

Αοι  
49

Stefano Busiello

# FRATTALI E MUSICA

*Teoria e applicazioni*

con CD-ROM allegato



Copyright © MM  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133 A/B  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 88-7999-241-4

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 2000  
I ristampa aggiornata: gennaio 2002  
II edizione: febbraio 2007

## Ringraziamenti

Ringrazio il prof. Giuseppe Di Maio della II Università di Napoli per la grande fiducia mostrata nei miei confronti, per i continui incoraggiamenti e la preziosa collaborazione fornita nella stesura di questo libro. A lui non solo va il merito dell'esistenza stessa della presente pubblicazione, ma anche l'idea di applicare la teoria dei frattali alla musica, un'idea che, sviluppata, mi ha fornito molte opportunità per la mia carriera, sia di matematico che di musicista. Lo ringrazio ancora per l'entusiasmo nei confronti della mia ricerca su questo argomento, manifestato sin dai primi momenti, ossia da quando i miei primi tentativi di far musica con i frattali erano poco più che lamenti.

Sono stati anche molto utili l'esperienza musicale ed informatica del maestro Giancarlo Sica, alcuni consigli di carattere matematico di Maurizio Brunetti e le numerose osservazioni del dott. Pietro Di Lorenzo.

Infine, ringrazio il prof. Luigi Rucco per l'accurata lettura della versione definitiva del manoscritto.

Napoli, 9/12/1999

Stefano Busiello

## SOMMARIO

<b>USO DEL CD-ROM</b> .....	7
<b>INTRODUZIONE</b> .....	9
Avvertenza.....	9
Composizione musicale assistita al calcolatore.....	10
Perché frattali e musica?.....	11
<b>CAPITOLO 1: nozioni matematiche preliminari</b> .....	15
<b>1.1</b> Insiemi.....	15
<b>1.2</b> Unione di insiemi.....	17
<b>1.3</b> Insiemi di insiemi.....	18
<b>1.4</b> Insiemi numerici.....	20
<b>1.5</b> Intervalli.....	20
<b>1.6</b> Prodotto cartesiano di insiemi.....	20
<b>1.7</b> Vettori numerici e matrici.....	21
<b>1.8</b> Applicazioni (o funzioni) .....	23
<b>1.9</b> Funzioni numeriche.....	24
<b>1.10</b> Trasformazioni lineari e trasformazioni affini di $\mathbb{R}^2$ in sé.....	25
<b>1.11</b> Successioni.....	26
<b>1.12</b> Limiti di successioni numeriche.....	27
<b>1.13</b> Spazi metrici.....	29
<b>1.14</b> Intorni sferici in uno spazio metrico.....	32
<b>1.15</b> Limiti di successioni di punti di uno spazio metrico.....	33
<b>1.16</b> Successioni di Cauchy e spazi metrici completi.....	35
<b>CAPITOLO 2 origine ed evoluzione della teoria dei frattali...</b>	37
<b>2.1</b> Cosa sono i frattali? .....	37
<b>2.2</b> Le origini dei frattali.....	37
<b>2.2.1</b> Insieme di Cantor.....	38
<b>2.2.3</b> Curva di Peano.....	40
<b>2.2.4</b> Curva di Von Koch.....	42
<b>2.2.5</b> Triangolo di Sierpinski.....	43
<b>2.3</b> Un problema per molti anni insormontabile.....	47
<b>CAPITOLO 3 I sistemi iterati di funzioni (I.F.S.)</b> .....	49
<b>3.1</b> Contrazioni.....	49
<b>3.2</b> Iterata ennesima di un'applicazione.....	51
<b>3.3</b> Punti fissi.....	54
<b>3.4</b> Teorema di Banach-Caccioppoli sulle contrazioni di uno	

spazio metrico completo.....	55
<b>CAPITOLO 4 La metrica di Hausdorff e lo spazio dei frattali.</b>	59
4.1 Metrica di Hausdorff.....	59
4.2 Metrica di Hausdorff (approfondimenti).....	66
<b>CAPITOLO 5 Gli I.F.S. e il teorema di Barnsley.....</b>	71
5.1 Immagine di un insieme.....	71
5.2 Gli IFS e il teorema di Barnsley.....	71
5.3 Dimostrazione del teorema di Barnsley.....	80
<b>CAPITOLO 6 Trasformazioni affini e similitudini.....</b>	85
6.1 Nozioni basilari.....	85
6.2 Caratterizzazione delle contrazioni.....	97
6.3 Autoaffinità e autosimiglianza.....	116
<b>CAPITOLO 7 Costruzioni di frattali mediante I.F.S.....</b>	119
7.1 Insieme di Cantor.....	119
7.2 Triangolo di Sierpinski.....	120
7.3 Curva di Von Koch.....	122
7.4 Polvere di Cantor.....	124
7.5 Curva di Peano.....	126
<b>CAPITOLO 8 Programmi su gli I.F.S.....</b>	131
8.1 Il primo programma sugli IFS : IFSDET.BAS.....	131
8.2 Funzionamento del programma IFSDET.BAS.....	133
8.3 “Mescolanze” di frattali.....	135
8.4 Pregi e difetti del programma IFSDET.BAS: il programma IFSRND.BAS.....	137
8.5 Funzionamento del programma IFSRND.BAS.....	143
8.6 Come scegliere le probabilità associate alle contrazioni.....	149
<b>CAPITOLO 9 Dimensione frattale.....</b>	151
9.1 Ricoprimento di un insieme.....	151
9.2 Diametro di un insieme.....	151
9.3 Definizione intuitiva di dimensione frattale.....	152
9.4 Definizione di $\delta$ -ricoprimento di un insieme.....	156
9.5 Definizione di misura $s$ -dimensionale di Hausdorff.....	156
9.6 Definizione di dimensione di Hausdorff-Besicovitch.....	156
9.7 Definizioni alternative di dimensione.....	158
9.7.1 Dimensione conteggio delle sfere (Kolmogoroff).....	158
9.7.2 Scatole disposte a maglia.....	159

<b>CAPITOLO 10 Interpolazione frattale</b> .....	161
10.1 Il problema dell'interpolazione.....	161
10.2 IFS relativo ai dati.....	162
10.3 Topologia indotta da una metrica.....	164
10.4 Famiglie di insiemi.....	165
10.5 Insiemi compatti.....	167
10.6 Metriche equivalenti.....	168
10.7 Metriche uniformemente equivalenti.....	174
10.8 L'attrattore dell'IFS relativo ai dati.....	181
10.9 Dimensione delle curve frattali interpolatrici.....	195
<b>CAPITOLO 11 I programmi sull'interpolazione frattale</b> .....	197
11.1 I programmi INTDET.BAS e INTRND.BAS.....	197
11.2 Nozioni di teoria musicale: il sistema temperato.....	202
11.3 Il diagramma tempo-frequenza.....	203
11.4 Il programma musicale sull'interpolazione frattale: INTMUS.BAS.....	204
11.5 Il programma FREQ.BAS.....	212
11.6 Il programma NOTE.BAS.....	214
<b>CAPITOLO 12 Guida all'ascolto</b> .....	217
12.1 A, B, A <sup>I</sup> , B <sup>I</sup> , VOCI, VOCI <sup>I</sup> .....	217
12.2 Framartino.....	219
12.3 Curve.....	222
12.4 Fugato.....	224
12.5 Melodia tonale.....	227
12.6 Curve.....	233
<b>CAPITOLO 13 Interpolazione frattale e spettro di un segnale   sonoro</b> .....	235
<b>CAPITOLO 14 Note e vettori</b> .....	237
14.1 Premessa.....	237
14.2 Rappresentazione di strutture musicali in forma numerica	240
14.3 Temi musicali con note di differente durata.....	240
14.4 Come ottenere la frequenza di ogni nota del tema musicale.....	240
14.5 Uscire dal sistema temperato.....	241
<b>CAPITOLO 15 Ordine e caos</b> .....	243

<b>CAPITOLO 16 Sistemi dinamici discreti</b> .....	
16.1 Definizione di sistema dinamico discreto.....	247
16.2 Punti fissi.....	247
16.3 Orbite periodiche.....	247
16.4 Insiemi attrattori.....	251
16.5 Attrattori caotici.....	254
	255
<b>CAPITOLO 17 Equazione logistica</b> .....	
17.1 La funzione logistica.....	257
17.2 Metodo grafico per il calcolo delle iterate della f.....	257
17.3 Il diagramma di biforcazione.....	258
17.4 Il programma BIFORC.BAS.....	260
17.5 Punti fissi.....	265
17.6 Orbite di periodo.....	266
17.7 Orbite di periodo $k$ ( $k > 1$ ) .....	266
17.8 Il diagramma di biforcazione nella regione caotica.....	267
17.9 Il programma logistic.....	268
17.10 Armonia con l'equazione logistica.....	275
17.11 Dall'ordine al caos e viceversa.....	287
	287
<b>CAPITOLO 18 Esempi musicali ricavati con l'equazione logistica</b> .....	289
18.1 Adeste.....	289
18.2 Adeste.....	291
18.3 Adeste.....	293
18.4 Adeste.....	296
18.5 Variazioni su un tema.....	298
18.6 Contrappunti di caos.....	314
<b>CAPITOLO 19 I numeri complessi</b> .....	315
19.1 Definizioni.....	315
19.2 Rappresentazione grafica di un numero complesso.....	315
19.3 Rappresentazione trigonometrica di un numero complesso.....	316
19.4 Rappresentazione vettoriale di un numero complesso.....	317
19.5 Addizione e moltiplicazione in $\mathbb{C}$ .....	317
19.6 Potenza n-ma di un numero complesso.....	318
19.7 Radice n-ma di un numero complesso.....	318
19.8 Le soluzioni dell'equazione $z^n - 1 = 0$ .....	320
19.9 $\mathbb{C}$ come spazio metrico.....	321



<b>CAPITOLO 20 Metodo di Newton</b> .....	323
<b>20.1</b> Insiemi di Julia e bacini di attrazione.....	323
<b>20.2</b> Definizioni.....	332
<b>20.3</b> Il metodo di Newton applicato ad un'equazione su $\mathbb{C}$ .....	339
<b>CAPITOLO 21 Metodo di Newton e bacini d'attrazione delle soluzioni dell'equazione <math>z^n - 1 = 0</math></b> .....	341
<b>21.1</b> Bacini d'attrazione e insiemi di Julia.....	341
<b>21.2</b> Alcune proprietà di $J$ .....	345
<b>21.3</b> Alcune proprietà dei bacini di attrazione $A(\zeta_0)$ , $A(\zeta_{n-1})$ .....	346
<b>CAPITOLO 22 Programmi grafici mediante l'insieme di Julia</b> .....	357
<b>22.1</b> Il programma ITER.....	357
<b>22.2</b> Il programma NEWITER.....	363
<b>22.3</b> Il programma BACINI.....	371
<b>22.4</b> Inconvenienti del programma.....	372
<b>22.5</b> Il programma BACINI.....	375
<b>22.6</b> Il programma BACINI.....	375
<b>22.7</b> Il programma BACINI.....	376
<b>22.8</b> Il programma BACINI.....	376
<b>22.9</b> Il programma BACINI.....	378
<b>22.10</b> Il programma BACINI.....	378
<b>22.11</b> Modifiche ai programmi BACINI E BACINI: il programma NEWBAC per qualunque tipo di polinomio.....	386
<b>22.12</b> Modifiche al sottoprogramma "NuovaIterata" al variare del polinomio $F(z)$ .....	387
<b>CAPITOLO 23 Colori e musica</b> .....	397
<b>23.1</b> Ricavare musica da un'immagine colorata.....	397
<b>23.2</b> Composizioni polifoniche.....	400
<b>CAPITOLO 24 <math>z^5 - 1 = 0</math>: una composizione a 5 colori</b> .....	405
<b>CAPITOLO 25 Funzioni quadratiche e insieme di Mandelbrot</b> .....	421
<b>25.1</b> Insiemi connessi, sconnessi e totalmente sconnessi.....	421
<b>25.2</b> Trasformazioni lineari in $\mathbb{C}$ .....	422
<b>25.3</b> L'insieme di Julia delle funzioni quadratiche.....	423
<b>25.4</b> Un algoritmo per rappresentare l'insieme di Julia di $f_c$ .....	424
<b>25.5</b> L'insieme di Julia delle funzioni quadratiche più generali.....	429

25.6 L'insieme di Mandelbrot.....	430
25.7 Il programma MANDEL.BAS.....	434
25.8 Il programma JULIA.BAS.....	438
25.9 Il programma IMMAGINE.BAS.....	444
<b>CAPITOLO 26 Gravit.....</b>	<b>445</b>
26.1 Il programma Gravit.....	445
26.2 Statistica autosimiglianza del disegno di "gravit" e conseguenze musicali.....	446
26.3 Funzionamento del programma GRAVIT.BAS.....	446
<b>INDICE ANALITICO.....</b>	<b>453</b>
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>459</b>

## Uso del CD-ROM.

Questo CD-ROM è anche un CD audio, quindi può essere ascoltato da un qualsiasi impianto stereo. Esso contiene alcune musiche composte con procedimenti frattali e commentate nei capitoli 12, 18 e 24.

In particolare:

nella *traccia 1* c'è *Fratmartino* (vedi paragrafo 12.2)

nella *traccia 2* c'è *Curve1* (vedi paragrafo 12.3)

nella *traccia 3* c'è *Fugato* (vedi paragrafo 12.4)

nella *traccia 4* c'è *Curve2* (vedi paragrafo 12.6)

nella *traccia 5* c'è *Variazioni su un tema* (vedi paragrafo 18.5)

nella *traccia 6* c'è *Contrappunti di caos* (vedi paragrafo 18.6)

nella *traccia 7* c'è  $z^5 - 1 = 0$  (vedi capitolo 25)

### IL CD-ROM:

Nella cartella *installa*, cliccando su *Setup.exe*, si installa il programma *musfrat* che commenta le musiche del CD con una serie di immagini e di spiegazioni che fanno riferimento agli argomenti trattati nel libro.

Si richiedono circa 7 Mb di hard disk liberi.

Si consiglia di impostare lo schermo a  $640 \times 480$  pixel.

Il programma funziona solo con il CD inserito.

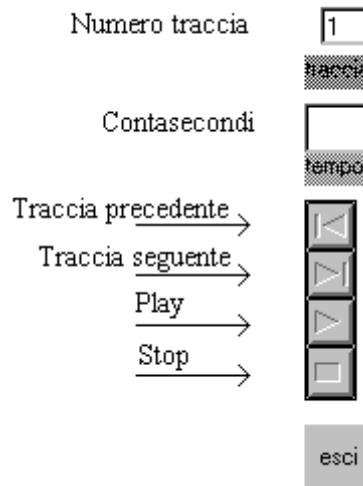
Nella cartella *Fratmus\progbas* del CD-ROM si trovano tutti i programmi (in Qbasic) illustrati nel libro.

Nella cartella *ascolti* del CD-ROM si trovano file sonori contenenti esempi musicali commentati nei capitoli 12 e 18.

### Il programma *musfrat*.

Dopo avere installato *musfrat*, è possibile azionarlo cliccando due volte su *musfrat.exe* contenuto nella cartella in cui è stato scelto di installarlo.

Azionato il programma, appaiono dei comandi che simulano quelli di un lettore di CD audio.



Se è inserito il CD-ROM nel lettore, è possibile ascoltare la musica e, contemporaneamente, vedere una successione di immagini che la commenta.

## INTRODUZIONE

Ho cercato di rendere questo libro autosufficiente e di facile comprensione, in modo tale che possa essere letto anche da persone con conoscenze solo liceali di matematica. Per questa ragione, nel libro, si alternano parti divulgative, in cui i concetti sono spiegati in maniera intuitiva, con parti scritte in modo più rigoroso.

Per una completa comprensione del libro potrebbe essere utile (ma non necessaria) qualche conoscenza elementare di programmazione e di musica.

Coloro che si sentono a disagio con la matematica non si devono scoraggiare, ma continuare tranquillamente la loro lettura. Molti concetti sono ripetuti infatti più volte in diverse maniere. Quindi ciò che all'inizio può sembrare oscuro, probabilmente risulterà più chiaro nelle pagine successive o, comunque, non essenziale alla comprensione (almeno intuitiva) del discorso generale.

### **Avvertenza:**

Per consentire la lettura di questo libro al maggior numero possibile di persone, si adotta la seguente convenzione.

Le parti precedute da questo simbolo



sono quelle destinate a coloro i quali hanno una conoscenza matematica liceale e quindi hanno bisogno di qualche spiegazione in più.

Le parti precedute dal seguente simbolo



sono quelle destinate agli “addetti ai lavori”, dove cioè si fa un maggiore uso della matematica.

Infine le parti precedute dal seguente simbolo



sono per tutti i lettori.



### **Composizione musicale assistita al calcolatore.**

In questo libro si applica la teoria dei frattali alla composizione musicale. Si tratta dunque di composizione assistita al calcolatore e non, come comunemente si potrebbe pensare, di musica elettronica. La musica elettronica utilizza il computer per la sintesi di suoni (o più in generale di eventi sonori) del tutto nuovi, mentre la composizione assistita al calcolatore consiste in procedimenti eseguiti dal computer per poter comporre musica (utilizzando suoni già esistenti, come ad esempio quelli di una tastiera elettronica).

Ci si può domandare, allora, quale possa essere il ruolo del calcolatore nella composizione musicale: può mai un calcolatore sostituirsi alla creatività della mente umana? La risposta ovviamente è no, ma, nonostante ciò, il calcolatore in alcuni contesti può essere un più che valido aiuto per il compositore. Cerchiamo di spiegare meglio questo concetto.

Nella musica tradizionale un compositore di solito lavora essenzialmente affrontando la propria opera dal punto di vista *microstrutturale*, ovvero decide per ogni singolo suono l'altezza, la durata, l'intensità ed eventualmente (se compone per più strumenti) il timbro. In questo modo ogni nota acquista una sua precisa funzione, tanto che cambiare una sola nota può spesso stravolgere completamente il senso del discorso musicale. Insomma, nella gran parte della musica tradizionale ogni nota ha una funzione determinante nell'ambito del discorso musicale.

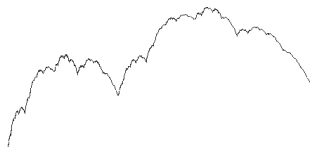
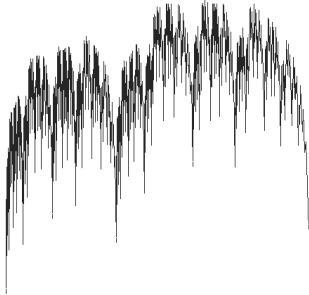
Può esistere però della musica in cui un singolo suono non è importante, ma in cui è importante l'effetto prodotto da un insieme di suoni. In questo caso si perde il significato di melodia e armonia che viene sostituito da quello di successione o sovrapposizioni di effetti sonori, ognuno dei quali è un gruppo più o meno grande di suoni che a loro volta si susseguono e si sovrappongono. Per questo tipo di composizione musicale, il calcolatore può essere uno strumento molto utile per un compositore. Infatti un dato "effetto sonoro", per essere creato, potrebbe richiedere molto tempo ad un compositore che, lavorando "a mano" è costretto a pensare alla creazione di ogni singolo evento sonoro. È possibile qui fare un'analogia: una persona che cammina non pensa ad ogni singolo movimento che compie («alzo la gamba destra, la spingo in avanti, contemporaneamente ruoto leggermente la caviglia sinistra, poi piego il ginocchio sinistro...»), altrimenti per fare un singolo passo ci metterebbe delle ore. Invece uno che cammina deve solo decidere l'andatura, mentre tutti i singoli movimenti sono regolati da parti del cervello che non dipendono dalla volontà: parti del cervello forse meno

nobili, ma certamente molto utili. In questa analogia queste zone del cervello corrispondono al calcolatore.

Ancora, un calcolatore può essere importante per la composizione musicale, se utilizzato come fonte d'ispirazione. Infatti, chi crea musica, cerca nuove soluzioni attivando la propria musicalità che però è sempre influenzata dall'ambiente circostante e dalla cultura ed esperienza del compositore. Ad esempio un musicista di una tribù africana che non è mai venuto a contatto con nessun'altra musica, non potrà comporre mai sullo stile della musica occidentale, ma la sua musica sarà sempre fortemente legata a quella della sua tribù. Allo stesso modo qualunque compositore ha un istinto creativo plasmato dalla sua cultura musicale che, per quanto vasta possa essere, è pur sempre limitata. Allora il computer, proprio perché privo completamente di musicalità, può suggerire soluzioni del tutto impensabili per il compositore, il più delle volte da scartare, ma che, qualche volta, possono diventare una valida fonte di ispirazione. In altre parole, un compositore, con l'ausilio dei suggerimenti di un calcolatore, può creare della musica che altrimenti non avrebbe mai composto, ma che, allo stesso tempo, è di suo gradimento in quanto questi suggerimenti sono vagliati e plasmati dalla sua musicalità.

### **Perché frattali e musica?**

I frattali sono enti geometrici con caratteristiche molto particolari: autosomiglianza, autoaffinità, dimensione frazionaria, correlazione con i concetti di ordine e di caos. Queste caratteristiche, che sono molto evidenti espresse graficamente (ad esempio una curva frattale di dimensione 1.9 si distingue molto da una di dimensione 1.1, si veda in proposito il capitolo 10), possono essere altrettanto evidenti se tradotte in successioni di suoni. In questo caso le caratteristiche dei frattali diventano molto riconoscibili anche a livello uditivo. Contemporaneamente, la musica composta con l'ausilio di alcuni procedimenti atti a generare immagini frattali assume delle caratteristiche peculiari tali, che diventa subito riconoscibile come "musica con i frattali".

	
Curva frattale di dimensione 1.1	curva frattale di dimensione 1.9

È logico che non bastano gli algoritmi (algoritmo = procedimento) di musica frattale per poter comporre musica, perché, a monte di tutto, deve sempre esserci il compositore. Nessun computer, seppur dotato dei più sofisticati programmi, può sostituirsi all'inventiva di un compositore. Quindi i programmi qui esposti possono generare esempi sonori ma non musica. Questi esempi sonori possono essere considerati solo come materia prima da modellare per poter ottenere una composizione, così come, per esempio, la creta può essere materia prima per una scultura.

In questo libro si cercano delle corrispondenze tra musica e immagine in modo che alcune caratteristiche di un'immagine abbiano una diretta corrispondenza con alcune caratteristiche della musica e viceversa. Tutta l'attenzione è rivolta ai frattali in modo da creare della musica che possiamo definire frattale.

Si cerca quindi di trasferire in musica concetti appartenenti alla geometria frattale come: autosomiglianza e autoaffinità (vedi capitolo 6), dimensione frattale (vedi capitolo 9), ordine e caos (vedi capitolo 15), ma senza mai dimenticare che si sta facendo della musica e che, quindi, la gradevolezza del risultato musicale deve avere un'importanza prioritaria. La matematica, rispetto alla musica, sarà vista come uno strumento che consente nuovi tipi di espressioni musicali, senza voler soppiantare nulla di secoli e secoli di evoluzione musicale avutasi nella storia della civiltà umana. Non si prescinde quindi dalla musica tradizionale (e in particolar modo dalla musica tonale), ma ci si propone di creare qualcosa di nuovo, considerando come punto di partenza tutti i traguardi raggiunti dalla musica tradizionale. Insomma, usando una metafora, se vogliamo paragonare ciò che la musica è riuscita ad esprimere fino ad oggi ad un grattacielo, piuttosto che abbatterlo e sulle sue fondamenta cercare di costruire qualcosa di



completamente nuovo, può essere preferibile adoperarsi per aggiungere a questo grattacielo un piano in più. La teoria matematica dei frattali può essere vista come un mattone costituente questo nuovo piano in costruzione.



Si trasferisce nella musica il concetto di autosomiglianza e di autoaffinità, mediante le curve frattali interpolatrici (vedi capitolo 10), viste in un diagramma di tempo-altezza e rappresentanti quindi l'evoluzione di una, per così dire, "melodia". È interessante notare come la dimensione frazionaria possa diventare riconoscibile al nostro orecchio più ancora della cellula melodica di partenza (che viene trattata come insieme di punti da interpolare).

Più avanti ci si dedica ai concetti di ordine e caos (vedi capitolo 15) in musica. Ovviamente è impossibile dare una definizione di musica caotica o non caotica che abbia una validità assoluta. E' invece valida la definizione di ordine e caos rispetto ad una legge o un insieme di leggi musicali o ancora rispetto, per esempio, ad una melodia e/o ad una successione armonica già note. Si considerano separatamente o non, vari aspetti musicali come: melodia, armonia, attrazioni armoniche (ovvero tendenze naturali che ha ogni accordo a risolvere su un altro una volta che sia stata definita una tonalità).

La corrispondenza tra immagine e musica può attuarsi mediante una associazione tra colori e temi musicali predeterminati (vedi capitolo 23), in modo tale che ad un'immagine caotica corrisponda una musica caotica e viceversa. In questo modo, se si lavora nell'ambito del sistema temperato, si crea, sia al livello melodico che in quello armonico, la maggiore o minore (dipende dal "grado di caoticità" dell'immagine frattale presa in esame) rottura delle "attrazioni armoniche" presenti in ognuno dei temi musicali predeterminati dal compositore, rottura che determina l'abbandono della tonalità, mantenendo però la consonanza.

Ancora, mediante gli attrattori caotici (come il diagramma di biforcazione dell'equazione logistica (vedi capitolo 17)), si possono creare nuove melodie che si discostano sempre più da temi predeterminati a mano a mano che due orbite di due punti dell'attrattore, inizialmente vicine, si discostano sempre più tra loro.