$

MH 24

Determinare le variabili azione–angolo per il problema di Keplero nel piano.

Sia

$$V(r) = -\frac{k}{r}$$

l'energia potenziale kepleriana; consideriamo livelli di energia negativi $E < 0$, cui corrispondono orbite chiuse. Utilizzando coordinate polari (r, ϑ), la funzione di Hamilton diventa

$$H(p_r, p_\vartheta, r) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} \right) + V(r) \ .$$

La coordinata ϑ è ciclica e si può scrivere la funzione generatrice del metodo di Hamilton–Jacobi nella forma:

$$F = W(r) + \alpha_\vartheta \vartheta - Et \ ,$$

dove $\alpha_\vartheta \equiv p_\vartheta$. L'equazione di Hamilton–Jacobi diventa allora:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2} + 2mV(r) = 2mE \ .$$

Introduciamo le variabili d'azione J_ϑ, J_r come segue:

$$J_\vartheta = \oint \frac{\partial F}{\partial \vartheta} d\vartheta = \oint \alpha_\vartheta d\vartheta = \int_0^{2\pi} \alpha_\vartheta d\vartheta = 2\pi \alpha_\vartheta = 2\pi p_\vartheta \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Siano r_- e r_+ le distanze minime e massime del raggio istantaneo dal fuoco principale dell'ellisse:

$$\begin{aligned} J_r &= \oint \frac{\partial F}{\partial r}\, dr = \oint \frac{\partial W}{\partial r}\, dr \\ &= 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{1}{r}\sqrt{2mEr^2 + 2mkr - \alpha_\vartheta^2}\, dr \ ; \end{aligned}$$

Valutiamo l'integrale con il metodo dei residui; riscriviamo l'integrale nella forma:

$$J_r = 2\int_{r_-}^{r_+} \frac{\sqrt{2mE}}{r}\sqrt{(r-r_-)(r-r_+)}\, dr \ ,$$

dove

$$r_- r_+ = -\frac{\alpha_\vartheta^2}{2mE} \ , \qquad r_+ + r_- = -\frac{k}{E} \ .$$

Poniamo $z = \frac{r-r_-}{r_+-r_-}$ (ovvero $r = \frac{zr_+ + r_-}{1+z}$); allora si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \frac{r_+ - r_-}{(1+z)^2} \\ r - r_- &= \frac{(r_+ - r_-)z}{1+z} \\ r - r_+ &= \frac{r_- - r_+}{1+z} \end{aligned}$$

e quindi:

$$J_r = 2\sqrt{2m|E|}(r_- - r_+)^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2(zr_+ + r_-)}\, dz \ .$$

La funzione integranda presenta un polo di ordine 2 in $z = -1$ il cui residuo vale $\frac{r_- + r_+}{2i(r_- - r_+)^2}$ ed un polo di ordine 1 in $z = -\frac{r_-}{r_+}$ il cui residuo vale $\frac{i\sqrt{r_- r_+}}{(r_+ - r_-)^2}$. Quindi, per il teorema dei residui si ha:

$$I_r = -2\pi\alpha_\vartheta + \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} = -J_\vartheta + \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} \ .$$

Pertanto, dall'ultima espressione si ricava:

$$\frac{(J_r + J_\vartheta)^2}{\pi^2 k^2} = \frac{2m}{-E}$$

ovvero

$$E \ = \ H \ = -\frac{2m\pi^2 k^2}{(J_r + J_\vartheta)^2} \ .$$

© 88-7999-464-6

Si noti che tale Hamiltoniana è completamente degenere, poiché le frequenze fondamentali

$$\omega_r = \frac{\partial H}{\partial J_r}$$

e

$$\omega_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial J_\vartheta}$$

coincidono.

MH 25

Determinare la trasformazione canonica che rimuove la perturbazione a $O(\varepsilon^2)$ per l'Hamiltoniana:

$$H(A,\varphi,t) = \frac{A^2}{2} + \varepsilon(\cos\varphi + \cos(\varphi - t)) \ .$$

Determinare inoltre la nuova Hamiltoniana.

Riscriviamo l'Hamiltoniana precedente nella forma:

$$H(A,\varphi,t) = h(A) + \varepsilon f(\varphi,t) \ ,$$

dove $h(A) = \frac{A^2}{2}$ e $f(\varphi,t) = \cos\varphi + \cos(\varphi - t)$. La frequenza del sistema è dunque:

$$\omega \ = \ \frac{\partial h}{\partial A} \ = \ A \ .$$

Sia $F(A',\varphi,t) = A'\varphi + \varepsilon\Phi(A',\varphi,t)$ la funzione generatrice della trasformazione canonica (vicina all'identità):

$$\begin{cases} A = A' + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \\ \varphi' = \varphi + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial A'} \ . \end{cases} \qquad (TC)$$

Affinché la trasformazione canonica rimuova la perturbazione a $O(\varepsilon^2)$ deve essere soddisfatta la relazione:

$$\omega(A')\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} + f(A',\varphi,t) - f_0(A') = 0 \ , \qquad (TP1)$$

dove $f_0(A')$ è la media della funzione perturbatrice f sugli angoli φ, t:

$$f_0(A') \ \equiv \ \int_{T^2} f(A',\varphi,t)\ d\varphi\ dt \ , \qquad T^2 \equiv \left(\frac{\mathbf{R}}{2\pi\mathbf{Z}}\right)^2 \ .$$

©88-7999-464-6

Poiché la funzione perturbatrice è una funzione trigonometrica indipendente dalla variabile d'azione, la sua media sugli angoli φ, t è identicamente nulla.

Sviluppiamo le funzioni f e Φ in serie di Fourier come segue:

$$\begin{aligned} \Phi(A',\varphi,t) &= \sum_{n,m\neq 0,\ n,m\in\mathbf{Z}} \hat{\Phi}_{n,m}(A')\ e^{i(n\varphi+mt)} \\ f(\varphi,t) &= \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} \hat{f}_{n,m}\ e^{i(n\varphi+mt)}\ . \end{aligned}$$

Inserendo tali espressioni nella $(TP1)$ si ottiene:

$$\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} i(n\omega(A')+m)\hat{\Phi}_{n,m}(A')\ e^{i(n\varphi+mt)} = -\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} \hat{f}_{n,m}\ e^{i(n\varphi+mt)}\ ,$$

dove le uniche componenti di Fourier non nulle della $f(\varphi,t)$ sono:

$$\hat{f}_{1,0} = \frac{1}{2}\ ,\quad \hat{f}_{-1,0} = \frac{1}{2}\ ,\quad \hat{f}_{1,-1} = \frac{1}{2}\ ,\quad \hat{f}_{-1,1} = \frac{1}{2}\ .$$

Corrispondentemente le uniche componenti non nulle della funzione Φ sono:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{1,0} &= -\frac{1}{2i\omega} \\ \hat{\Phi}_{-1,0} &= \frac{1}{2i\omega} \\ \hat{\Phi}_{1,-1} &= -\frac{1}{2i(\omega-1)} \\ \hat{\Phi}_{-1,1} &= \frac{1}{2i(\omega-1)} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \Phi(A',\varphi,t) &= \hat{\Phi}_{1,0}\ e^{i\varphi} + \hat{\Phi}_{-1,0}\ e^{-i\varphi} + \hat{\Phi}_{1,-1}\ e^{i(\varphi-t)} + \hat{\Phi}_{-1,1}\ e^{-i(\varphi-t)} \\ &= -\frac{1}{\omega}\sin\varphi\ -\ \frac{1}{\omega-1}\sin(\varphi-t)\ . \end{aligned}$$

Poiché la media della funzione perturbatrice è nulla, $f_0 = 0$, la nuova Hamiltoniana imperturbata coincide con la funzione $h(A)$ e possiamo scrivere la nuova Hamiltoniana $H_1(A',\varphi',t)$ nella forma:

$$H_1(A',\varphi',t)\ =\ \frac{A'^2}{2} + \varepsilon^2 f_1(A',\varphi',t)\ .$$

ⓒ 88-7999-464-6

Per determinare la nuova funzione perturbatrice $f_1(A', \varphi', t)$, usiamo la prima equazione delle (TC):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(A' + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)^2 + \varepsilon f(\varphi, t) + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t} \\
&= \frac{A'^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)^2 + \varepsilon\left[A'\,\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + f(\varphi, t) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right] \\
&= \frac{A'^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)^2 \ ,
\end{aligned}$$

poiché il termine $O(\varepsilon)$ è nullo per la $(TP1)$.

Dalla relazione

$$\Phi(A', \varphi, t) \ = \ \Phi(A', \varphi', t) + O(\varepsilon) \ ,$$

la nuova funzione perturbatrice assume la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
f_1(A', \varphi', t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi(A', \varphi', t)}{\partial\varphi}\right)^2 + O(\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A'}\sin\varphi' + \frac{1}{(A'-1)}\sin(\varphi' - t)\right]^2 + O(\varepsilon) \\
&= \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{A'^2} - \frac{1}{A'^2}\cos(2\varphi') + \frac{1}{(A'-1)^2} - \frac{1}{(A'-1)^2}\cos(2\varphi' - 2t) \\
&+ \frac{2}{A'(A'-1)}(\cos t - \cos(2\varphi' - t))\Big] + O(\varepsilon) \ .
\end{aligned}$$

MH 26

Determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica che rimuove la perturbazione a $O(\varepsilon^2)$ per l'Hamiltoniana:

$$H(A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2) = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^3}{3} + \varepsilon[(A_1 - A_2)\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\varphi_1] \ .$$

Riscriviamo l'Hamiltoniana nella forma

$$H(A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2) = h(A_1, A_2) + \varepsilon f(A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2) \ .$$

Le frequenze fondamentali sono:

$$\omega_1 \ = \ \frac{\partial h}{\partial A_1} \ = \ A_1 \ , \qquad \omega_2 \ = \ \frac{\partial h}{\partial A_2} \ = \ A_2^2 \ .$$

©88-7999-464-6

Sia $F(A'_1, A'_2, \varphi_1, \varphi_2) = A'_1 \cdot \varphi_1 + A'_2 \cdot \varphi_2 + \varepsilon\Phi(A'_1, A'_2, \varphi_1, \varphi_2)$ la funzione generatrice della trasformazione canonica (vicina all'identità):

$$\begin{cases} A_1 = A'_1 + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} \\ A_2 = A'_2 + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} \\ \varphi'_1 = \varphi_1 + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial A'_1} \\ \varphi'_2 = \varphi_2 + \varepsilon \frac{\partial\Phi}{\partial A'_2} \ . \end{cases}$$

Affinché la trasformazione canonica rimuova la perturbazione a $O(\varepsilon^2)$ deve essere soddisfatta la relazione:

$$\omega_1(A'_1) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \omega_2(A'_2) \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} + f(A'_1, A'_2, \varphi_1, \varphi_2) - f_0(A'_1, A'_2) = 0 \ , \quad (TP2)$$

dove $f_0(A'_1, A'_2)$ è la media della funzione perturbatrice f sugli angoli φ_1, φ_2:

$$f_0(A'_1, A'_2) \ \equiv \ \int_{T^2} f(A'_1 A'_2, \varphi_1, \varphi_2)\ d\varphi_1\ d\varphi_2 \ = \ \frac{1}{2}(A_1 - A_2) \ ,$$

dove $T^2 \equiv (\frac{\mathbf{R}}{2\pi\mathbf{Z}})^2$.

Sviluppiamo le funzioni f e Φ in serie di Fourier come segue:

$$\begin{aligned} \Phi(A'_1, A'_2, \varphi_1, \varphi_2) \ &= \sum_{n,m\neq 0,\ n,m\in\mathbf{Z}} \hat{\Phi}_{n,m}(A'_1, A'_2)\ e^{i(n\varphi_1 + m\varphi_2)} \\ f(A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2) \ &= \sum_{n,m\in\mathbf{Z}} \hat{f}_{n,m}(A_1, A_2)\ e^{i(n\varphi_1 + m\varphi_2)} \ . \end{aligned}$$

Inserendo tali espressioni nella $(TP2)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m\in\mathbf{Z}} i(n\omega_1 + m\omega_2)\hat{\Phi}_{n,m}(A'_1, A'_2)\ e^{i(n\varphi_1 + m\varphi_2)} \\ &\qquad = \frac{1}{4}(A'_1 - A'_2)\big(e^{i(2\varphi_1 - 2\varphi_2)} + e^{-i(2\varphi_1 - 2\varphi_2)}\big) - \frac{1}{2}(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}) \ . \end{aligned}$$

ⓒ 88-7999-464-6

Pertanto le componenti non nulle della Φ sono:

$$
\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{2,-2} &= \frac{1}{8i(\omega_1-\omega_2)}(A_1'-A_2') \\
\hat{\Phi}_{-2,2} &= -\frac{1}{8i(\omega_1-\omega_2)}(A_1'-A_2') \\
\hat{\Phi}_{1,0} &= -\frac{1}{2i\omega_1} \\
\hat{\Phi}_{-1,0} &= \frac{1}{2i\omega_1}
\end{aligned}
$$

e quindi:

$$
\begin{aligned}
\Phi(A_1',A_2',\varphi_1,\varphi_2) &= \frac{1}{4}\frac{A_1'-A_2'}{\omega_1-\omega_2}\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)-\frac{1}{\omega_1}\sin\varphi_1 \\
&= \frac{1}{4}\frac{A_1'-A_2'}{A_1'-A_2'^2}\sin(2\varphi_1-2\varphi_2)-\frac{1}{A_1'}\sin\varphi_1\ .
\end{aligned}
$$

MH 27

Si consideri l'Hamiltoniana a due gradi di libertà

$$
\begin{aligned}
H(L,G,\ell,g) = -\frac{1}{2L^2}-G-\varepsilon\Big[L^4+L^2\cos\ell+L^2G\cos(3\ell-2g) \\
+\frac{1}{2}LG^2\cos(\ell-g)\Big]\ ,
\end{aligned}
$$

dove (L,ℓ), (G,g) sono variabili azione–angolo canonicamente coniugate. Sia $\varepsilon>0$ un parametro sufficientemente piccolo.
1) Si determini la funzione generatrice che rimuove la perturbazione fino al secondo ordine in ε;
2) in corrispondenza della trasformazione canonica indotta da tale funzione generatrice, si calcoli la nuova Hamiltoniana imperturbata a meno di $O(\varepsilon^2)$;
3) calcolare i valori delle variabili d'azione per i quali la funzione generatrice non è definita e che generano quindi divisori nulli.

1) Scriviamo l'Hamiltoniana nella forma

$$
H(L,G,\ell,g)=h(L,G)+\varepsilon f(L,G,\ell,g)\ ,
$$

©88-7999-464-6

dove

$$
\begin{aligned}
h(L,G) &= -\frac{1}{2L^2} - G\ ,\\
f(L,G,\ell,g) &= -\Big(L^4 + L^2\cos\ell + L^2G\cos(3\ell-2g) + \frac{1}{2}LG^2\cos(\ell-g)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Operiamo la trasformazione canonica $(L,G,\ell,g) \to (L',G',\ell',g')$ con funzione generatrice $\Phi(L',G',\ell,g)$:

$$
\begin{aligned}
L &= L' + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\ell}(L',G',\ell,g)\\
G &= G' + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial g}(L',G',\ell,g)\\
\ell' &= \ell + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial L'}(L',G',\ell,g)\\
g' &= g + \varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial G'}(L',G',\ell,g)\ .
\end{aligned}
$$

Inserendo tale trasformazione di coordinate nell'Hamiltoniana ed espandendo in serie di Taylor al primo ordine in ε, si ha:

$$
\begin{aligned}
&h(L'+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\ell}, G'+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial g}) + \varepsilon f(L'+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial\ell}, G'+\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial g},\ell,g)\\
&\quad = h(L',G') + \varepsilon h_L(L',G')\frac{\partial\Phi}{\partial\ell} + \varepsilon h_G(L',G')\frac{\partial\Phi}{\partial g}\\
&\quad + \varepsilon\overline{f}(L',G') + \varepsilon\tilde{f}(L',G',\ell',g') + O(\varepsilon^2)\ ,
\end{aligned}
$$

dove $h_L = \frac{\partial h}{\partial L}(L',G') = \frac{1}{L'^3} \equiv \omega(L') \equiv \omega$, $h_G = \frac{\partial h}{\partial G}(L',G') = -1$, $\overline{f}(L',G') = -L'^4$, mentre $\tilde{f}(L',G',\ell',g') = f(L',G',\ell',g') - \overline{f}(L',G')$. La funzione generatrice $\Phi(L',G',\ell,g)$ si determina dall'equazione

$$
\begin{aligned}
\omega\frac{\partial\Phi}{\partial\ell} - \frac{\partial\Phi}{\partial g} &= -\tilde{f}(L',G',\ell',g')\\
&= L'^2\cos\ell + L'^2G'\cos(3\ell-2g) + \frac{1}{2}L'G'^2\cos(\ell-g)\ ;
\end{aligned}
$$

espandendo in serie di Fourier si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m,n} i(\omega m - n)\ \Phi_{m,n}(L',G')e^{i(m\ell+ng)} = \frac{L'^2}{2}(e^{i\ell}+e^{-i\ell})\\
&\quad + \frac{L'^2G'}{2}(e^{i(3\ell-2g)}+e^{-i(3\ell-2g)}) + \frac{L'G'^2}{4}(e^{i(\ell-g)}+e^{-i(\ell-g)})\ ,
\end{aligned}
$$

ⓒ 88-7999-464-6

da cui si ottiene che i coefficienti di Fourier non nulli della funzione Φ sono:

$$\Phi_{1,0} = \frac{L'^2}{2i}\frac{1}{\omega}\ , \qquad \Phi_{-1,0} = -\frac{L'^2}{2i}\frac{1}{\omega}$$

$$\Phi_{3,-2} = \frac{L'^2 G'}{2i}\frac{1}{3\omega-2}\ , \qquad \Phi_{-3,2} = -\frac{L'^2 G'}{2i}\frac{1}{3\omega-2}$$

$$\Phi_{1,-1} = \frac{L' G'^2}{4i}\frac{1}{\omega-1}\ , \qquad \Phi_{-1,1} = -\frac{L' G'^2}{4i}\frac{1}{\omega-1}$$

e quindi

$$\Phi(L',G',\ell,g) = \frac{L'^2}{\omega}\sin\ell + \frac{L'^2 G'}{3\omega-2}\sin(3\ell-2g) + \frac{L'G'^2}{2(\omega-1)}\sin(\ell-g)\ .$$

2) La nuova Hamiltoniana imperturbata $h_1(L',G')$ è data dalla seguen–te espressione:

$$h_1(L',G') = -\frac{1}{2L'^2} - G' - \varepsilon L'^4\ .$$

3) Escludendo il caso in cui $L'=\infty$, i valori per i quali la funzione generatrice non è definita corrispondono ai divisori nulli

$$3\omega - 2 = 0\ , \qquad \omega - 1 = 0\ ;$$

poiché $\omega = \frac{1}{L'^3}$ si ha:

$$L' = (\frac{3}{2})^{1/3}\ , \qquad L' = 1\ .$$

Esercizi proposti

1) Determinare per quali valori delle costanti A, α, β, la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} P = A\ \sin(\beta p)\ e^{\alpha q} \\ \\ Q = A\ \cos(\beta p)\ e^{-\alpha q}\ . \end{cases}$$

Soluzione: La trasformazione non è mai canonica.

2) Determinare per quali valori delle costanti A e B, la seguente trasformazione è canonica:

$$\begin{cases} P = A\ \sqrt{p}\ \sin(2q) \\ \\ Q = B\ \sqrt{p}\ \cos(2q). \end{cases}$$

In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice e applicare la trasformazione all'Hamiltoniana

$$H(p, q)\ = -\frac{p}{2}\ \sin(4q)\ .$$

Risolvere le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili.

Soluzione: Se $AB = -1$ la trasformazione è canonica. Posto, ad esempio, $A = 1$ e $B = -1$, la funzione generatrice è $F(Q, q) = \frac{Q^2}{2}\mathrm{tg}(2q)$. L'Hamiltoniana nelle nuove variabili è $K(P, Q) = PQ$.

3) Si usi il metodo di Hamilton–Jacobi per determinare il moto associato

all'Hamiltoniana

$$H(p,q) \;=\; \frac{p^2}{2q^2} + \alpha\; q^2 \;.$$

Soluzione: Si trova

$$q(t) = \sqrt{\frac{E}{\alpha} - 2\alpha(\beta + t)^2} \;,$$

con E, β costanti.

4) Si applichi il metodo di Hamilton–Jacobi per determinare il moto associato all'Hamiltoniana

$$H(p,q) \;=\; p^2\; e^{-2q} - \alpha\; e^q \;.$$

Soluzione: La soluzione risulta essere data da

$$q(t) = \ln[\alpha(\beta + t)^2 - \frac{E}{\alpha}] \;,$$

con E, β costanti.

5) Si applichi il metodo di Hamilton–Jacobi per determinare il moto associato all'Hamiltoniana

$$H(p,q) \;=\; p\; \mathrm{tg}(q) \;.$$

Soluzione: Si trova

$$q(t) = \arcsin(e^{\beta+t})$$

con β costante.

6) Si applichi il metodo di Hamilton–Jacobi per determinare il moto associato all'Hamiltoniana

$$H(p,q) \;=\; p^2\; \mathrm{e}^q \;.$$

© 88-7999-464-6

Soluzione: Si trova

$$q(t) = \ln \frac{1}{E(\beta + t)^2} \ ,$$

con E, β costanti.

Capitolo 7
Complementi: Applicazioni alla Meccanica Celeste

• In questo capitolo introdurremo alcune delle principali applicazioni della teoria perturbativa alla Meccanica Celeste. In particolare, la formulazione in termini di opportune variabili azione–angolo consentirà di analizzare il moto di corpi celesti soggetti alla mutua attrazione gravitazionale. L'applicazione al primo ordine della teoria delle perturbazioni permette di calcolare alcuni fenomeni di carattere fisico, quali la *precessione del perielio di Mercurio,* la *precessione degli equinozi della Terra,* la *librazione in longitudine della Luna.*

• **Il problema dei 3 corpi:** Si considerino due corpi puntiformi S e T di masse m_S e m_T soggetti alla mutua attrazione gravitazionale (ad esempio, Sole e Terra). Le leggi di Keplero forniscono la soluzione completa delle equazioni del moto dei due corpi. In particolare, la prima legge di Keplero stabilisce che la traiettoria descritta da T intorno ad S è un ellisse di cui S occupa uno dei due fuochi ed è possibile scrivere esplicitamente la soluzione del moto; pertanto, il problema dei 2 corpi è integrabile. Il modello che descrive il moto della Terra nel sistema solare diventa più realistico se si introduce l'azione di un terzo corpo G di massa m_G (ad esempio, se si considera il moto di Sole, Terra e Giove). Tuttavia, in tal caso non è possibile determinare una soluzione analitica delle equazioni del moto, poiché H. Poincaré ha dimostrato che non esiste un numero sufficiente di integrali primi tali da rendere integrabile il problema. Assumiamo che la massa di T sia molto inferiore alle masse di S e di G (problema *ristretto* dei 3 corpi). Supponiamo inoltre che la massa di G sia molto più piccola della massa del corpo centrale S, cioè $m_T << m_G << m_S$; allora l'azione di G su T si può considerare come una piccola perturbazione rispetto a quella indotta da S e in tal caso il modello rientra nella classe dei sistemi quasi–integrabili. In particolare, il moto di T rispetto ad S costituisce la parte integrabile, la cui soluzione è fornita dalle leggi di Keplero, mentre la perturbazione è dovuta all'interazione tra T e G. Poiché l'attrazione gravitazionale è direttamente proporzionale alle masse, risulterà che il parametro perturbativo del sistema rappresenta fisicamente il rapporto delle masse dei primari m_G/m_S (nel caso di Giove e del Sole il rapporto delle masse è pari a circa 10^{-3}). Il problema ristretto dei 3 corpi può essere convenientemente studiato in termini di opportune variabili azione–angolo, dette *variabili di Delaunay.* Le variabili d'azione sono legate agli elementi ellittici dell'orbita di T (semiasse maggiore, eccentricità ed inclinazione), mentre le variabili d'angolo rappresentano la posizione di T sull'orbita (anomalia media, argomento del perielio e longitudine del nodo ascendente). Nella nostra trattazione ci occuperemo del problema *piano,* in cui si assume che il moto dei 3 corpi abbia luogo sullo stesso piano, trascurando così l'inclinazione relativa delle orbite. In appendice sono riportati alcuni dati astronomici dei pianeti del sistema solare.

• **Risonanze orbitali:** Consideriamo il problema dei 3 corpi ristretto e assumiamo che il moto di tali oggetti abbia luogo sullo stesso piano (cioè trascuriamo l'inclinazione tra i piani orbitali). Denotiamo con P_T e P_G i periodi di rivoluzione di T e G attorno ad S. Si dice che si ha una *risonanza orbitale* tra T e G, quando il rapporto tra i due periodi è un numero razionale:

$$\frac{P_T}{P_G} = \frac{p}{q} , \qquad p, q \in \mathbf{Z}/\{0\} .$$

Nell'ambito del sistema solare si trovano numerosi casi di risonanze orbitali. Ad esempio, il rapporto dei periodi di Giove e Saturno è approssimativamente 2/5. Inoltre, si trovano molte risonanze orbitali tra i satelliti dei pianeti maggiori. I satelliti galileiani di Giove (Io, Europa, Ganimede e Callisto) sono tali che il rapporto dei periodi di rivoluzione attorno a Giove di Io ed Europa è circa 1/2, di Io e Ganimede è circa 1/4, di Europa e Ganimede è circa 1/2. Analoghe relazioni si trovano tra i satelliti di Saturno; per citarne alcune, ricordiamo che il rapporto dei periodi di rivoluzione attorno a Saturno di Titano e Iperione vale circa 3/4, quello di Titano e Giapeto è circa 1/5. La lista delle risonanze orbitali che si osservano nel sistema solare è molto lunga e si accresce notevolmente se si includono le risonanze con Giove di oggetti compresi nella fascia degli asteroidi (cioè la zona del sistema solare compresa tra Marte e Giove, popolata da migliaia di piccoli corpi di massa notevolmente più piccola rispetto a quella dei pianeti e dei satelliti). Vale la pena di menzionare l'esistenza di due gruppi di asteroidi, i Greci e i Troiani, tali che il rapporto del loro periodo di rivoluzione attorno al Sole e del periodo di rivoluzione di Giove è con buona approssimazione pari ad 1. Ciò significa che tali asteroidi si muovono sulla stessa orbita di Giove (il primo gruppo precede Giove e il

ⓒ 88-7999-464-6

secondo lo segue); inoltre, la configurazione formata dagli asteroidi, Sole e Giove è un triangolo equilatero (cioè tale che, durante il moto, la distanza tra gli asteroidi e Giove si mantiene uguale alla distanza tra gli asteroidi e il Sole o alla distanza tra Giove e il Sole). Queste particolari configurazioni vennero trovate matematicamente da J.L. Lagrange (come punti di equilibrio in un opportuno sistema di riferimento, ruotante con la stessa velocità angolare dei primari) e confermate sperimentalmente dalle osservazioni astronomiche.

• **Risonanze di rotazione:** Un'altro problema interessante della Meccanica Celeste riguarda le *risonanze di rotazione*. Consideriamo due corpi T e L (ad esempio, Terra e Luna) di masse m_T e m_L rispettivamente, e denotiamo con P_{riv} il periodo di rivoluzione di L attorno a T. Assumiamo che L sia un corpo rigido tridimensionale e che sia quindi dotato di un moto di rotazione attorno ad un asse fisico interno con periodo P_{rot}. Si noti che in tale problema si trascura l'azione gravitazionale di altri corpi, ma si cambia l'ipotesi di masse puntiformi, sostituendo uno dei due oggetti con un corpo rigido. Si ha una *risonanza di rotazione* di ordine p/q, se il rapporto tra i periodi di rivoluzione e di rotazione vale p/q:

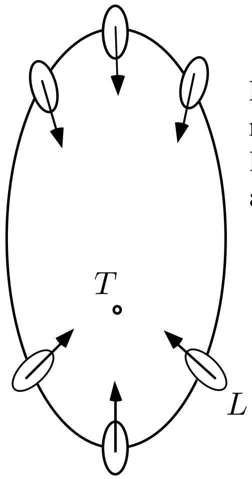
$$\frac{P_{riv}}{P_{rot}} = \frac{p}{q} , \qquad p, q \in \mathbf{Z}/\{0\} .$$

L'esempio più famoso di risonanza di rotazione è fornito dal sistema Terra–Luna. È noto che la Luna rivolge sempre la stessa faccia verso la Terra; ciò è dovuto al fatto che il rapporto tra i periodi di rivoluzione e di rotazione della Luna è con buona approssimazione uguale ad 1. Tale situazione rappresenta la regola piuttosto che l'eccezione, poiché numerosi satelliti del sistema solare si muovono rispettando una risonanza di rotazione di ordine 1/1 (detta anche risonanza *sincrona*), cioè in modo tale da rivolgere sempre lo stesso emisfero verso il pianeta ospitante. Esempi illustri sono i satelliti di Marte (Phobos e Deimos), i satelliti galileiani di Giove (Io, Europa, Ganimede e Callisto), molti dei satelliti di Saturno (tra cui Mima, Encelado, Dione, Rea, Titano, Giapeto), i principali satelliti di Urano (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania, Oberon). L'unica eccezione a questa "regola" è presentata dal sistema Mercurio–Sole, poiché il rapporto tra il periodo di rivoluzione di Mercurio attorno al Sole e il periodo di rotazione di Mercurio attorno a se stesso è pari a circa 3/2. Tale risonanza di rotazione di ordine 3/2 implica che durante 2 rivoluzioni attorno al Sole, Mercurio compie 3 rotazioni attorno a se stesso. Non sono note altre risonanze di rotazione di ordine diverso da 1/1 o 3/2. Un'illustrazione delle risonanze 1/1 e 3/2 è mostrata nella Figura 1, dove si riportano gli esempi Terra–Luna e Mercurio–Sole.

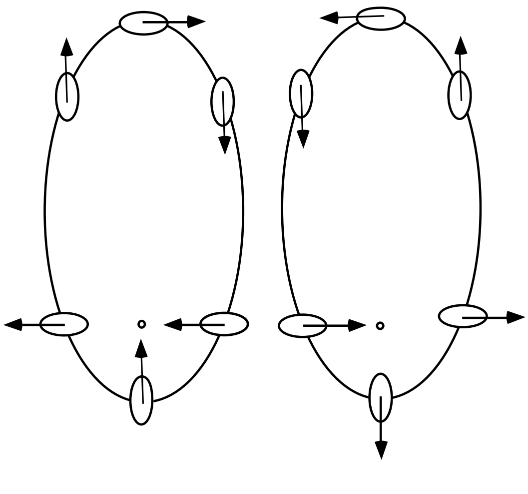
Un altro caso interessante di risonanza di rotazione è fornito da Plutone e dal suo satellite Caronte. Non solo il periodo di rotazione di Caronte T^C_{rot} coincide con il periodo di rivoluzione T^C_{riv} attorno a Plutone, ma è altresì uguale al periodo di rotazione T^P_{rot} di Plutone attorno a se stesso:

$$T^C_{rot} = T^C_{riv} = T^P_{rot} \ .$$

Tale relazione, detta *risonanza sincrona completa,* implica che i due oggetti non si volgono mai le spalle, mostrando reciprocamente sempre lo stesso emisfero.



La risonanza 1/1. Durante una rivoluzione attorno alla Terra, la Luna compie una rotazione attorno a se stessa.



La risonanza 3/2. Dopo due rivoluzioni attorno al Sole, Mercurio ha compiuto tre rotazioni attorno a se stesso.

Figura 1: Illustrazione delle risonanze di rotazione 1/1 e 3/2.

Derivazione delle equazioni per il problema ristretto dei 3 corpi e calcolo della precessione del perielio di Mercurio

I temi MC 1-5 riguardano:
• alcuni richiami sul problema dei due corpi,
• l'introduzione delle variabili azione–angolo di Delaunay,
• la derivazione dell'Hamiltoniana per un modello di problema ristretto dei 3 corpi,
• l'espansione in serie della funzione perturbatrice,
• il calcolo della precessione del perielio di Mercurio.

MC 1. Alcuni richiami sul problema dei due corpi.

Siano P_0 e P_1 due corpi di masse m_0 e m_1; consideriamo un sistema di riferimento inerziale con origine nel baricentro di P_0 e P_1 e con l'asse verticale perpendicolare al piano orbitale. Siano $\underline{\xi}_0$, $\underline{\xi}_1 \in \mathbf{R}^2$ le coordinate di P_0 e P_1 in tale riferimento. Normalizziamo le unità di misura in modo che la costante di gravitazione sia uguale ad 1 e denotiamo con $M = m_0 + m_1$, $m = \frac{m_0 m_1}{M}$. La posizione relativa di P_1 rispetto a P_0 è $\underline{x} = \underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0$ e sia $\underline{X} = m\underline{\dot{x}}$ il momento cinetico coniugato ad $\underline{x}$. Allora, l'Hamiltoniana che descrive il problema dei due corpi è data dalla funzione

$$H_{2c}(\underline{X}, \underline{x}) = \frac{1}{2m}|\underline{X}|^2 - \frac{mM}{|\underline{x}|} \ .$$

Consideriamo il caso in cui l'energia totale del sistema sia negativa e quindi l'orbita descritta da P_1 attorno a P_0 è un'ellisse. Denotiamo con a e b i semiassi maggiore e minore dell'ellisse e con e l'eccentricità. Dalla teoria di Keplero si ottiene che il semiasse maggiore è legato all'energia meccanica totale $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mM}{r}$ (dove v è la velocità relativa di P_1) dalla relazione $E = -\frac{mM}{2a}$.
Passiamo a coordinate polari (r, φ) nel sistema di riferimento la cui origine

coincide con P_0 e siano $(R,\Phi)=(m\dot r, mr^2\dot\varphi)$ i momenti cinetici coniugati:

$$\underline{x}=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$
$$\underline{X}=(R\cos\varphi-\frac{\Phi}{r}\sin\varphi, R\sin\varphi+\frac{\Phi}{r}\cos\varphi)\ .$$

Si osservi che φ indica l'angolo tra l'asse delle ascisse del sistema di riferimento e la posizione istantanea di P_1. Da $|\underline{X}|^2=R^2+\frac{\Phi^2}{r^2}$, $|\underline{x}|=r$, si ottiene che l'Hamiltoniana in coordinate polari è data dall'espressione:

$$H_{cp}(R,\Phi,r,\varphi)=\frac{1}{2m}\ (R^2+\frac{\Phi^2}{r^2})-\frac{mM}{r}\ .$$

La velocità relativa di P_1 attorno a P_0 assume la forma:

$$v^2=\dot r^2+r^2\dot\varphi^2=\frac{2M}{r}-\frac{M}{a}\ .$$

Al perielio (cioè al punto di minima distanza tra P_0 e P_1) si ha $r=a(1-e)$, $v=\sqrt{\frac{M(1+e)}{r}}$, da cui si ottiene $r^2\dot\varphi=\sqrt{Ma(1-e^2)}$. Denotiamo con f l'*anomalia vera*, ossia l'angolo tra la retta del perielio e la posizione istantanea di P_1 e sia γ l'*argomento del perielio*, ossia l'angolo tra l'asse delle ascisse e la direzione del perielio (Figura 2).

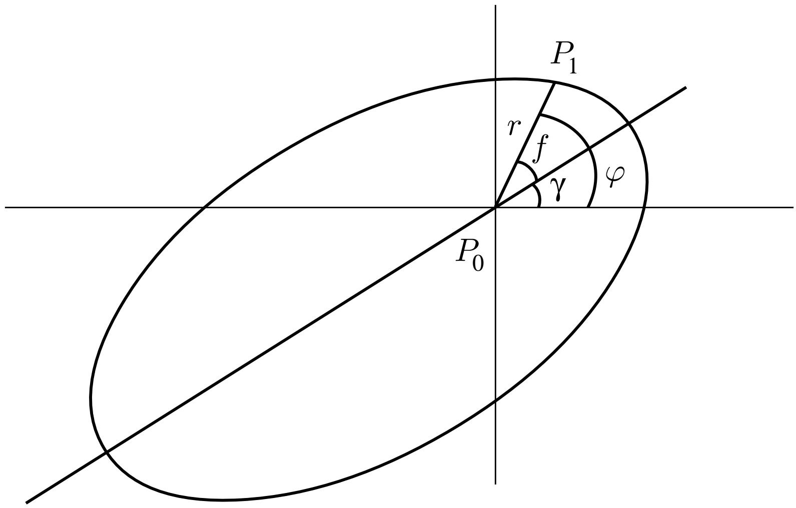


Figura 2. Posizione relativa di P_1 rispetto a P_0.

Introduciamo l'*anomalia eccentrica* come segue. Sia S la proiezione sull'asse del perielio della posizione istantanea di P_1 e denotiamo con C il centro dell'ellisse (Figura 3). Disegniamo il semicerchio superiore di raggio a e

ⓒ 88-7999-464-6

centro C e sia Q l'intersezione della direzione SP_1 con il semicerchio. Si definisce anomalia eccentrica l'angolo $u = QCS$. Dalle relazioni $P_0S = CS - CP_0 = a\cos u - ae$, $P_0S = r\cos f$, si ottiene $r\cos f = a(\cos u - e)$. Inoltre, da alcune proprietà relative alle ellissi si ha che $\frac{P_1S}{QS} = \frac{b}{a} = \frac{r\sin f}{a\sin u}$, ossia $r\sin f = b\sin u = a\sqrt{1-e^2}\sin u$, poiché $b = a\sqrt{1-e^2}$.

Pertanto si ottiene

$$(r\sin f)^2 + (r\cos f)^2 = r^2 = a^2(1 - e\cos u)^2 \ ,$$

ossia

$$r = a(1 - e\cos u) \ .$$

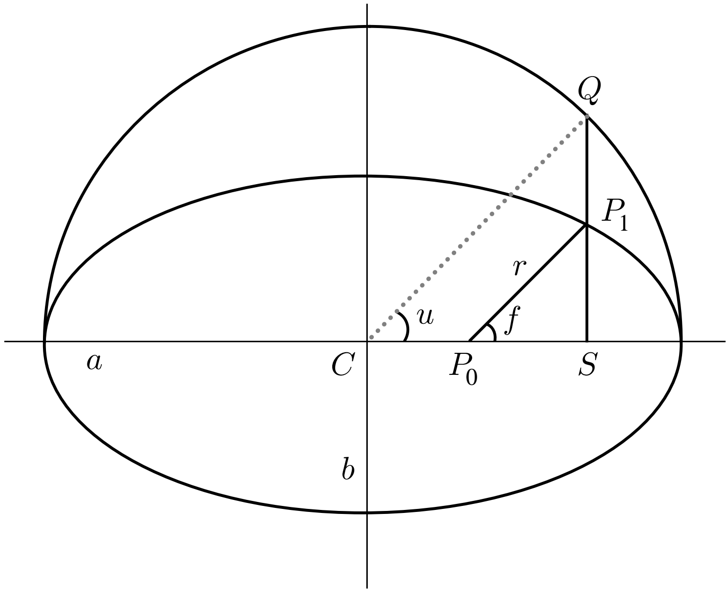


Figura 3. Introduzione dell'anomalia eccentrica u.

MC 2. Introduzione delle variabili azione–angolo di Delaunay nel piano.

Consideriamo due corpi P_0 e P_1 di masse rispettivamente m_0 e m_1. Dalle formule derivate in MC 1, abbiamo visto che l'Hamiltoniana in coordinate polari assume la seguente espressione:

$$H_{cp}(R, \Phi, r, \varphi) = \frac{1}{2m}\ (R^2 + \frac{\Phi^2}{r^2}) - \frac{mM}{r}\ .$$

Vogliamo ora introdurre opportune variabili azione–angolo $(\Lambda_0, \Gamma_0, \lambda, \gamma)$, dette variabili di Delaunay. A tale scopo osserviamo che dalla relazione $H_{cp} = E$, dove E denota l'energia totale del sistema, risulta

$$R = \sqrt{2mE + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{\Phi^2}{r^2}}\ .$$

Poiché φ è una coordinata ciclica, posto $\Gamma_0 = \Phi$ e $\Lambda_0 = \sqrt{-\frac{m^3 M^2}{2E}}$, scriviamo la funzione generatrice nella forma:

$$F(\Lambda_0, \Gamma_0, r, \varphi) = \int R dr + \Gamma_0 \varphi = \int \sqrt{-\frac{m^4 M^2}{\Lambda_0^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{\Gamma_0^2}{r^2}}\ dr + \Gamma_0 \varphi\ .$$

Dalla definizione di Λ_0 si ottiene che la nuova Hamiltoniana H_D assume la forma

$$H_D(\Lambda_0, \Gamma_0, \lambda, \gamma) = -\frac{m^3 M^2}{2\Lambda_0^2}\ .$$

Poiché l'Hamiltoniana dipende solo dalla variabile Λ_0, il sistema è integrabile. In particolare, (Λ_0, Γ_0) risultano essere variabili d'azione e si ha

$$\Lambda_0 = \sqrt{-\frac{m^3 M^2}{2E}} = m\sqrt{Ma}\ ; \qquad (1)$$

inoltre, mostriamo che

$$\Gamma_0 = \Lambda_0 \sqrt{1 - e^2}\ . \qquad (2)$$

Infatti, da $\Gamma_0 = \Phi = mr^2 \dot{\varphi}$ e da $r^2 \dot{\varphi} = \sqrt{Ma(1-e^2)}$, risulta

$$\Gamma_0 = m\sqrt{Ma(1-e^2)} = \Lambda_0 \sqrt{1 - e^2}\ .$$

Determiniamo ora le variabili d'angolo. Si ha:

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial \Lambda_0} = \int \frac{m^4 M^2}{\Lambda_0^3 \sqrt{-\frac{m^4 M^2}{\Lambda_0^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{\Gamma_0^2}{r^2}}}\ dr\ ;$$

© 88-7999-464-6

utilizzando le espressioni (1) e (2) e la relazione $r = a(1 - e\cos u)$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \int \frac{m\sqrt{M}}{a^{3/2}\sqrt{-\frac{m^2M}{a} + \frac{2m^2M}{r} - \frac{m^2Ma(1-e^2)}{r^2}}}\, dr \\
&= \frac{m\sqrt{M}}{a^{3/2}} \int \frac{r}{\sqrt{-\frac{m^2M}{a}r^2 + 2m^2Mr - m^2Ma(1-e^2)}}\, dr \\
&= \int \frac{(1-e\cos u)e\sin u}{\sqrt{-(1-e\cos u)^2 + 2(1-e\cos u) - (1-e^2)}}\, du \\
&= \int \frac{(1-e\cos u)\; e\sin u}{e\sin u}\, du \\
&= \int (1-e\cos u)\, du \;=\; u - e\sin u\ .
\end{aligned}
$$

La relazione

$$\lambda \;=\; u - e\sin u$$

si dice *equazione di Keplero* e definisce l'*anomalia media* λ in funzione dell'anomalia eccentrica u.

Riguardo la seconda variabile d'angolo, si ha:

$$\gamma = \frac{\partial F}{\partial \Gamma_0} = \varphi - \int \frac{\Gamma_0}{r^2\sqrt{-\frac{m^4M^2}{\Lambda_0^2} + \frac{2m^2M}{r} - \frac{\Gamma_0^2}{r^2}}}\, dr\ .$$

Osserviamo che dalle relazioni $r\sin f = a\sqrt{1-e^2}\sin u$, $r\cos f = a(\cos u - e)$ ottenute in MC 1, si ottiene

$$\tan\frac{f}{2} \;=\; \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\; \tan\frac{u}{2}\ . \tag{3}$$

Utilizzando (1), (2), (3) e la relazione $r = a(1 - e\cos u)$, risulta:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \varphi - \int \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{r\sqrt{-\frac{r^2}{a} + 2r - a(1-e^2)}}\, dr \\
&= \varphi - \int \frac{\sqrt{1-e^2}\ e\sin u}{(1-e\cos u)\sqrt{-(1-e\cos u)^2 + 2(1-e\cos u) - (1-e^2)}}\, du \\
&= \varphi - \int \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos u}\, du \\
&= \varphi - 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}\right) \\
&= \varphi - 2\arctan\left(\tan\frac{f}{2}\right) \ = \ \varphi - f \ .
\end{aligned}$$

Pertanto, la variabile $\gamma = \varphi - f$ rappresenta la longitudine del perielio (si veda la Figura 2). Infine, riscaliamo le variabili Λ_0, Γ_0 definendo $\Lambda = \frac{\Lambda_0}{m} = \sqrt{Ma}$, $\Gamma = \frac{\Gamma_0}{m}$ da cui risulta che l'Hamiltoniana assume la forma:

$$H_D(\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma) = -\frac{M^2}{2\Lambda^2} \ .$$

Riassumendo, le variabili di Delaunay sono:

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \sqrt{Ma} \\
\Gamma &= \Lambda\sqrt{1-e^2} \\
\lambda &= \ \text{anomalia media} \\
\gamma &= \ \text{argomento del perielio} \ .
\end{aligned}$$

Gli elementi ellittici, semiasse maggiore a ed eccentricità e, sone legati alle variabili di Delaunay dalle relazioni:

$$a = \frac{\Lambda^2}{M} \ , \qquad e = \sqrt{1 - \frac{\Gamma^2}{\Lambda^2}} \ .$$

MC 3. Hamiltoniana del problema ristretto circolare piano dei 3 corpi.

Siano P_0, P_1, P_2 tre corpi di masse m_0, m_1, m_2, rispettivamente. Supponiamo che m_1 sia molto più piccola di m_0 e m_2 (problema *ristretto*), cosicché P_1 non influenza il moto di P_0 e P_2. Pertanto, possiamo assumere che il moto di P_0 e P_2 sia kepleriano e, in particolare, supponiamo che P_2 descriva un'orbita circolare attorno a P_0 (problema *circolare*). Assumiamo infine che il moto dei 3 corpi avvenga sullo stesso piano (problema *piano*). Tale modello viene denominato *problema ristretto circolare piano dei 3 corpi.*
Consideriamo un sistema di riferimento inerziale, la cui origine coincida con il baricentro dei 3 corpi e siano $\underline{\xi}_0$, $\underline{\xi}_1$, $\underline{\xi}_2 \in \mathbf{R}^2$ le corrispondenti coordinate. Dalla legge di Newton si ottiene che il moto di P_0 e di P_1 è descritto dalle equazioni:

$$\frac{d^2\underline{\xi}_0}{dt^2} = \frac{m_1(\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0)}{|\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0|^3} + \frac{m_2(\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_0)}{|\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_0|^3} \ ,$$

$$\frac{d^2\underline{\xi}_1}{dt^2} = -\frac{m_0(\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0)}{|\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0|^3} + \frac{m_2(\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_1)}{|\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_1|^3} \ .$$

Consideriamo ora un sistema di riferimento eliocentrico con origine coincidente con P_0 e siano $\underline{r}_1 = \underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_0$, $\underline{r}_2 = \underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_0$ le posizioni relative con $\varrho_1 = |\underline{r}_1|$, $\varrho_2 = |\underline{r}_2|$. Allora, si ottiene:

$$\frac{d^2\underline{r}_1}{dt^2} \ = \ -\frac{(m_0 + m_1)\underline{r}_1}{\varrho_1^3} - \frac{m_2\underline{r}_2}{\varrho_2^3} + \frac{m_2(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3}$$

e poiché $M = m_0 + m_1$, si ha

$$\frac{d^2\underline{r}_1}{dt^2} + \frac{M\underline{r}_1}{\varrho_1^3} \ = \ -\frac{\partial R}{\partial \underline{r}_1} \ ,$$

dove R denota la funzione perturbatrice data da:

$$R \ = \ m_2\frac{\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2}{\varrho_2^3} - \frac{m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} \ ,$$

la cui espressione è nulla per $m_2 = 0$ (ossia se ci si riconduce al problema dei 2 corpi relativo al moto di P_1 attorno a P_0). L'Hamiltoniana dei 3 corpi è data da:

$$H_{tc}(\Lambda, \Gamma, \lambda, \gamma) \ = \ -\frac{M^2}{2\Lambda^2} + m_2\frac{\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2}{\varrho_2^3} - \frac{m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} \ ,$$

dove si intende che le funzioni $\underline{r}_1$ e $\underline{r}_2$ debbano essere espresse in termini delle variabili di Delaunay. Poiché il moto di P_2 attorno a P_0 è circolare, normalizzando il tempo in modo tale che la velocità angolare di P_2 sia unitaria,

©88-7999-464-6

si ottiene $\underline{r}_2 = (\varrho_2 \cos t,\ \varrho_2 \sin t)$. Infine, dalle relazioni $\underline{r}_1 \cdot \underline{r}_2 = \varrho_1 \varrho_2 \cos(\varphi - t)$ e $|\underline{r}_2 - \underline{r}_1| = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi - t)}$, la funzione perturbatrice assume la forma:

$$R \; = \; \frac{m_2 \varrho_1 \cos(\varphi - t)}{\varrho_2^2} - \frac{m_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi - t)}} \; .$$

Notiamo che tale funzione dipende dalla differenza $\varphi - t$; essendo $\varphi = \gamma + f$, si ottiene che R dipende dalla differenza $\gamma - t$. Operiamo quindi il cambiamento canonico di variabili;

$$\begin{aligned} \ell &= \lambda & L &= \Lambda \\ g &= \gamma - t & G &= \Gamma \\ t &= t & T &= \Gamma + E \ , \end{aligned}$$

da cui si ottiene che l'Hamiltoniana può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} H_{3c}(L, G, l, g) = &- \frac{M^2}{2L^2} - G \\ &+ \frac{m_2 \varrho_1 \cos(\varphi - t)}{\varrho_2^2} - \frac{m_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi - t)}} \ . \end{aligned}$$

Tale Hamiltoniana rientra nella classe dei sistemi quasi–integrabili; infatti, per $m_2 = 0$ si ottiene l'Hamiltoniana integrabile $h(L, G) = -\frac{M^2}{2L^2} - G$, che dipende solo dalle variabili d'azione. Normalizzando l'unità di massa tramite la posizione $M = 1$, la quantità m_2 assume il ruolo di parametro perturbatore e rappresenta il rapporto delle masse dei corpi primari, P_0 e P_2.

MC 4. Espansione della funzione perturbatrice in termini delle variabili di Delaunay.

Ricordiamo l'espressione della funzione perturbatrice:

$$R \; = \; \frac{m_2 \varrho_1 \cos(\varphi - t)}{\varrho_2^2} - \frac{m_2}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2\cos(\varphi - t)}} \; . \tag{4}$$

ⓒ 88-7999-464-6

Introduciamo i polinomi di Legendre $P_j(x)$ tramite le relazioni ricorsive:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_{j+1}(x) &= \frac{(2j+1)P_j(x)x - jP_{j-1}(x)}{j+1} \qquad \forall j \geq 1 \ . \end{aligned}$$

Espandiamo il secondo termine del membro di destra della (4) in funzione dei polinomi di Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varphi - t)}} \ = \ \frac{1}{\varrho_2} \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\cos(\varphi - t)) \ (\frac{\varrho_1}{\varrho_2})^j \ ,$$

da cui si ottiene:

$$R \ = \ -\frac{m_2}{\varrho_2} \sum_{j=2}^{\infty} P_j(\cos(\varphi - t)) \ (\frac{\varrho_1}{\varrho_2})^j \ .$$

Diamo le formule esplicite per i primi polinomi di Legendre:

$$\begin{aligned} P_2(\cos(\varphi - t)) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(\varphi - t) \\ P_3(\cos(\varphi - t)) &= \frac{3}{8}\cos(\varphi - t) + \frac{5}{8}\cos 3(\varphi - t) \\ P_4(\cos(\varphi - t)) &= \frac{9}{64} + \frac{5}{16}\cos 2(\varphi - t) + \frac{35}{64}\cos 4(\varphi - t) \\ P_5(\cos(\varphi - t)) &= \frac{15}{64}\cos(\varphi - t) + \frac{35}{128}\cos 3(\varphi - t) + \frac{63}{128}\cos 5(\varphi - t) \ . \end{aligned}$$

Esprimiamo l'anomalia eccentrica u in funzione dell'anomalia media ℓ, invertendo l'equazione di Keplero $\ell = u - e\sin u$ e troncandola al secondo ordine nell'eccentricità e (si ricordi che per orbite ellittiche $e < 1$):

$$\begin{aligned} u &= \ell + e\sin u = \ell + e\sin(\ell + e\sin u) \\ &= \ell + e\left(\sin\ell \ \cos(e\sin u) + \cos\ell \ \sin(e\sin u)\right) \ ; \end{aligned}$$

sviluppando le funzioni trigonometriche in serie di Taylor ($\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + ...$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + ...$), si ottiene:

$$u = \ell + e\left(\sin\ell + \cos\ell \cdot e\sin\ell\right) + O(e^3) = \ell + e\sin\ell + \frac{e^2}{2}\sin(2\ell) + O(e^3) \ .$$

Inserendo tale relazione in $\tan\frac{\varphi-\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\ \tan\frac{u}{2}$ si ottiene:

$$\varphi - t = g + \ell + 2e\sin\ell + \frac{5}{4}e^2\sin 2\ell + O(e^3)\ .$$

Analogamente, usando la relazione $\varrho_1=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\gamma)}$ si ottiene:

$$\varrho_1 = a\ [1+\frac{1}{2}e^2 - e\cos\ell - \frac{1}{2}e^2\cos 2\ell] + O(e^3)\ .$$

Si osservi che l'eccentricità e è una funzione delle variabili di Delaunay tramite la relazione $e=\sqrt{1-\frac{G^2}{L^2}}$.
Diamo l'espansione in serie dell'eccentricità delle quantità $(\frac{\varrho_1}{a})^j$ per $j=2,...,5$:

$$\begin{aligned}
(\frac{\varrho_1}{a})^2 &= 1+\frac{3}{2}e^2 - 2e\cos\ell - \frac{1}{2}e^2\cos 2\ell + O(e^3)\\
(\frac{\varrho_1}{a})^3 &= 1+3e^2 - 3e\cos\ell + O(e^3)\\
(\frac{\varrho_1}{a})^4 &= 1+5e^2 - 4e\cos\ell + e^2\cos 2\ell + O(e^3)\\
(\frac{\varrho_1}{a})^5 &= 1 - 5e\cos\ell + e^2(\frac{15}{2}+\frac{5}{2}\cos 2\ell) + O(e^3)\ .
\end{aligned}$$

Mettendo insieme le espansioni in serie ricavate precedentemente, si ottiene:

$$\begin{aligned}
R \ = \ -\frac{m_2}{\varrho_2}\ &[P_2(\cos(\varphi-t))\ (\frac{\varrho_1}{a})^2(\frac{a}{\varrho_2})^2 + P_3(\cos(\varphi-t))\ (\frac{\varrho_1}{a})^3(\frac{a}{\varrho_2})^3\\
&+ P_4(\cos(\varphi-t))\ (\frac{\varrho_1}{a})^4(\frac{a}{\varrho_2})^4 + P_5(\cos(\varphi-t))\ (\frac{\varrho_1}{a})^5(\frac{a}{\varrho_2})^5] + ...
\end{aligned}$$

Normalizzando l'unità di lunghezza in modo tale che $\varrho_2=1$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
R = m_2\ \Big[&R_{00}(L,G) + R_{10}(L,G)\cos\ell + R_{11}(L,G)\cos(\ell+g)\\
&+ R_{12}(L,G)\cos(\ell+2g) + R_{22}(L,G)\cos(2\ell+2g)\\
&+ R_{32}(L,G)\cos(3\ell+2g) + R_{33}(L,G)\cos(3\ell+3g)\\
&+ R_{44}(L,G)\cos(4\ell+4g) + R_{55}(L,G)\cos(5\ell+5g) + ...\Big]\ ,
\end{aligned}$$

dove i coefficienti R_{ij} sono dati dalle seguenti espressioni (si ricordi che l'ec-

ⓒ 88-7999-464-6

centricità è funzione di L e di G):

$$R_{00} = -\frac{L^4}{4}(1 + \frac{9}{16}L^4 + \frac{3}{2}e^2) + ... , \qquad R_{10} = \frac{L^4 e}{2}(1 + \frac{9}{8}L^4) + ...$$

$$R_{11} = -\frac{3}{8}L^6(1 + \frac{5}{8}L^4) + ... , \qquad R_{12} = \frac{L^4 e}{4}(9 + 5L^4) + ...$$

$$R_{22} = -\frac{L^4}{4}(3 + \frac{5}{4}L^4) + ... , \qquad R_{32} = -\frac{3}{4}L^4 e + ...$$

$$R_{33} = -\frac{5}{8}L^6(1 + \frac{7}{16}L^4) + ... , \qquad R_{44} = -\frac{35}{64}L^8 + ...$$

$$R_{55} = -\frac{63}{128}L^{10} + ...$$

MC 5. Calcolo della precessione del perielio di Mercurio.

Consideriamo il Sole, Mercurio e Giove. Poiché la massa di Mercurio è notevolmente più piccola della massa di Giove, in considerazione del fatto che le orbite sono quasi complanari e che l'eccentricità di Giove è relativamente piccola (si vedano i dati astronomici in Appendice) assumiamo che il moto di Mercurio, soggetto l'azione gravitazionale del Sole e di Giove, sia governato dall'Hamiltoniana del problema ristretto circolare piano dei 3 corpi. L'Hamiltoniana che descrive tale problema ha la forma

$$H_{3c}(L, G, \ell, g) \;=\; -\frac{M^2}{2L^2} \;-\; G \;+\; R(L, G, \ell, g) \;,$$

dove i primi termini dell'espansione in serie della perturbazione R sono stati ricavati in MC 4. Ricordiamo che l'argomento del perielio è collegato alla variabile g dalla relazione $g = \gamma - t$. Normalizziamo le unità di misura in modo tale che la massa del Sole sia uguale ad 1: $M = m_0 = 1$; allora la quantità m_2 rappresenta il valore della massa di Giove espressa in unità della massa del Sole. Pertanto, m_2 è dell'ordine di 10^{-3} e possiamo assumere che tale quantità rappresenti il parametro perturbativo del sistema quasi–integrabile descritto dall'Hamiltoniana H_{3c}. Applichiamo la teoria delle perturbazioni al primo ordine in m_2; a meno di $O(m_2)$, le nuove variabili (L', G', ℓ', g') coincidono con (L, G, ℓ, g) e la nuova Hamiltoniana imperturbata $h(L, G)$ assume la forma:

$$h(L, G) = -\frac{M^2}{2L^2} \;-\; G \;+\; m_2 \; R_{00}(L, G) \;;$$

ⓒ88-7999-464-6

in MC 4 abbiamo visto che $R_{00} = -\frac{L^4}{4}(1 + \frac{9}{16}L^4 + \frac{3}{2}e^2) + ...$ L'equazione di Hamilton per la variabile g si scrive nella forma:

$$\dot{g} = \frac{\partial h(L,G)}{\partial G} = -1 + m_2 \frac{\partial R_{00}(L,G)}{\partial G} \ ;$$

ricordando che $e = \sqrt{1 - \frac{G^2}{L^2}}$ e trascurando $O(e^3)$ in R_{00}, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= m_2 \ \frac{\partial R_{00}(L,G)}{\partial G} \\ &= \frac{3}{4} m_2 L^2 G \ . \end{aligned}$$

Nelle nostre unità di misura risulta: $M = 1$, $m_2 = 10^{-3}$; la distanza Sole-Giove è normalizzata ad 1 e quindi il semiasse maggiore di Mercurio vale $a = 0.387/5.203$; il periodo di rivoluzione di Giove è normalizzato a 2π e in anni vale 11.862. Infine, l'eccentricità di Mercurio risulta $e = 0.2056$. Ricordiamo che $L = \sqrt{Ma}$ e $G = L\sqrt{1-e^2}$. Con questi dati si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= 1.489909 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{100}{11.862} \cdot 2\pi \ \frac{\text{rad}}{\text{secolo}} \\ &= 7.886606 \cdot 10^{-4} \ \frac{\text{rad}}{\text{secolo}} \ = \ 4.518692 \cdot 10^{-2} \ \frac{\text{gradi}}{\text{secolo}} \\ &= 162.67 \ \ \frac{\text{secondi di arco}}{\text{secolo}} \ . \end{aligned}$$

La precessione degli equinozi

Consideriamo la Terra come un corpo rigido di forma ellissoidica e supponiamo che l'unica forza agente su di essa sia causata dall'azione gravitazionale del Sole. La Terra ruota attorno a se stessa, con un asse di rotazione inclinato di circa 23^o rispetto alla perpendicolare al piano dell'orbita. L'asse di rotazione effettua un moto di precessione, descrivendo, su un periodo di tempo di migliaia di anni, un cono rispetto alla verticale. Tale fenomeno è noto con il nome di *precessione degli equinozi*. I temi proposti qui di seguito consentiranno di determinare il periodo di tale moto; in particolare, gli argomenti trattati sono:

- gli angoli di Eulero e la formulazione Lagrangiana,
- l'introduzione delle variabili azione–angolo di Andoyer-Deprit,
- la derivazione dell'Hamiltoniana,
- l'espressione della funzione perturbatrice in funzione delle variabili di Andoyer–Deprit,
- il calcolo della precessione degli equinozi.

MC 6. Angoli di Eulero e formulazione Lagrangiana.

Consideriamo un corpo rigido B di forma ellissoidica, il quale ruota attorno ad un punto fisso O. Introduciamo un sistema di riferimento solidale al corpo rigido, $(O, \underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$, con gli assi coincidenti con le direzioni dei momenti principali d'inerzia. Sia $(O, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$ un sistema di riferimento fisso, la cui origine coincide con quella del riferimento solidale. Introduciamo la linea dei nodi $\underline{n}$ come l'intersezione tra i piani $(\underline{i}, \underline{j})$ e $(\underline{I}, \underline{J})$. Gli angoli di Eulero $(\varphi, \psi, \vartheta)$ (si veda la Figura 4) sono definiti come segue:

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ è l'angolo di precessione formato dalle direzioni $\underline{I}$ e $\underline{n}$;
$0 \leq \psi \leq 2\pi$ è l'angolo di rotazione propria formato dalle direzioni $\underline{n}$ e $\underline{i}$;
$0 \leq \vartheta \leq \pi$ è l'angolo di nutazione formato dalle direzioni $\underline{k}$ e $\underline{K}$.

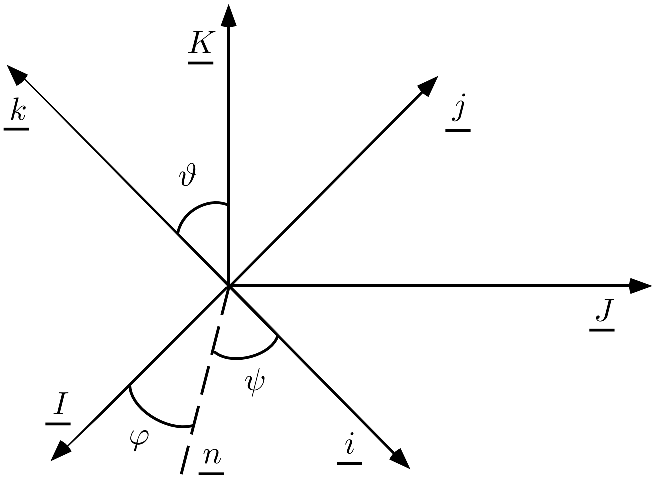


Figura 4. Angoli di Eulero.

Nel sistema di riferimento solidale, le componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ della velocità angolare assumono le seguenti espressioni:
i) $\dot{\vartheta}$ è diretto come $\underline{n}$ con componenti

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta}_1 &= \dot{\vartheta}\cos\psi\\ \dot{\vartheta}_2 &= -\dot{\vartheta}\sin\psi\\ \dot{\vartheta}_3 &= 0\ ;\end{aligned}$$

ii) $\dot{\varphi}$ è diretto come $\underline{K}$ con componenti

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi\\ \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi\\ \dot{\varphi}_3 &= \dot{\varphi}\cos\vartheta\ ;\end{aligned}$$

iii) $\dot{\psi}$ è diretto come $\underline{k}$ con componenti

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0\\ \dot{\psi}_2 &= 0\\ \dot{\psi}_3 &= \dot{\psi}\ .\end{aligned}$$

© 88-7999-464-6

Pertanto si ottiene:

$$\omega_1 = \dot\varphi \sin\vartheta \sin\psi + \dot\vartheta \cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot\varphi \sin\vartheta \cos\psi - \dot\vartheta \sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot\varphi \cos\vartheta + \dot\psi\ .$$

Denotiamo con m la massa del corpo rigido e supponiamo che esso sia soggetto all'azione di una forza con energia potenziale $V(\varphi,\psi,\vartheta)$. Indichiamo con I_1, I_2, I_3 i momenti principali d'inerzia. La Lagrangiana che descrive il sistema è data da:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot\vartheta,\dot\varphi,\dot\psi,\vartheta,\varphi,\psi) &= \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) - V(\varphi,\psi,\vartheta)\\ &= \frac{1}{2}I_1(\dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi + \dot\vartheta\cos\psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi - \dot\vartheta\sin\psi)^2\\ &+ \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 - V(\varphi,\psi,\vartheta)\ .\end{aligned}$$

Nel caso di un corpo a struttura giroscopica, ossia con $I_1 = I_2 = I \neq I_3$, assumendo che $\underline{k}$ coincida con l'asse di simmetria, la Langrangiana si riduce a

$$\mathcal{L}(\dot\vartheta,\dot\varphi,\dot\psi,\vartheta) = \frac{1}{2}I_1(\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 - V(\varphi,\psi,\vartheta)\ .$$

In tale caso, l'energia è una costante del moto e le variabili φ, ψ sono cicliche (e quindi i momenti cinetici coniugati sono costanti).

MC 7. Le variabili azione–angolo di Andoyer–Deprit.

Introduciamo un opportuno insieme di variabili azione–angolo dette *variabili di Andoyer–Deprit.* Assumiamo che l'asse di rotazione del corpo rigido non coincida necessariamente con una delle direzioni principali di inerzia. Consideriamo 3 sistemi di riferimento aventi l'origine comune in O:

- $(O,\underline{I},\underline{J},\underline{K})$ è un sistema di riferimento *inerziale,*
- $(O,\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ è un sistema di riferimento *solidale* al corpo rigido,
- $(O,\underline{i}_1,\underline{i}_2,\underline{i}_3)$ è un sistema di riferimento di *rotazione.*

Assumiamo che $\underline{i}_3$ coincida con la direzione del momento angolare $\underline{M}_0$ e introduciamo le seguenti linee dei nodi:

$\underline{m} \equiv$ intersezione di $(\underline{I},\underline{J})$ con il piano $(\underline{i}_1,\underline{i}_2)$;
$\overline{\underline{n}} \equiv$ intersezione di $(\underline{i},\underline{j})$con il piano $(\underline{i}_1,\underline{i}_2)$;
$\underline{n} \equiv$ intersezione di $(\underline{I},\underline{J})$ con il piano $(\underline{i},\underline{j})$.

©88-7999-464-6

Introduciamo gli angoli φ, ψ, ϑ, g, ℓ, h, J, K come nella Figura 5; in particolare:
$(\vartheta, \varphi, \psi)$ sono gli angoli di Eulero del riferimento solidale rispetto a quello inerziale;
(J, g, ℓ) sono gli angoli di Eulero del riferimento solidale rispetto a quello di rotazione;
$(K, h, 0)$ sono gli angoli di Eulero del riferimento di rotazione rispetto a quello inerziale.

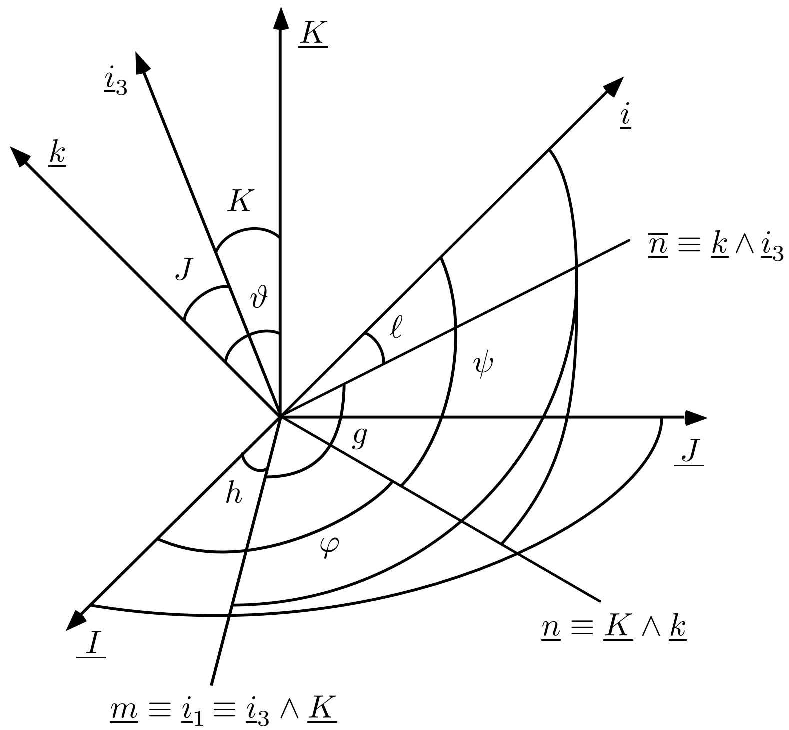


Figura 5. Angoli di Andoyer–Deprit.

Definiamo le variabili d'azione come le proiezioni del momento angolare $\underline{M}_0$ sugli assi $\underline{i}_3$, $\underline{k}$, $\underline{K}$:

$$\begin{aligned} G &\equiv \underline{M}_0 \cdot \underline{i}_3 = M_0 \\ L &\equiv \underline{M}_0 \cdot \underline{k} = G \cos J \\ H &\equiv \underline{M}_0 \cdot \underline{K} = G \cos K \ . \end{aligned}$$

Le variabili azione–angolo di Andoyer–Deprit sono definite come le coppie di

© 88-7999-464-6

variabili coniugate

$$(G, g), \qquad (L, \ell), \qquad (H, h) \ ;$$

esse determinano univocamente gli angoli di Eulero e le loro derivate (e viceversa). Pertanto, tali variabili forniscono una descrizione completa del moto.

Per avere un'interpretazione fisica degli angoli e delle linee dei nodi introdotti precedentemente, osserviamo che
• $\underline{m} \equiv \underline{i}_3 \wedge \underline{K}$ è la linea dei nodi tra il piano inerziale e il piano ortogonale al momento angolare;
• $\underline{n} \equiv \underline{K} \wedge \underline{k}$ è la linea dei nodi tra il piano inerziale e il piano equatoriale;
• $\underline{\overline{n}} \equiv \underline{k} \wedge \underline{i}_3$ è la linea dei nodi tra il piano equatoriale e il piano ortogonale al momento angolare;
• l'angolo g fornisce il moto dell'asse equatoriale rispetto al riferimento inerziale;
• l'angolo ℓ dà il moto del momento angolare rispetto al riferimento solidale;
• l'angolo h fornisce il moto del momento angolare rispetto al riferimento inerziale;
• l'angolo J è detto *angolo di rotazione non principale;*
• l'angolo ϑ è formato dalla direzione del più piccolo asse fisico dell'ellissoide e l'asse verticale del riferimento inerziale;
• l'angolo K è detto *obliquità* e rappresenta l'angolo tra l'asse di rotazione e l'asse verticale del riferimento inerziale.

MC 8. Derivazione della funzione di Hamilton.
Dimostriamo che l'Hamiltoniana del problema del corpo rigido sotto l'azione di una forza con energia potenziale $V(L, G, H, \ell, g, h)$ assume la forma:

$$\mathcal{H}(L, G, H, \ell, g, h) = \frac{L^2}{2I_3} + \frac{1}{2}(G^2 - L^2)(\frac{\sin^2 \ell}{I_1} + \frac{\cos^2 \ell}{I_2}) + V(L, G, H, \ell, g, h) \ .$$

L'energia cinetica è data dall'espressione

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{1}{2}(\frac{K_1^2}{I_1} + \frac{K_2^2}{I_2} + \frac{K_3^2}{I_3}) \ ,$$

dove $\underline{M}_0 \equiv K_1\underline{i} + K_2\underline{j} + K_3\underline{k} = I_1\omega_1\underline{i} + I_2\omega_2\underline{j} + I_3\omega_3\underline{k}$ nel riferimento solidale. Poiché $\underline{M}_0 \cdot \underline{k} = L$, sia $\underline{b}$ il vettore definito da $\underline{M}_0 \equiv \underline{b} + L\underline{k}$. Essendo $G \equiv |\underline{M}_0|$, allora si ha $|\underline{b}| = \sqrt{G^2 - L^2}$; inoltre, tenendo conto che $\underline{i}_3 = \sin J \sin \ell \underline{i} +$

$\sin J\cos\ell\underline{j} + \cos J\underline{k}$, che $|\underline{M}_0|\underline{i}_3 = \sqrt{G^2-L^2}\sin\ell\underline{i} + \sqrt{G^2-L^2}\cos\ell\underline{j}$ e che $G\sin J = \sqrt{G^2-L^2}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \underline{M}_0 \cdot \underline{i} = \underline{b}\cdot\underline{i} = |\underline{b}|\sin\ell = \sqrt{G^2-L^2}\sin\ell \\
K_2 &= \underline{M}_0 \cdot \underline{j} = \underline{b}\cdot\underline{j} = |\underline{b}|\cos\ell = \sqrt{G^2-L^2}\cos\ell \\
K_3 &= \underline{M}_0 \cdot \underline{k} = L\ ,
\end{aligned}
$$

dalla quale risulta

$$
\mathcal{H}(L,G,H,\ell,g,h) = \frac{L^2}{2I_3} + \frac{1}{2}(G^2-L^2)(\frac{\sin^2\ell}{I_1} + \frac{\cos^2\ell}{I_2}) + V(L,G,H,\ell,g,h)\ .
$$

Nel caso di un corpo a struttura giroscopica con $I_1 = I_2$, l'Hamiltoniana diventa:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(L,G,H,\ell,g,h) &= \frac{L^2}{2I_3} + \frac{1}{2I_1}(G^2-L^2) + V(L,G,H,\ell,g,h) \\
&= \frac{I_1-I_3}{2I_1I_3}\ L^2 + \frac{G^2}{2I_1} + V(L,G,H,\ell,g,h)\ .
\end{aligned}
$$

MC 9. Espressione della funzione perturbatrice in funzione delle variabili di Andoyer–Deprit.
Consideriamo il moto di un corpo rigido T a struttura ellissoidica, soggetto all'attrazione gravitazionale di un corpo centrale S. Assumiamo che l'orbita descritta da T attorno ad S sia un'ellisse kepleriana. Siano λ_T e $\underline{r}_T$ la longitudine e il raggio orbitale istantaneo; si noti che λ_T e $\underline{r}_T$ sono funzioni note del tempo (Figura 6).

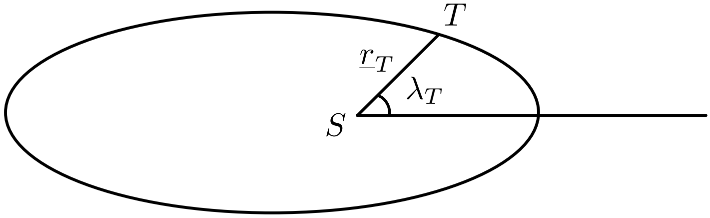


Figura 6. Longitudine e raggio istantaneo.

Siano m_S e m_T le masse di S e di T, e sia $|\mathcal{E}|$ il volume di T. L'Hamiltoniana del sistema è data da

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2I_3} + \frac{1}{2}(G^2 - L^2)(\frac{\sin^2 \ell}{I_1} + \frac{\cos^2 \ell}{I_2}) \ - \int_{\mathcal{E}} \frac{\tilde{G} m_S m_T}{|\underline{r}_T + \underline{x}|} \frac{d\underline{x}}{|\mathcal{E}|} \ ,$$

dove $\tilde{G}$ rappresenta la costante di gravitazione. Poniamo

$$V \equiv - \int_{\mathcal{E}} \frac{\tilde{G} m_S m_T}{|\underline{r}_T + \underline{x}|} \frac{d\underline{x}}{|\mathcal{E}|} \ ;$$

poiché $|\frac{x}{\underline{r}_T}| << 1$, possiamo espandere V in polinomi di Legendre. Trascurando termini di ordine superiori al terzo, si ha:

$$V = -\frac{\tilde{G} m_S m_T}{r_T} \int_{\mathcal{E}} \frac{d\underline{x}}{|\mathcal{E}|} \ [1 - \frac{\underline{x} \cdot \underline{r}_T}{r_T^2} + \frac{1}{2r_T^2}(3\frac{(\underline{x} \cdot \underline{r}_T)^2}{r_T^2} - x^2)] \ ,$$

dove $r_T = |\underline{r}_T|$ e $x = |\underline{x}|$. Sia α l'angolo tra $\underline{r}_T$ e $\underline{k}$, che calcoleremo fino a $O((\frac{R}{a})^2)$, dove R è il raggio equatoriale e a è il semiasse maggiore dell'orbita kepleriana. Con riferimento alla Figura 7, denotando con $\hat{\underline{r}}_T$ il versore di $\underline{r}_T$, si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{r}}_T \cdot \underline{k} &= \cos\alpha \\ \hat{\underline{r}}_T \cdot \underline{n} &= \cos(\varphi - \lambda_T) = \sin\alpha \\ \hat{\underline{r}}_T \cdot \underline{i} &= \sin\alpha \cos\psi \\ \hat{\underline{r}}_T \cdot \underline{j} &= -\sin\alpha \sin\psi \ . \end{aligned}$$

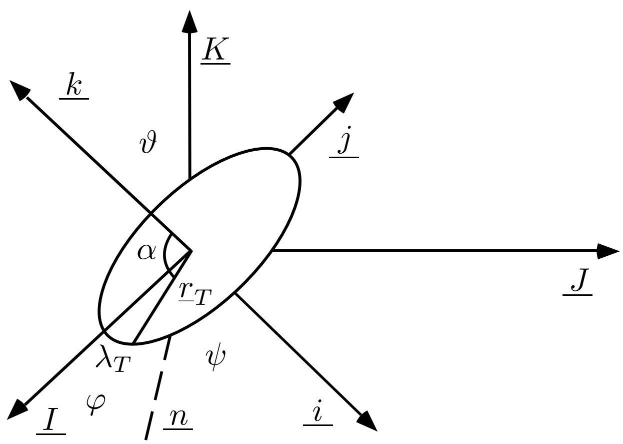


Figura 7. Geometria del problema.

©88-7999-464-6

Introduciamo coordinate polari come segue; siano (x_1, x_2, x_3) le coordinate di un generico punto di T:

$$\begin{aligned} x_1 &= ar \sin\tilde\vartheta \cos\tilde\varphi \\ x_2 &= br \sin\tilde\vartheta \sin\tilde\varphi \\ x_3 &= cr \cos\tilde\vartheta \ , \end{aligned}$$

dove $0 \le r \le 1$, $0 \le \tilde\varphi \le 2\pi$, $0 \le \tilde\vartheta \le \pi$. Lo Jacobiano della trasformazione vale $abcr^2 \sin\tilde\vartheta dr d\tilde\vartheta d\tilde\varphi$ e si ha: $|\mathcal{E}| \equiv \frac{4}{3}\pi abc$. In termini di queste quantità, i momenti principali d'inerzia sono dati da:

$$I_1 = \frac{m_T}{5}(b^2 + c^2) \ , \qquad I_2 = \frac{m_T}{5}(a^2 + c^2) \ , \qquad I_3 = \frac{m_T}{5}(a^2 + b^2) \ .$$

Inoltre, si ha:

$$\underline{x} \cdot \underline{\hat r}_T = x_1 \sin\alpha \cos\psi - x_2 \sin\alpha \sin\psi + x_3 \cos\alpha \ .$$

Si noti che $\int_{\mathcal{E}} \frac{dx}{|\mathcal{E}|} = cost.$, $\int_{\mathcal{E}} \frac{\underline{x}^2}{|\mathcal{E}|} d\underline{x} = cost.$; pertanto, tali termini generano delle funzioni totali del tempo e possono essere trascurati nella derivazione delle equazioni di Hamilton. Poiché

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} \underline{x} \cdot \underline{\hat r}_T d\underline{x} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [ar \sin\tilde\vartheta \cos\tilde\varphi \sin\alpha \cos\psi \\ &-br \sin\tilde\vartheta \sin\tilde\varphi \sin\alpha \sin\psi + cr \cos\tilde\vartheta \cos\alpha] \ abcr^2 \sin\tilde\vartheta dr d\tilde\vartheta d\tilde\varphi \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi abc^2 r^3 \sin\tilde\vartheta \cos\tilde\vartheta \cos\alpha \ dr d\tilde\vartheta d\tilde\varphi = 0 \ , \end{aligned}$$

si ottiene

$$V = -\frac{3}{2} \frac{\tilde G m_S m_T}{r_T^3} \int_{\mathcal{E}} (\underline{x} \cdot \underline{\hat r}_T)^2 \ .$$

Per calcolare l'integrale, notiamo che:
1)

$$\begin{aligned} (\underline{x} \cdot \underline{\hat r}_T)^2 = & \ x_1^2 \sin^2\alpha \cos^2\psi + x_2^2 \sin^2\alpha \sin^2\psi + x_3^2 \cos^2\alpha \\ & - 2x_1 x_2 \sin^2\alpha \sin\psi \cos\psi + 2x_1 x_3 \sin\alpha \cos\alpha \cos\psi \\ & - 2x_2 x_3 \sin\alpha \cos\alpha \sin\psi \ ; \end{aligned}$$

2) poiché $\int_0^\pi \sin^3\tilde\vartheta d\tilde\vartheta = \frac{4}{3}$, $\int_0^{2\pi} \cos^2\tilde\varphi d\tilde\varphi = \pi$, si ha:

$$\int_{\mathcal{E}} x_1^2 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 r^2 \sin^2\tilde\vartheta \cos^2\tilde\varphi \ abcr^2 \sin\tilde\vartheta dr d\tilde\vartheta d\tilde\varphi = \frac{a^3 bc}{5} \frac{4}{3}\pi \ ;$$

© 88-7999-464-6

3) poiché $\int_0^{2\pi} \sin^2 \tilde{\varphi} d\tilde{\varphi} = \pi$, si ha:

$$\int_{\mathcal{E}} x_2^2 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} b^2 r^2 \sin^2 \tilde{\vartheta} \sin^2 \tilde{\varphi} \ abcr^2 \sin \tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = \frac{ab^3 c}{5} \frac{4}{3} \pi \ ;$$

4) poiché $\int_0^{2\pi} \sin \tilde{\vartheta} \cos^2 \tilde{\vartheta} d\tilde{\vartheta} = \frac{2}{3}$, si ha:

$$\int_{\mathcal{E}} x_3^2 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} c^2 r^2 \cos^2 \tilde{\vartheta} \ abcr^2 \sin \tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = \frac{abc^3}{5} \frac{4}{3} \pi \ ;$$

5)

$$\int_{\mathcal{E}} x_1 x_2 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} abr^2 \sin^2 \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi} \cos \tilde{\varphi} \ abcr^2 \sin \tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = 0 \ ;$$

6)

$$\int_{\mathcal{E}} x_1 x_3 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} acr^2 \sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\varphi} \ abcr^2 \sin \tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = 0 \ ;$$

7)

$$\int_{\mathcal{E}} x_2 x_3 d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} bcr^2 \sin \tilde{\vartheta} \cos \tilde{\vartheta} \sin \tilde{\varphi} \ abcr^2 \sin \tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = 0 \ .$$

Mettendo insieme le formule precedenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} (\underline{x} \cdot \hat{\underline{r}}_T)^2 d\underline{x} &= \frac{4}{3} \pi \frac{abc}{5} (a^2 \cos^2 \psi \sin^2 \alpha + b^2 \sin^2 \psi \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{4}{3} \pi \frac{abc}{5} ((b^2 - a^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \psi + (c^2 - a^2) \sin^2 \alpha + a^2) \end{aligned}$$

ossia

$$V = -\frac{3}{2} \frac{\tilde{G} m_S m_T}{r_T^3} \frac{1}{5} ((b^2 - a^2) \sin^2 \alpha \sin^2 \psi + (c^2 - a^2) \sin^2 \alpha + a^2) \ . \qquad (V)$$

Siano $\overline{G}$, $\overline{H}$ i valori iniziali di G, H e definiamo: $\eta \equiv \frac{I_2 - I_1}{I_3}$, $\omega_D \equiv \frac{\overline{G}}{I_3}$, $\cos i_0 \equiv \frac{\overline{H}}{\overline{G}}$, $\omega \equiv \omega_T^2 \omega_D^{-1} \cos i_0$, $\omega_T^2 \equiv \frac{\tilde{G} m_S}{a^3}$; allora, la (V) si può riscrivere nella forma:

$$V = -\frac{3}{2} \eta \omega \frac{\overline{G}^2}{\overline{H}} (\frac{a}{r_T})^3 \frac{1}{I_1 - I_2} [(I_2 - I_1) \sin^2 \alpha \sin^2 \psi + (I_1 - I_3) \sin^2 \alpha] \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Si noti che abbiamo usato la relazione:

$$(\frac{a}{r_T})^3\eta\omega\frac{\overline{G}^2}{\overline{H}} = \frac{I_2-I_1}{I_3}\frac{\tilde{G}m_S}{a^3}\frac{I_3}{\overline{G}}\frac{\overline{H}}{\overline{G}}\frac{\overline{G}^2}{\overline{H}}(\frac{a}{r_T})^3 = \frac{\tilde{G}m_S}{r_T^3}(I_2-I_1)\ .$$

Infine, usando regole di trigonometria sferica, si dimostra che vale la relazione seguente:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin(\lambda_T-h)(\cos g\sin J\cos K+\sin K\cos J)\\ &\quad -\cos(\lambda_T-h)\sin J\sin g\\ &= \sin(\lambda_T-h)\ \{\frac{H}{G}\sqrt{1-\frac{L^2}{G^2}}\cos g+\frac{L}{G}\sqrt{1-\frac{H^2}{G^2}}\}\\ &\quad -\sqrt{1-\frac{L^2}{G^2}}\sin g\cos(\lambda_T-h),\end{aligned}$$

che definisce l'angolo α in termini delle variabili di Andoyer–Deprit e della longitudine λ_T. Se T ha struttura giroscopica con $I_1 = I_2$, allora $a = b$ e la (V) diventa

$$V = -\frac{3}{2}\ \frac{\tilde{G}m_s}{r_T^3}\ \frac{m_T}{5}(c^2-a^2)\ \cos^2\alpha\ .$$

© 88-7999-464-6

MC 10. Calcolo della precessione degli equinozi.

Consideriamo il caso di un corpo rigido a struttura giroscopica con $I_1 = I_2$. Supponiamo che tale corpo sia soggetto all'attrazione gravitazionale di un punto materiale. Pertanto esso descrive un'ellisse kepleriana e denotiamo con a, e il semiasse maggiore e l'eccentricità di tale ellisse. Nel caso giroscopico, l'Hamiltoniana si riduce alla forma:

$$\mathcal{H} = \frac{G^2}{2I_1} + \frac{I_1 - I_3}{2I_1 I_3} L^2 + V \ ,$$

in cui la perturbazione V è data dall'espressione:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{3}{2}\frac{\tilde{G}m_S}{r_T^3}\frac{m_T}{5}\ (c^2 - a^2)\ \cos^2\alpha \\ &= -\frac{3}{2}\frac{\tilde{G}m_S}{r_T^3}(I_1 - I_3)\ \cos^2\alpha \\ &= \frac{3}{2}\eta'\omega\frac{\overline{G}^2}{\overline{H}}\ \frac{(1 - e\cos\lambda_T)^3}{(1 - e^2)^3}\ \cos^2\alpha \ , \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $\eta' = \frac{I_3 - I_1}{I_3}$, mentre da MC 9 risulta $\omega = \omega_T^2\omega_D^{-1}\cos i_0 = \frac{\tilde{G}m_S}{a^3}\ I_3\ \frac{\overline{H}}{\overline{G}^2}$.

Calcoliamo ora la media sugli angoli di $\cos^2\alpha$:

$$\langle\cos^2\alpha\rangle = \frac{1}{4G^4}\ (G^4 + L^2G^2 + H^2G^2 - 3L^2H^2) \ .$$

Imponiamo che sia $G = L$ ossia poniamo $J = 0$ e quindi assumiamo che la rotazione avvenga attorno ad un asse principale d'inerzia. Trascuriamo termini dipendenti dall'eccentricità nella relazione $\frac{(1-e\cos\lambda_T)^3}{(1-e^2)^3} = 1 + O(e)$. Applicando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, la nuova Hamiltoniana imperturbata $\mathcal{K}$ è data da:

$$\mathcal{K}(G,H) = \frac{G^2}{2I_3} + \frac{3}{2}\eta'\omega\ \frac{\overline{G}^2}{\overline{H}}\frac{G^2 - H^2}{2G^2} \ .$$

Pertanto, la velocità angolare media di precessione risulta essere

$$\dot{h} = \frac{\partial\mathcal{K}(G,H)}{\partial H} = -\frac{3}{2}\eta'\omega\ \frac{\overline{G}^2}{\overline{H}}\ \frac{H}{G^2} \ .$$

Al tempo $t = 0$ risulta $G = \overline{G}$, $H = \overline{H}$ ossia

$$\dot{h} = -\frac{3}{2}\eta'\omega = -\frac{3}{2}\eta'\omega_T^2\omega_D^{-1}\cos i_0 \ .$$

ⓒ88-7999-464-6

Dalle tabelle di dati astronomici risulta: $\eta' = \frac{1}{298.25} = 3.35289 \cdot 10^{-3}$, $i = 23.45^o$. Il contributo dovuto all'attrazione del Sole si ottiene utilizzando i valori $\omega_T = 1$ anno, $\omega_D = 1$ giorno, da cui risulta $\dot{h}^{(S)} = -2.51857 \cdot 10^{-12}$ rad/sec, a cui corrisponde un periodo di precessione di 79107.9 anni (poiché il segno di $h^{(S)}$ è negativo, la precessione è *retrograda*). Per quanto riguarda il contributo della Luna, calcoliamo ω_T dalla terza legge di Keplero come $\omega_T = \sqrt{\frac{\tilde{G} m_L}{a_{TL}^3}}$, dove $\tilde{G} = 6.668 \cdot 10^{-11}$ $m^3/(kg\ sec^2)$ è la costante di gravitazione, $m_L = 7.34828 \cdot 10^{22}$ kg è la massa della Luna, $a_{TL} = 3.84 \cdot 10^8$ m è la distanza Terra–Luna. Usando tali dati, il contributo dovuto all'attrazione della Luna vale $\dot{h}^{(L)} = -5.49028 \cdot 10^{-12}$ rad/sec a cui corrisponde un periodo di precessione pari a 36289.3 anni.

Il contributo globale di Sole e Luna, ossia la precessione luni–solare degli equinozi, si ottiene come somma di $\dot{h}^{(S)}$ e $\dot{h}^{(L)}$ a cui corrisponde il periodo di precessione pari a 24877.3 anni.

La librazione in longitudine della Luna

Si consideri il moto di un corpo rigido a struttura ellissoidica soggetto all'azione gravitazionale di un corpo centrale. In particolare, intendiamo studiare il moto della Luna attorno alla Terra. Le osservazioni astronomiche mostrano che la Luna è intrappolata in una risonanza spin–orbita di ordine 1/1 o risonanza sincrona. tale relazione implica che il periodo di rotazione coincide con il periodo di rivoluzione attorno alla Terra. In realtà la Luna oscilla leggermente attorno al proprio asse di rotazione; tale moto viene denominato *librazione in longitudine* e può essere calcolato determinando lo sviluppo in serie dell'orbita periodica associata alla risonanza sincrona.

In tale contesto, i temi MC 11-13 tratteranno i seguenti argomenti:

- la derivazione delle equazioni del modello spin–orbita,
- la determinazione al primo ordine dell'orbita periodica sincrona,
- il calcolo della librazione in longitudine della Luna.

MC 11. Derivazione delle equazioni del modello spin–orbita.

Consideriamo un satellite L di forma triassiale con momenti principali d'inerzia $I_1 < I_2 < I_3$, che ruoti attorno a un corpo centrale T. Siano m_L e m_T le masse di L e di T. Introduciamo un modello semplificato che descrive l'accoppiamento dei moti di rotazione e rivoluzione, assumendo le seguenti ipotesi:

i) il satellite si muove su un'orbita ellittica kepleriana (ossia si trascurano le perturbazioni dovute ad altri oggetti del sistema solare);

ii) l'asse di rotazione coincide con il più piccolo asse fisico dell'ellissoide (ossia con il più grande asse principale d'inerzia),

iii) l'asse di rotazione è perpendicolare al piano dell'orbita,

ⓒ88-7999-464-6

iv) si trascurano gli effetti mareali e dissipativi causati, ad esempio, dalla non rigidità interna del satellite.

Le equazioni del moto associate a tale modello si possono derivare dalla teoria trattata in MC 6-10. Con riferimento alle notazioni introdotte in tali temi, il modello spin–orbita definito dalle ipotesi *i*)–*iv*) implica che $\vartheta = J = K = 0$. Di conseguenza $G = L = H$ e l'Hamiltoniana corrispondente si può scrivere nella forma

$$\mathcal{H} = \frac{G^2}{2I_3} + V \ ,$$

dove la funzione perturbatrice è definita da

$$V = -\int_{\mathcal{E}} \frac{\tilde{G} m_L m_T}{|\underline{r}_L + \underline{x}|} \ \frac{d\underline{x}}{|\mathcal{E}|} \ .$$

Sviluppiamo V al secondo ordine in serie dei polinomi di Legendre con argomento $\frac{x}{r_L}$:

$$V = -\frac{\tilde{G} m_L m_T}{r_L} \int_{\mathcal{E}} \frac{d\underline{x}}{|\mathcal{E}|} \ [1 - \frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{r_L^2} + \frac{1}{2r_L^2}(3\frac{(\underline{x}\cdot\underline{r}_L)^2}{r_L^2} - x^2)] \ .$$

Si ha:

$$\frac{1}{|\underline{r}_L + \underline{x}|} = \frac{1}{r_L} \ \frac{1}{|1 + \frac{\underline{x}}{\underline{r}_L}|} = \frac{1}{r_L} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{x}{r_L})^2 + 2\frac{x}{r_L} \ \frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{x r_L}}} \ ,$$

dove $\frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{x r_L}$ è il coseno dell'angolo tra $\underline{x}$ e $\underline{r}_L$. Usando l'espansione di Legendre

$$(1 + r^2 - 2ar)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(a) r^k = 1 + ar + r^2(\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}) + ...$$

e ponendo $r = \frac{x}{r_L}$, $a = -\frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{x r_L}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\underline{r}_L + \underline{x}|} &= \frac{1}{r_L} \ [1 - \frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{x r_L} \frac{x}{r_L} + \frac{1}{2}(\frac{x}{r_L})^2 (3\frac{(\underline{x}\cdot\underline{r}_L)^2}{(x r_L)^2} - 1) + ...] \\ &= \frac{1}{r_L} \ [1 - \frac{\underline{x}\cdot\underline{r}_L}{x r_L} + \frac{1}{2r_L^2}(3\frac{(\underline{x}\cdot\underline{r}_L)^2}{(x r_L)^2} - x^2) + ...] \ . \end{aligned}$$

Nel caso $K = \vartheta = J = 0$ si ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\hat{\underline{r}}_L \cdot \underline{i} = \cos(\varphi - \lambda_L)$, $\hat{\underline{r}}_L \cdot \underline{j} = \cos(\varphi - \lambda_L + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\varphi - \lambda_L)$, $\hat{\underline{r}}_L \cdot \underline{k} = 0$ (si veda la Figura 8).

© 88-7999-464-6

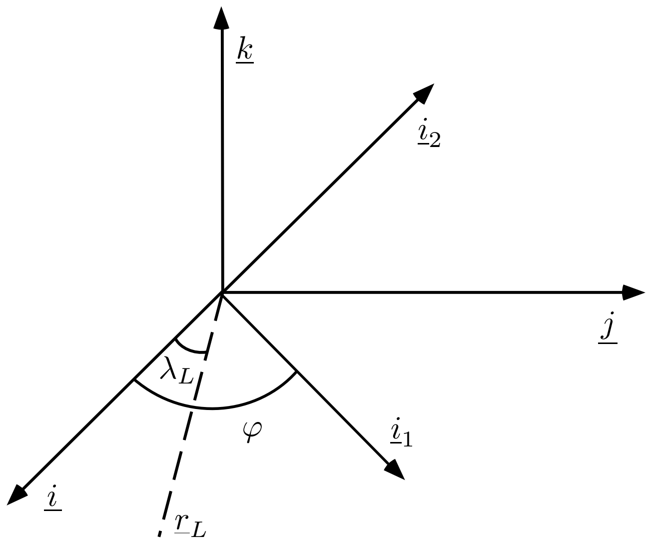


Figura 8. Relazioni tra gli angoli per la derivazione delle equazioni del modello spin–orbita.

Da $\underline{x} \cdot \underline{\hat{r}}_L = x_1 \cos(\varphi - \lambda_L) - x_2 \sin(\varphi - \lambda_L)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} \underline{x} \cdot \underline{\hat{r}}_L d\underline{x} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} &[ar \sin\tilde{\vartheta} \cos\tilde{\varphi} \cos(\varphi - \lambda_L) \\ &- br \sin\tilde{\vartheta} \sin\tilde{\varphi} \sin(\varphi - \lambda_L)] \cdot a^2 b r^2 \sin\tilde{\vartheta} dr d\tilde{\vartheta} d\tilde{\varphi} = 0\end{aligned}$$

e da $(\underline{x} \cdot \underline{\hat{r}}_L)^2 = x_1^2 \cos^2(\varphi - \lambda_L) + x_2^2 \sin^2(\varphi - \lambda_L) - x_1 x_2 \sin(2\varphi - 2\lambda_L)$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} (\underline{x} \cdot \underline{\hat{r}}_L)^2 d\underline{x} &= \frac{4}{3} \frac{abc}{5} (a^2 \cos^2(\varphi - \lambda_L) + b^2 \sin^2(\varphi - \lambda_L)) \\ &= \frac{4}{3} \frac{abc}{5} ((b^2 - a^2) \sin^2(\varphi - \lambda_L) + a^2) \ .\end{aligned}$$

Poiché $\overline{G} = \overline{H}$, $\omega = 1$ e $\frac{\tilde{G} m_L}{a^3} = 1$, si ha:

$$\begin{aligned}V &= -\frac{3}{2} \frac{\tilde{G} m_L m_T}{r_L^3} \frac{4}{3} \pi \frac{abc}{5} ((b^2 - a^2) \sin^2(\varphi - \lambda_L)) \frac{3}{4\pi abc} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\tilde{G} m_L}{r_L^3} (I_1 - I_2) \sin^2(\varphi - \lambda_L) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} (I_1 - I_2) (\frac{a}{r_L})^3 \cos(2\varphi - 2\lambda_L) \ .\end{aligned}$$

Denotando con $\varepsilon \equiv \frac{3}{2}\frac{I_2-I_1}{I_3}$, si ottiene infine l'equazione

$$\mathcal{H}(G,\varphi,\lambda_L) = \frac{G^2}{2I_3} - \frac{\varepsilon}{2}(\frac{a}{r_L})^3 I_3 \cos(2\varphi - 2\lambda_L) \ ,$$

che si può ridurre alla forma più conveniente

$$\mathcal{H}(y,x,t) \ = \ \frac{y^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}(\frac{a}{r_L})^3 \cos(2x - 2\lambda_L) \qquad (H)$$

tramite la trasformazione canonica $y = \frac{G}{\sqrt{I_3}}$, $x = \sqrt{I_3}\ \varphi$. Si noti che il parametro ε è proporzionale (tramite il fattore 3/2) allo schiacciamento equatoriale del satellite; poiché il suo valore fisico è relativamente piccolo, l'Hamiltoniana (H) appartiene alla classe dei sistemi quasi–integrabili, essendo banalmente integrabile per $\varepsilon = 0$. Dalle equazioni di Hamilton associate ad (H), si ricava che la variabile x deve soddisfare l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$\ddot{x} + \varepsilon \ (\frac{a}{r_L})^3 \sin(2x - 2\lambda_L) = 0 \ . \qquad (SO)$$

Si osservi che la variabile x rappresenta l'angolo tra un asse di riferimento (ad esempio l'asse del perielio) e una direzione fissata sul piano equatoriale dell'ellissoide (appartenente al piano orbitale per l'ipotesi iii), si veda la Figura 9.

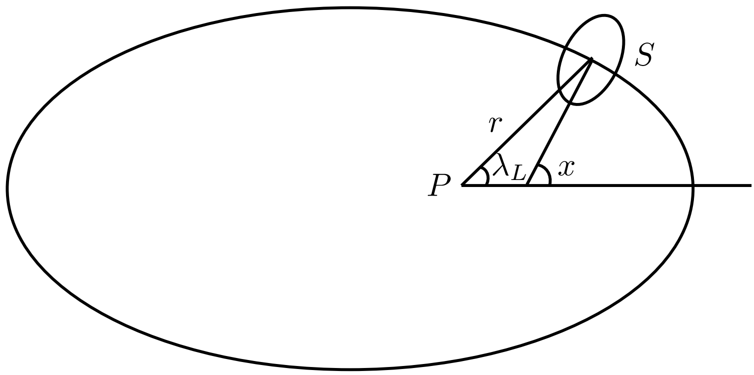


Figura 9. La geometria del modello spin–orbita.

Normalizziamo le unità di misura in modo tale che il moto medio $n \equiv \sqrt{\frac{\tilde{G}m_T}{a^3}}$ e il semiasse maggiore a siano unitari. Ricordiamo che a causa dell'ipotesi i), le quantità r_L e λ_L sono funzioni note del tempo, essendo determinate dalle relazioni kepleriane:

© 88-7999-464-6

$$
\begin{aligned}
\dot{\lambda}_L &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{r_L^2} \\
r_L &= \frac{1-e^2}{1+e\ \cos\lambda_L}\ .
\end{aligned}
\qquad (E)
$$

Pertanto l'Hamiltoniana (H) ha un grado di libertà descritto dalle variabili coniugate (y, x) $(y \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{T})$ e dipende esplicitamente dal tempo. Utilizzando le espansioni in serie dell'eccentricità che derivano dalle equazioni (E) si può dimostrare facilmente che l'equazione (SO) si sviluppa in serie di Fourier nella forma:

$$
\ddot{x}\ +\ \varepsilon \sum_{m\neq 0, m=-\infty}^{+\infty} \tilde{W}(\frac{m}{2}, e)\ sin(2x - mt)\ =\ 0\ , \qquad (S)
$$

dove le espressioni di alcuni coefficienti $W(\frac{m}{2}, e)$ sono riportate nella Tabella 1.

Consideriamo soltanto i termini più significativi nello sviluppo in serie di (S) ottenendo così l'equazione:

Tabella 1.

p	e^0	e	e^2	e^3	e^4	e^5	e^6	e^7
-1					$\frac{e^4}{24}$		$\frac{7e^6}{240}$	
$-\frac{1}{2}$				$\frac{e^3}{48}$		$\frac{11e^5}{768}$		$\frac{313e^7}{30720}$
$\frac{1}{2}$		$-\frac{e}{2}$		$\frac{e^3}{16}$		$-\frac{5e^5}{384}$		$-\frac{143e^7}{18432}$
1	1		$-\frac{5e^2}{2}$		$\frac{13e^4}{16}$		$-\frac{35e^6}{288}$	
$\frac{3}{2}$		$\frac{7e}{2}$		$-\frac{123e^3}{16}$		$\frac{489e^5}{128}$		$-\frac{1763e^7}{2048}$
2			$\frac{17e^2}{2}$		$-\frac{115e^4}{6}$		$\frac{601e^6}{48}$	
$\frac{5}{2}$				$\frac{845e^3}{48}$		$-\frac{32525e^5}{768}$		$\frac{208225e^7}{6144}$
3					$\frac{533e^4}{16}$		$-\frac{13827e^6}{160}$	

ⓒ88-7999-464-6

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} \;+\; \varepsilon\; [(&-\frac{e}{2}+\frac{e^3}{16})\;\sin(2x-t)\;+\\
&+(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{13}{16}e^4)\;\sin(2x-2t)\;+\;(\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3)\;\sin(2x-3t)\;+\\
&+(\frac{17}{2}e^2-\frac{115}{6}e^4)\;\sin(2x-4t)\;+\;(\frac{845}{48}e^3-\frac{32525}{768}e^5)\;\sin(2x-5t)\;+\\
&+\frac{533}{16}e^4\;\sin(2x-6t)\;+\;\frac{228347}{3840}e^5\;\sin(2x-7t)\;]\;=\;0\;,
\end{aligned}
$$

associata alle equazioni canoniche relative all'Hamiltoniana

$$
H(y,x,t)=\frac{y^2}{2}-\varepsilon f(x,t)\;,
$$

dove

$$
\begin{aligned}
f(x,t)=\frac{1}{2}\;[(&-\frac{e}{2}+\frac{e^3}{16})\;\cos(2x-t)\;+\\
&+(1-\frac{5}{2}e^2+\frac{13}{16}e^4)\;\cos(2x-2t)\;+\;(\frac{7}{2}e-\frac{123}{16}e^3)\;\cos(2x-3t)\;+\\
&+(\frac{17}{2}e^2-\frac{115}{6}e^4)\;\cos(2x-4t)\;+\;(\frac{845}{48}e^3-\frac{32525}{768}e^5)\;\cos(2x-5t)\;+\\
&+\frac{533}{16}e^4\;\cos(2x-6t)\;+\;\frac{228347}{3840}e^5\;\cos(2x-7t)\;]\;.
\end{aligned}
$$

MC 12. Determinazione al primo ordine dell'orbita periodica sincrona.

Scriviamo l'equazione differenziale che descrive il modello spin–orbita, nella forma:

$$
\ddot{x}-\varepsilon f_x(x,t)\;=\;0\;, \tag{A}
$$

dove $f_x(x,t)=\frac{\partial f}{\partial x}$ e l'espressione di $f(x,t)$ è stata ricavata in MC 11. Riscriviamo la (A) nella forma

$$
\begin{aligned}
\dot{x}&=y\\
\dot{y}&=\varepsilon f_x(x,t)\;,
\end{aligned} \tag{B}
$$

© 88-7999-464-6

La risonanza spin–orbita di ordine p/q è definita come la soluzione periodica di periodo $T = 2\pi q$ ($q \in \mathbf{Z}_+$), tale che

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi q) &= x(t) + 2\pi p \\ y(t + 2\pi q) &= y(t) \ . \end{aligned} \tag{C}$$

Dalle (B) si ha:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \varepsilon \int_0^t f_x(x(s), s)\ ds \\ x(t) &= x(0) + y(0)t + \varepsilon \int_0^t \int_0^\tau f_x(x(s), s)\ ds\ d\tau = x(0) + \int_0^t y(s)\ ds\ ; \end{aligned}$$

combinando tali equazioni con la (C) si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi q} f_x(x(s), s) ds = 0 \\ &\int_0^{2\pi q} y(s) ds - 2\pi p = 0\ . \end{aligned} \tag{D}$$

Scriviamo la soluzione nella forma:

$$\begin{aligned} x(t) &\equiv \overline{x} + \overline{y}t + \varepsilon x_1(t) + ... \\ y(t) &\equiv \overline{y} + \varepsilon y_1(t) + ...\ , \end{aligned}$$

dove $x(0) = \overline{x}$ e $y(0) = \overline{y}$ sono le condizioni iniziali, mentre $x_1(t)$, $y_1(t)$ sono le correzioni al primo ordine in ε. Sviluppiamo le condizioni iniziali in serie di ε come segue:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \overline{x}_0 + \varepsilon \overline{x}_1 + \varepsilon^2 \overline{x}_2 + ... \\ \overline{y} &= \overline{y}_0 + \varepsilon \overline{y}_1 + \varepsilon^2 \overline{y}_2 + ...\ , \end{aligned}$$

Cerchiamo delle espressioni esplicite per $x_1(t)$, $y_1(t)$, $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$, $\overline{y}_0$, $\overline{y}_1$. Dalle (B), uguagliando termini dello stesso ordine in ε, si ottiene:

$$\begin{aligned} \overline{y} + \varepsilon \dot{x}_1(t) + ... &= \overline{y} + \varepsilon y_1(t) + ... \\ \varepsilon \dot{y}_1(t) + ... &= \varepsilon f_x(\overline{x} + \overline{y}t, t) + ... \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= y_1(t) \\ \dot{y}_1(t) &= f_x(\overline{x} + \overline{y}t, t) \end{aligned}$$

ⓒ88-7999-464-6

ossia

$$y_1(t) = y_1(t;\overline{y},\overline{x}) = \int_0^t f_x(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 s, s)\ ds$$
$$x_1(t) = x_1(t;\overline{y},\overline{x}) = \int_0^t y_1(s)\ ds\ .$$

Si noti che le espressioni di $x_1(t)$ e $y_1(t)$ possono essere calcolate esplicitamente. Per quanto riguarda le condizioni iniziali, sfruttando le condizioni di periodicità (D) si ha:

$$y(t) = \overline{y} + \varepsilon \int_0^t f_x(x(s), s)\ ds$$

ossia

$$\int_0^{2\pi q} \left[\overline{y}_0 + \varepsilon\overline{y}_1 + \varepsilon \int_0^t f_x(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 s, s)\ ds\right]\ dt\ = 2\pi p\ .$$

Pertanto si ottiene:

$$\overline{y}_0 = \frac{p}{q}$$
$$\overline{y}_1 = -\frac{1}{2\pi q} \int_0^{2\pi q} \int_0^t f_x(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 s, s)\ ds\ dt$$

Per quanto riguarda $\overline{x}_0$ e $\overline{x}_1$, dalla relazione

$$\int_0^{2\pi q} f_x(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 s + \varepsilon(\overline{x}_1 + \overline{y}_1 s + x_1(s)\ ,\ s\ )\, ds\ =\ 0\ ,$$

espandendo in serie di ε, si ottiene che $\overline{x}_0$ è determinata come soluzione di

$$\int_0^{2\pi q} f_x(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 s, s)\ ds\ =\ 0\ ,$$

mentre $\overline{x}_1$ è data da

$$\overline{x}_1 = -\frac{1}{\int_0^{2\pi q} f_{xx}^0 dt} \left[\overline{y}_1 \int_0^{2\pi q} t f_{xx}^0\ dt + \int_0^{2\pi q} f_{xx}^0\ x_1(t)\ dt\right]\ ,$$

dove $f_{xx}^0 = f_{xx}(\overline{x}_0 + \overline{y}_0 t, t)$.

MC 13. Calcolo della librazione in longitudine della Luna.

Utilizziamo le formule ottenute in MC 11–12, ponendo $p = q = 1$ (che corrisponde alla risonanza spin–orbita sincrona). Svolgendo i calcoli (che omettiamo, lasciandoli per esercizio al lettore), si trova:

$$\begin{aligned}
\overline{x}_0 &= 0 \\
\overline{y}_0 &= 1 \\
x_1(t) &= 0.232086t - 0.218318\sin(t) - 6.36124\cdot 10^{-3}\sin(2t) \\
&\quad - 3.21314\cdot 10^{-4}\sin(3t) - 1.89137\cdot 10^{-5}\sin(4t) \\
&\quad - 1.18628\cdot 10^{-6}\sin(5t) \\
y_1(t) &= 0.232086 - 0.218318\cos(t) - 0.0127225\cos(2t) \\
&\quad - 9.63942\cdot 10^{-4}\cos(3t) - 7.56548\cdot 10^{-5}\cos(4t) \\
&\quad - 5.93138\cdot 10^{-6}\cos(5t) \\
\overline{x}_1 &= 0 \\
\overline{y}_1 &= -0.232086\ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato i dati astronomici $e = 0.05494$, $\varepsilon = 3.45\cdot 10^{-4}$. Pertanto la soluzione corrispondente all'orbita periodica sincrona, calcolata al primo ordine in ε, è data da:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \overline{x}_0 + \overline{y}_0 t + \varepsilon x_1(t) = (1 + 8.006967\cdot 10^{-5})t - 7.53196\cdot 10^{-5}\sin(t) \\
&\quad - 2.19463\cdot 10^{-6}\sin(2t) - 1.10853\cdot 10^{-7}\sin(3t) - 6.52523\cdot 10^{-9}\sin(4t) \\
&\quad - 4.09265\cdot 10^{-10}\sin(5t) \\
y(t) &= \overline{y}_0 + \varepsilon y_1(t) = 1 - 7.53196\cdot 10^{-5}\cos(t) - 4.38926\cdot 10^{-6}\cos(2t) \\
&\quad - 3.3256\cdot 10^{-7}\cos(3t) - 2.61009\cdot 10^{-8}\cos(4t) \\
&\quad - 2.04633\cdot 10^{-9}\cos(5t)\ .
\end{aligned}$$

Diamo un'interpretazione fisica delle formule che abbiamo trovato. Si noti innazitutto che, poiché la velocità angolare di rivoluzione è unitaria, il tempo t coincide con la longitudine λ_L della Luna. Nel caso $\varepsilon = 0$, le equazioni del moto si integrano banalmente come

$$\begin{aligned}
x(t) &= \overline{x}_0 + \overline{y}_0 t = \overline{x}_0 + t \\
y(t) &= \overline{y}_0 = 1\ ;
\end{aligned}$$

poiché $\overline{x}_0 = 0$, la differenza tra $x(t)$ e t è nulla e quindi la direzione sul piano equatoriale che congiunge il centro della Luna con la Terra non varia con il tempo. Aggiungendo la perturbazione (relativa al fatto di aver considerato la

Luna come un corpo triassiale), la funzione $x(t)$ è perturbata di una quantità di ordine ε; fisicamente, tale variazione di denota con il nome di *librazione in longitudine.* Il calcolo al primo ordine dell'orbita periodica sincrona, mostra che l'oscillazione della differenza $x(t) - t$ è dell'ordine di $8 \cdot 10^{-5}$, in accordo con i valori osservativi.

APPENDICE

Nella tabella seguente sono riportati i principali dati astronomici dei pianeti, forniti dai siti internet

http://ssd.jpl.nasa.gov/txt/p_elem_t1.txt

e

http://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_phys_par.

La quantità a denota il semiasse maggiore misurato in unità astronomiche UA (1 UA è pari alla distanza Terra–Sole ossia pari a $1.496 \cdot 10^8$ km); e denota l'eccentricità; i è l'inclinazione misurata in gradi; P è il periodo orbitale misurato in anni; M è la massa del pianeta che deve essere moltiplicata per 10^{23} kg; R è il raggio medio misurato in km.

Tabella di dati astronomici.

	a (UA)	e	i^{o}	P (anni)	M ($\cdot\ 10^{23}$ kg)	R (km)
Mercurio	0.387	0.2056	7.00	0.241	3.301	2439.7
Venere	0.723	0.0068	3.39	0.615	48.673	6051.8
Terra	1	0.0167	0	1	59.722	6378.1
Marte	1.524	0.0934	1.85	1.881	6.4169	3396.2
Giove	5.203	0.0484	1.30	11.862	18981	71492
Saturno	9.537	0.0539	2.49	29.447	5683.2	60268
Urano	19.189	0.0472	0.77	84.017	868.10	25559
Nettuno	30.070	0.0086	1.77	164.791	1024.1	24764
Plutone	39.482	0.2488	17.14	247.921	0.13	1151

AREE SCIENTIFICO–DISCIPLINARI

Area 01 – Scienze matematiche e informatiche

Area 02 – Scienze fisiche

Area 03 – Scienze chimiche

Area 04 – Scienze della terra

Area 05 – Scienze biologiche

Area 06 – Scienze mediche

Area 07 – Scienze agrarie e veterinarie

Area 08 – Ingegneria civile e Architettura

Area 09 – Ingegneria industriale e dell'informazione

Area 10 – Scienze dell'antichità, filologico–letterarie e storico–artistiche

Area 11 – Scienze storiche, filosofiche, pedagogiche e psicologiche

Area 12 – Scienze giuridiche

Area 13 – Scienze economiche e statistiche

Area 14 – Scienze politiche e sociali

Le pubblicazioni di Aracne editrice sono su

www.aracneeditrice.it

Finito di stampare nel mese di ottobre del 2013
dalla «ERMES. Servizi Editoriali Integrati S.r.l.»
00040 Ariccia (RM) – via Quarto Negroni, 15
per conto della «Aracne editrice S.r.l.» di Roma