Antonio Liberatore

dalle lezioni di

# *Analisi matematica II*

Aracne

**ARACNE EDITRICE S.R.L.**

00173 Roma, via R. Garofalo, 133
tel. 06 93781065

ISBN 88-7999-182-5

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it



I edizione: settembre 1998

Capitolo 1

# COMPLEMENTI DI CALCOLO INTEGRALE

## §1: Integrali generalizzati o impropri

Nel Cap. 11 della prima parte abbiamo parlato della integrabilità delle funzioni limitate in un intervallo limitato. In questo paragrafo vogliamo generalizzare il suddetto concetto chiedendoci se sia possibile estendere il calcolo integrale a funzioni non limitate in un intervallo limitato e a funzioni limitate in un intervallo illimitato.

Nel caso in cui tale estensione risulti possibile, parleremo di "integrazione in senso generalizzato o in senso improprio".

a) - Integrali generalizzati in intervalli limitati

**Def. 1.1**: *Sia $f$: $X \to \boldsymbol{R}$ tale che $f(x)$ risulti illimitata in $[a,b] \subseteq X$ ovvero* $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. $\forall \xi \in (b-\delta, b), \delta > 0$, *si ha che la funzione $f(x)$ risulta limitata in $[a, \xi]$, per cui ha senso* $\int_a^\xi f(x)dx$.

*Considieriamo ora*

$$(1.1) \qquad \lim_{\xi \to b^-} \int_a^{\xi} f(x)dx$$

*Se tale limite esiste diciamo che la funzione è integrabile in senso generalizzato in [a,b] e nel caso in cui risulti finito diciamo che la funzione f(x) è sommabile in [a,b], assumendo il suddetto limite come valore dell'integrale generalizzato*

$$(1.2) \qquad \int_a^b f(x)dx.$$

Osservazioni:

- Se la funzione f(x) dovesse risultare illimitata in (a,b] ovvero $\lim_{x \to a^+} |f(x)| = +\infty$, allora $\forall \eta \in (a, a+\delta)$, $\delta>0$ la funzione f(x) risulta limitata in $[\eta, b]$ e analogamente alla Def. 1.1, nel caso dell'integrabilità, si ha

$$(1.3) \qquad \lim_{\eta \to a^+} \int_{\eta}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

- Se la funzione f(x) dovesse risultare illimitata in un punto $c \in (a,b)$, abbiamo

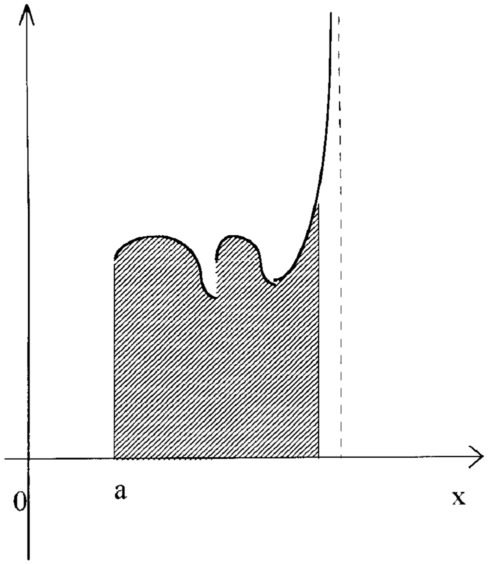
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

che per le (1.1) e (1.3) possiamo scrivere

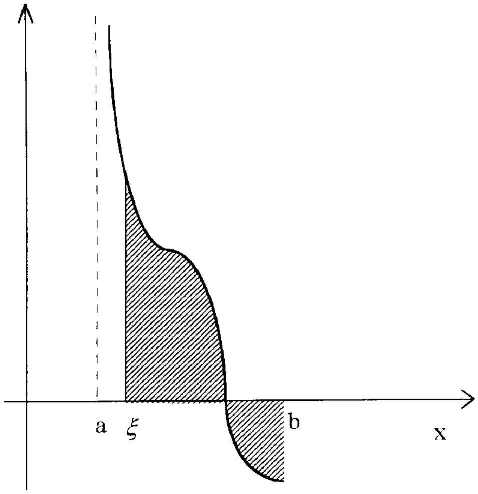
$$(1.4) \qquad \lim_{\xi \to c^-} \int_a^{\xi} f(x)dx + \lim_{\eta \to c^+} \int_{\eta}^{b} f(x)dx$$

che, sotto l'ipotesi della Def. 1.1, è l'integrale generalizzato $\int_a^b f(x)dx$.

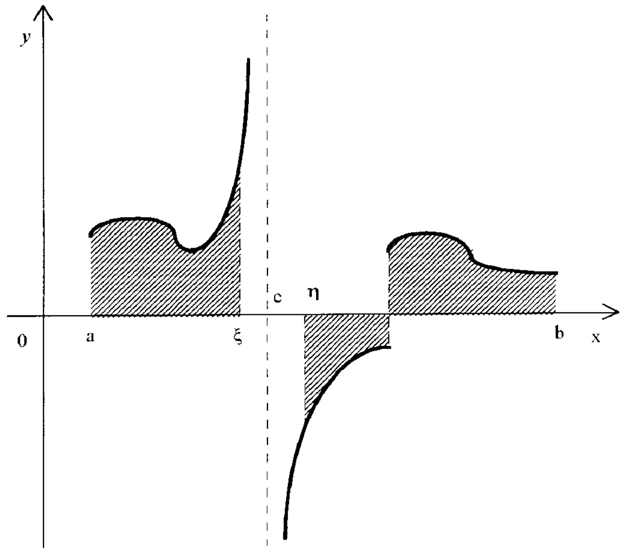
Interpretazione geometrica.




(1.1)



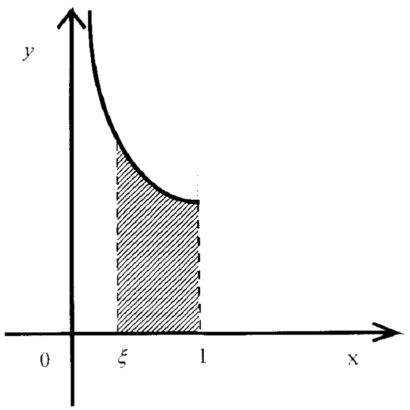

(1.3)




(1.4)

**Esempi**

**E 1.1**: *"La funzione f(x)* $= \frac{1}{\sqrt{x}}$ *illimitata in [0,1] è ivi integrabile in senso generalizzato e sommabile".*




Infatti

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\xi\to0^+}\int_\xi^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx =$$

$$\lim_{\xi\to0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_\xi^1 = \lim_{\xi\to0^+}\left(2-2\sqrt{\xi}\right) = 2$$

$\boxtimes$

**E 1.2**: *"La funzione f(x)* $= \frac{1}{x}$ *illimitata in [0,1] è ivi integrabile in senso generalizzato ma non sommabile"*

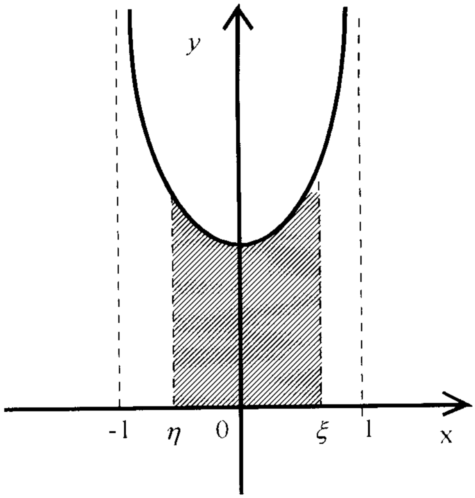
(Grafico simile al precedente)

Infatti

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\xi\to0^+}\int_\xi^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\xi\to0^+}\left[\ln x\right]_\xi^1 = -\lim_{\xi\to0^+}\ln\xi = +\infty$$

$\boxtimes$

**E 1.3**: *"La funzione f(x)* $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *illimitata in [-1,1] è ivi integrabile e sommabile"*




Infatti

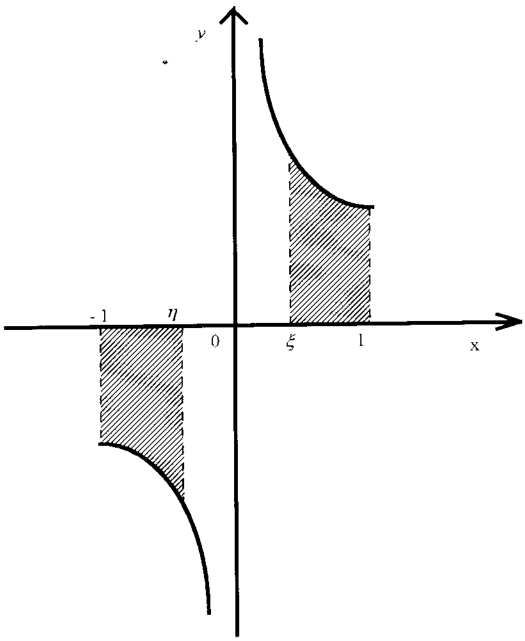
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\substack{\xi \to 1^- \\ \eta \to 1^+}} \int_{\eta}^{\xi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\xi \to 1^- \\ \eta \to 1^+}} [\arcsin x]_{\eta}^{\xi} =$$

$$= \lim_{\substack{\xi \to 1^- \\ \eta \to 1^+}} [\arcsin\xi - \arcsin\eta] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi \qquad \boxtimes$$

**E 1.4**: *"La funzione f(x)* $= \dfrac{1}{x}$ *illimitata in [-1,1] non è ivi integrabile in senso generalizzato"*




Infatti

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to 0^+} \int_{-1}^{\eta} \frac{1}{x}\,dx + \lim_{\xi \to 0^+} \int_{\xi}^{1} \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\eta \to 0^-} [\ln|x|]_{-1}^{\eta} + \lim_{\xi \to 0^+} [\ln|x|]_{\xi}^{1} =$$

$$= \lim_{\eta \to 0^-} \ln|\eta| - \lim_{\xi \to 0^+} \ln|\xi| = -\infty + \infty$$

$\boxtimes$

**Def. 1.2**: *"Sia $f : X \to \mathbf{R}$ tale che risulti illimitata in $[a,b] \subseteq X$, diciamo che essa è ivi "assolutamente sommabile" se l'integrale generalizzato*

$\int_a^b |f(x)|dx$ *esiste ed ha valore finito.*

**Criterio generale (di Cauchy) di sommabilità**

**Teor.1.3**: *"Sia $f : X \to \mathbf{R}$ illimitata in $[a,b] \subseteq X$, ad esempio* $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = +\infty$, *allora essa risulta ivi sommabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che* $\forall \xi', \xi'' \in (b - \delta_\varepsilon, b)$ *si abbia*

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| < \varepsilon \tag{1.5}$$

La dimostrazione segue dal criterio di convergenza di Cauchy relativo alle funzioni (Cap.5, §8, prima parte).

Alcuni criteri sufficienti di sommabilità.

**Criterio del confronto**

**Teor.1.4**: *"Siano $f : X_1 \to \mathbf{R}$ e $g : X_2 \to R$ illimitate in $[a,b] \subseteq X_1 \cap X_2$ tali che*

*i)* $\lim_{x \to b^-} |f(x)| = +\infty \qquad \lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$

*ii)* $|f(x)| \le g(x) \qquad$ *in $(b-\delta_\varepsilon, b)$*

*iii) g(x) sommabile in [a,b]*

*allora*

*t) f(x) sommabile in [a,b]"*

Dim.: Per il Teor.1.3 si ha:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon : \forall \xi', \xi'' \in (b-\delta_\varepsilon, b)$ risulta

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx \right| \le \int_{\xi'}^{\xi''} |f(x)|dx \le \int_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx < \varepsilon \text{ ''} \quad \blacksquare$$

**Prop.1.5**: *"Sia in [a,b] g(x) =* $\dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ *con* $\alpha \in \boldsymbol{R}^+$ *essa risulta sommabile in [a,b] per* $0<\alpha<1$ *non sommabile per* $\alpha \ge 1$*"*

Dim.: La funzione g(x) risulta illimitata in [a,b], infatti $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{1}{(b-x)^\alpha} = +\infty$.

Si ha
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\xi \to b^-} \int_a^\xi \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\xi \to b^-} \begin{cases} \left[-\ln(b-x)\right]_a^\xi & \text{per } \alpha = 1 \\[2ex] -\left[\dfrac{(b-x)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_a^\xi & \text{per } \alpha \ne 1 \end{cases}$$

da cui

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \ge 1 \\[2ex] \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{per } 0<\alpha<1 \end{cases} \tag{1.6}$$

$\blacksquare$

Dal criterio del confronto si deduce

**Prop. 1.6**: *"Ogni funzione f(x) che in [a,b] soddisfi la limitazione*

*(1.7)* $$|f(x)| \le \frac{k}{(b-x)^{\alpha}}$$

*con k > 0 e 0 < α < 1, risulta assolutamente sommabile in [a,b]."*

In generale si ha:

**Prop.1.7**: *"Siano h: X→**R** illimitata e assolutamente sommabile in [a,b] ⊆X ed f:[a,b]→**R** limitata in [a,b], allora*

*t) f(x)·h(x) è assolutamente sommabile in [a,b]."*

Dim.: Poiché f(x) limitata in [a,b] esiste un $k \in \mathbf{R}^+$ tale che $|f(x)| \le k$ in [a,b] per cui dal criterio del confronto risulta

$$|f(x) \cdot h(x)| \le k|h(x)| \qquad \blacksquare$$

Dimostriamo ora **il 1° criterio fondamentale di sommabilità**

**Teor.1.8**: *"Siano f: X→**R** tale che*

*i) f(x) illimitata in [a,b] ⊆**R***

*ii) infinita di ordine α per $x \to b^-$*

*allora*

*t) f(x) risulta sommabile in [a,b] se α < 1, non sommabile se α ≥ 1."*

Dim.: Poiché f(x) è infinita per $x \to b^-$ di ordine α si ha

$$\lim_{x\to b^-}\frac{|f(x)|}{\dfrac{1}{|b-x|^{\alpha}}}=l>0 \qquad \text{ovvero}$$

$$\lim_{x\to b^-}\left|(b-x)^{\alpha}\cdot f(x)\right|=l \qquad \text{per cui}$$

$l-\varepsilon<(b-x)^{\alpha}\cdot|f(x)|<l+\varepsilon$ e quindi $\dfrac{l-\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}<|f(x)|<\dfrac{l+\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}$ da cui la tesi

per il criterio del confronto e per la (1.7). ■

Esempi:

**E 1.5**: La funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ illimitata in $[0,1]$ risulta ivi sommabile in

quanto per $x\to 1^-$ è infinita di ordine $\alpha=\dfrac{1}{2}<1$ ☒

**E 1.6**: La funzione $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ illimitata in $[0,1]$ risulta ivi non sommabile

in quanto per $x\to 1^-$ è infinita di ordine $\alpha=\dfrac{3}{2}>1$. ☒

b) - <u>Integrali generalizzati in intervalli illimitati</u>

**Def. 1.9**: *"Sia $F: X\to \mathbf{R}$ tale che $f(x)$ sia limitata nell'intervallo illimitato*

*$[a,+\infty)\subseteq X$. $\forall\xi>a$ l'integrale* $\int_a^{\xi} f(x)dx$ *ha senso in quanto è l'integrale di una*

*funzione limitata in un intervallo limitato.*

*Consideriamo ora*

(1.8) $$\lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} f(x)dx$$

*Se tale limite esiste diciamo che la funzione è "integrabile in senso generalizzato" in [a, +∞ ) e nel caso in cui risulti "finito" diciamo che la funzione f(x) è ivi "sommabile" assumendo il suddetto limite come valore dell'integrale*

(1.9) $$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,.\text{"}$$

Analogamente per intervalli del tipo (- ∞,a] e [-∞,+∞).

Esempi:

**E 1.7**: *"La funzione f(x) = $e^{-x}$ limitata in [0,+∞) risulta ivi integrabile e sommabile"*

Infatti

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^{\xi} e^{-x}dx = \lim_{\xi \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^{\xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \left(-e^{-\xi}+1\right) = 1 \qquad \boxtimes$$

**E 1.8**: *"La funzione f(x) = $\frac{1}{x}$ limitata in [1,+∞) risulta ivi integrabile ma non sommabile"*

Infatti

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_1^{\xi} \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \to +\infty} [\ln x]_1^{\xi} = \lim_{\xi \to +\infty} \ln \xi = +\infty \qquad \boxtimes$$

**E 1.9**: *"La funzione f(x) = sin x limitata in [0, + ∞) non è ivi integrabile in senso generalizzato"*

**Infatti**

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_0^{\xi} \sin x dx = -\lim_{\xi \to +\infty} [\cos x]_0^{\xi} = -\lim_{\xi \to +\infty} [\cos \xi - 1]$$

e tale limite non esiste $\boxtimes$

**Criterio generale (di Cauchy) di sommabilità**

**Teor.1.10**: *"Sia f : X→**R** limitata in [a, + ∞) ⊆X, allora la funzione f(x) risulta ivi sommabile se e solo se* $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi_\varepsilon > a: \forall \xi', \xi'' > \xi_\varepsilon$ *si abbia*

$$\left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x) dx \right| < \varepsilon \text{ ''}$$

La dimostrazione segue dal criterio di convergenza di Cauchy relativo alle funzioni.

Alcuni criteri sufficienti di sommabilità.

**Criterio del confronto**

**Teor.1.11**: *"Siano $f: [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ e $g: [a,+\infty) \to \mathbf{R}$ limitate in $[a,+\infty)$ tali che*

*i)* $|f(x)| \le g(x)$ $\qquad \forall x \in [a,+\infty)$

*ii) $g(x)$ sommabile in $[a,+\infty)$*

*allora*

*t) $f(x)$ sommabile in $[a,+\infty)$"*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema 1.4, tenendo presente il teorema 1.10.

**Prop.1.12**: *"Sia in $[a,+\infty)$ $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ con $a \in \mathbf{R}^+$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ essa risulta sommabile in $[a,+\infty)$ se $\alpha > 1$, non sommabile se $\alpha \le 1$ "*

Dim.: La funzione g(x) risulta limitata e inoltre continua in $[a,+\infty)$ per cui ha senso la scrittura

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\xi \to +\infty} \int_a^{\xi} \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{\xi \to +\infty} \begin{cases} \left[\ln x\right]_a^{\xi} & \text{per } \alpha = 1 \\ \left[\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^{\xi} & \text{per } \alpha \ne 1 \end{cases}$$

Da cui

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \le 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{per } \alpha > 1 \end{cases} \tag{1.10}$$

■

Dal criterio del confronto si deduce:

**Prop.1.13**: *"Ogni funzione f(x) che in $[a,+\infty)$ soddisfi la limitazione*

$$|f(x)| \leq \frac{k}{x^{\alpha}} \qquad k>0 \quad e \quad \alpha>1 \tag{1.11}$$

*è assolutamente sommabile in $[a,+\infty)$."*

**2° criterio fondamentale di sommabilità**

**Teor.1.14**: *"Sia $f: [a,+\infty) \to R$ tale che*

*i) f(x) limitata in $[a,+\infty)$*

*ii) f(x) infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine $\alpha$,*

*allora*

*t) f(x) risulta sommabile in $[a,+\infty)$ se $\alpha>1$, non sommabile se $\alpha \leq 1$."*

Dim.: Poiché f(x) è infinitesima di ordine $\alpha$ per $x \to +\infty$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{|x|^{\alpha}}} = 1 > 0 \qquad \text{ossia}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}|f(x)| = 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{1-\varepsilon}{x^{\alpha}} < |f(x)| < \frac{1+\varepsilon}{x^{\alpha}}$$

da cui la tesi tenendo presente il criterio del confronto e le Prop.1.12 e Prop.1.13.

■

Esempi:

**E 1.10**: *"La funzione f(x)* $= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ *limitata in* $[0,+\infty)$ *e infinitesima per x*

$+\infty$ *è ivi sommabile in quanto per* $x \to +\infty$ *ha ordine di infinitesi.*

$\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ " $\boxtimes$

**E 1.11**: *"La funzione f(x)* $= \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ *limitata in* $(-\infty,+\infty)$ *e infinitesima* *]*

$x \to \pm\infty$ *non è sommabile in quanto il suo ordine di infinitesimo è* $\alpha = \dfrac{2}{3} < 1$.

Esercizio:

**E.1.12**: *"Calcolare* $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ "

Operiamo la sostituzione

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \text{essendo } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Si ha

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt$$

che è un integrale generalizzato di funzione continua in $[0,+\infty)$ e infinitesima, per $x \to +\infty$, di ordine $\alpha = 2 > 1$, pertanto la funzione risulta ivi sommabile.

Calcoliamo il suddetto integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\left(\frac{1}{t^2-\sqrt{2}\,t+1}+\frac{1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right)dt = (*) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]_0^{\xi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{\xi\to+\infty}\left[\arctan\left(\sqrt{2}\xi-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}\xi+1\right)-\arctan(-1)-\arctan(+1)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

pertanto $$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \qquad \boxtimes$$

(*) $$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+c$$

con $4q-p^2>0$.