Aoi

Giambattista Marini

Lezioni di Geometria e algebra lineare

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 a/b
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88–7999–458–1

I edizione: marzo 2003

Lezioni di Geometria e Algebra Lineare

Ingegneria Gestionale - I Modulo - a.a. 2002/2003

(Giambattista Marini)

Queste note costituiscono gli appunti del I modulo di geometria e sono rivolte agli studenti che seguono attivamente il corso.

Capitolo 1.

§1. Introduzione ai sistemi lineari.

L'esempio più elementare di sistema lineare è il sistema di una equazione in una incognita

$$a \cdot x \quad = \quad b\,, \qquad a\,,\ b\ \in\ \mathbb{R}\ .$$

In questo caso la discussione delle soluzioni è molto semplice: ci sono tre possibilità

i) se $a \neq 0$ esiste una unica soluzione $x = \frac{b}{a}$;

ii) se $a = b = 0$ ogni valore di x è una soluzione del sistema;

iii) se $a = 0$ e $b \neq 0$ il sistema non ha soluzioni.

Esempio. Discutiamo le soluzioni del sistema lineare di una equazione in due incognite

$$(1) \qquad a \cdot x\ +\ b \cdot y \quad = \quad c\,, \qquad a,\ b,\ c\ \in\ \mathbb{R}\ .$$

Anche in questo caso l'esistenza di soluzioni dipende dai valori dei coefficienti a, b, c.

Assumiamo $a \neq 0$ e lasciamo allo studente il problema di discutere gli altri casi possibili. Dividendo per a si ottiene

$$x \quad = \quad \big(c - by\big)/a\ .$$

Pertanto, se $a \neq 0$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare (1) è

$$(2) \qquad \big\{\, x,\, y \;\big|\; x\ =\ (c - by)/a \,\big\}\ .$$

La notazione usata è la seguente: "$\{\ldots\}$" significa "l'insieme ..." e la barra verticale "|" significa "tale che". In definitiva, (2) si legge dicendo "l'insieme degli x, y tali che $x = (c - by)/a$". Si osservi che y può assumere qualsiasi valore. Per questo motivo, diciamo che y è un *parametro libero* (relativamente alla descrizione data dello spazio delle soluzioni del sistema 1).

Esempio. Studiamo il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$(3) \qquad \begin{cases} a \cdot x\ +\ b \cdot y & = \quad \lambda \\ c \cdot x\ +\ d \cdot y & = \quad \mu \end{cases}, \qquad a,\ b,\ c,\ d,\ \lambda,\ \mu\ \in\ \mathbb{R}\ .$$

Se moltiplichiamo la seconda equazione per a e vi sostituiamo $ax = \lambda - by$ (ottenuta dalla prima equazione del sistema) troviamo

$$(ad - bc) \cdot y \quad = \quad a\mu - c\lambda\,. \tag{4}$$

Si potrebbe obiettare che potremmo aver moltiplicato per zero (se $a = 0$). Vero, comunque l'uguaglianza scritta resta valida.[1] Un calcolo simile mostra che

$$(ad - bc) \cdot x \quad = \quad d\lambda - b\mu\,. \tag{5}$$

Da (4) e (5) deduciamo quanto segue.

Proposizione. *Se* $\Delta := ad - bc \neq 0$, *esiste una unica soluzione del sistema lineare* (3), *si ha*

$$x \quad = \quad \frac{d\lambda - b\mu}{ad - bc}\,, \qquad\qquad y \quad = \quad \frac{a\mu - c\lambda}{ad - bc} \tag{6}$$

Dimostrazione. Dividendo sia (4) che (5) per Δ troviamo le espressioni di x ed y che abbiamo scritto. Questo dimostra che c'è al più una soluzione, quella indicata.
L'esistenza è un facile conto: basta sostituire le espressioni trovate nel sistema (3). □

Resta da studiare il caso $\Delta = 0$. A tal fine osserviamo che se $\Delta = 0$, cioè $ad = bc$, le due funzioni

$$f(x,y) \;:=\; ax + by \qquad \text{e} \qquad g(x,y) \;:=\; cx + dy$$

sono proporzionali: una delle due funzioni è un multiplo dell'altra. Infatti, se assumiamo $ab \neq 0$ (lasciamo allo studente l'esercizio di studiare i rimanenti casi possibili), dividendo la relazione $ad = bc$ per ab troviamo $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$. Posto $k := \frac{d}{b}$, abbiamo

$$cx + dy \quad = \quad k \cdot (ax + by)\,.$$

Ne segue che ci sono due possibilità:

i) $\mu = k\lambda$, in questo caso le due equazioni di (3) si riducono ad una ed abbiamo infinite soluzioni;

ii) $\mu \neq k\lambda$, in questo caso è evidente che il sistema (3) non ammette soluzioni.

Anche nel caso che abbiamo lasciato per esercizio "$ab = 0$" si presenta lo stesso fenomeno: il sistema (3) non ammette soluzioni oppure ne ammette infinite. In definitiva vale la proposizione che segue.

Proposizione. *Se* $\Delta := ad - bc = 0$, *possono verificarsi solo due possibilità:*

i) *esistono infinite soluzioni del sistema (3);*

ii) *il sistema (3) non ammette soluzioni.*

A questo punto ci domandiamo, cosa accade con i sistemi di n equazioni in n incognite, è possibile trovare delle formule che generalizzano (6) e caratterizzare il caso in cui esiste una unica soluzione? Inoltre, come si affronta lo studio dei sistemi lineari in cui il numero delle equazioni può essere diverso da quello delle incognite?

---

[1] Peraltro c'è un altro modo di ottenere la stessa equazione, quello di moltiplicare la prima equazione per c e di sostituirvi $cx = \mu - dy$. Osserviamo che se $a = c = 0$, (4) è l'uguaglianza banale $0 = 0$.