

$$\frac{A_0 2}{12}$$

Umberto Ingrosso

Introduzione alla

MECCANICA QUANTISTICA



Copyright © MCMXCVII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 a/b
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-7999-167-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: agosto 1997

INDICE

Capitolo 1. INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTI-	
STICA	7
1.1. Prologo	7
1.2. Introduzione	7
1.3. Effetto fotoelettrico ed effetto Compton	10
1.4. Esperienze quantistiche	12
1.5. Meccanica ondulatoria: introduzione.	18
1.6. Particelle elementari e Meccanica ondulatoria	20
1.7. Equazione di Schroedinger	27
1.8. Lo spin	53
1.9. Particelle identiche	58
1.10. Rappresentazione di Heisenbergh e interazione	60
1.11. Diffusione (o scattering)	66
Capitolo 2. MECCANICA QUANTISTICA RELATIVISTICA .	83
2.1. Equazione di Klein-Gordon	83
2.2. Equazione di Dirac	88
2.3. Quantizzazione del campo elettromagnetico	101
2.4. Quantizzazione del campo mesonico	108
2.5. Quantizzazione del campo Fermionico	113

Capitolo 1 INTRODUZIONE ALLA MECCANICA QUANTISTICA

1.1 Prologo

La Meccanica quantistica è la branca della Fisica Teorica che più di ogni altra ha rivoluzionato il pensiero fisico ed il nostro stesso vivere quotidiano. Dalla bomba atomica al transistor, pochi sono gli aspetti della scienza e della tecnologia moderna che non ne siano in qualche modo influenzati. Eppure, come avremo modo di vedere, alcuni concetti che le appartengono e che sono di importanza non certo secondaria risultano fondamentalmente estranei alla nostra mente.

Valga per questo il commento del Premio Nobel Richard Feynman, scienziato che come pochi ha contribuito al suo sviluppo:

“ Si dice che la teoria della Relatività sia difficile da comprendere, e che pochi l’abbiano capita. Non so se sia vero, ma posso dire con certezza che nessuno ha mai veramente capito la Meccanica quantistica”.

Al lettore preoccupato raccomandiamo tuttavia di non scoraggiarsi, perché ciò che c’è di comprensibile in questa scienza (e non è poco) può essere espresso da un formalismo matematico ben conosciuto. Si cercherà di esporlo con chiarezza; questo è il compito che l’autore si è posto, e che spera di aver raggiunto.

1.2 Introduzione

Storicamente la teoria dei quanti, che non può ancora definirsi Meccanica quantistica, rappresentando solo la proposta di alcuni Fisici di introdurre criteri di quantizzazione nell’energia del campo elettromagnetico, nasce nel 1899. Suo fondatore può essere considerato il fisico tedesco Max Planck. Vediamo la sua prima formulazione. La radiazione del Corpo Nero (quel corpo che, per definizione, assorbe ed emette tutte le frequenze dello spettro elettromagnetico) presenta la curva che mostriamo in **FIGURA 1.1**:

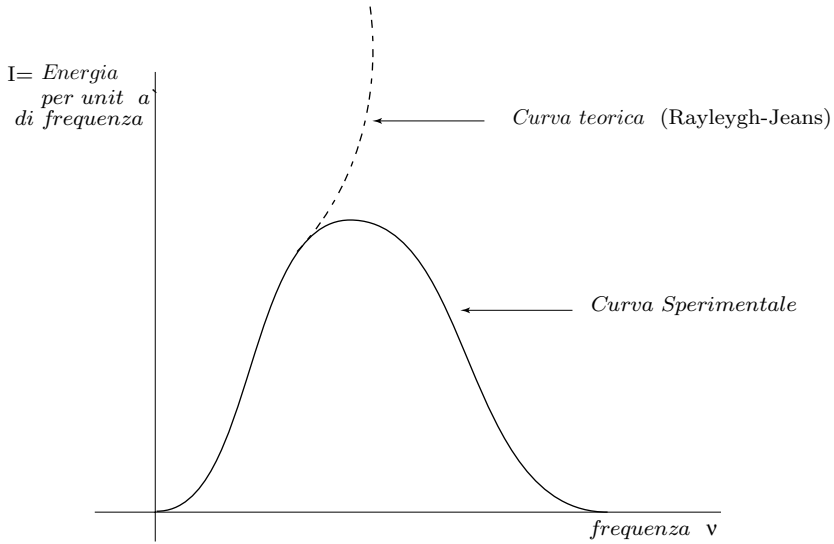


Figura 1.1.

I = energia per cm^3 e per unit  di frequenza
 ν = frequenza di emissione

La curva teorica nasce valutando come la radiazione del corpo nero sia costituita da un insieme di onde monocromatiche, rispondenti allo sviluppo in serie di Fourier. Lo spettro, pertanto,   formato dall'energia di un insieme di oscillatori virtuali, ognuno corrispondente ad una delle frequenze elementari che compongono lo spettro stesso. Successivamente, Planck teorizz  che la frequenza degli oscillatori non variasse con continuit , ma in modo discreto.

Se osserviamo la curva tratteggiata di Fig.1.1., questa mostra la previsione di un criterio classico: essa   espressa dall'equazione

$$(1.1) \quad I = \frac{2\pi}{c^2} kT\nu^2$$

con k = costante di Boltzmann e T = temperatura in gradi Kelvin. La curva non rispecchia i risultati sperimentali se non nella prima parte, quella di bassa frequenza, ed inoltre il suo integrale esteso a tutte le frequenze d  come

risultato: infinito. Considerando invece una frequenza degli oscillatori virtuali variante in modo discreto, secondo l'ipotesi di Planck, si ottiene la formula

$$(1.2) \quad I = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{h\nu/kT - 1}$$

dove

$$(1.3) \quad E = h\nu$$

è l'energia propria di ogni oscillatore e $h = 6,7 \cdot 10^{-27}$ erg·s è detta costante di Planck. L'ipotesi, matematicamente piuttosto semplice, ha conseguenze fisiche che allora non potevano definirsi altro che rivoluzionarie, e che divisero gli ambienti scientifici. Infatti, postulare che l'energia elettromagnetica sia quantizzata significa imporre il criterio secondo il quale l'energia stessa sia emessa in "pacchetti" (o "quanti", appunto) e trovarsi di fronte a contraddizioni assai difficili da risolvere. Principalmente, le seguenti:

- 1) se la radiazione esiste in quantità discrete, come spiegarne il comportamento nelle esperienze (interferenza, diffrazione) nelle quali mostra natura ondulatoria?
- 2) la formula postula che il quanto abbia energia proporzionale alla frequenza: ma che significato logico ha porre una frequenza, espressione di una manifestazione ondulatoria, in una equazione che invece esprime una manifestazione corpuscolare?

Le contraddizioni hanno aspetti filosofici che si spiegano (ma solo in parte) con la nostra incapacità di comprendere un mondo in cui, non possedendo altra conoscenza che quella dei fenomeni classici e nessun'altra esperienza estranea ad essi, non ci è possibile considerare realtà diverse, perché appartenenti ad un principio troppo astratto. Se le nostre dimensioni risultassero dell'unità di grandezza di quelle quantiche, certamente non comprenderemmo una realtà classica.

Successivamente, la teoria quantistica ottenne altri successi con l'elaborazione, da parte di Einstein, di una teoria dell'effetto fotoelettrico e, da parte del fisico americano Arthur H. Compton, di un'altra teoria corpuscolare che prese il suo nome. Vediamole brevemente.

1.3 Effetto fotoelettrico ed effetto Compton

Se si fa cadere una radiazione di frequenza sufficientemente elevata su di una superficie metallica, quest'ultima inizierà ad espellere elettroni. Questi hanno un'energia cinetica che è del tutto indipendente dall'intensità della radiazione incidente, risultando funzione solo della sua frequenza. Se postuliamo nuovamente che l'energia del campo elettromagnetico sia espressa dalla relazione $E = h\nu$, troviamo che varrà, se ipotizziamo un'interazione tra corpuscoli

$$(1.4) \quad E_c = h\nu - P_e$$

dove E_c = energia cinetica dell'elettrone e P_e = potenziale di estrazione. Ciò spiega perché l'intensità incidente non abbia alcuna relazione con E_c . Infatti una radiazione avente $h\nu < P_e$ evidentemente non riesce ad estrarre alcun elettrone, qualunque sia l'intensità. Questo riconferma la natura discreta dell'energia della radiazione stessa.

Il quanto di energia è definito *fotone*, e come può essere comprensibile si muove con velocità c , la velocità della luce. Si postula che la sua massa di riposo sia nulla, per non contraddire i principi relativistici.

Un ulteriore contributo ad una teoria quantistica venne da Arthur H. Compton, con lo scopo di interpretare l'effetto che da lui prese il nome. Se si fanno diffondere raggi x nella materia, si osserva la presenza nella radiazione diffusa di una frequenza inferiore a (ovvero di una lunghezza d'onda maggiore di) quella incidente. Ciò non è ammesso dalla teoria classica, secondo la quale tale radiazione deve presentare una frequenza identica a quella incidente perché gli elettroni contenuti dalla sostanza diffondente sono posti in oscillazione dal campo elettrico dell'onda elettromagnetica, riemettendo a loro volta secondo la medesima frequenza che li ha fatti oscillare.

Se però si considera l'interazione elettrone-fotone come un urto tra due particelle, può accadere che quest'ultimo ceda parte della sua energia all'altra, e ne esca con $E_f < E_i$ (f = finale; i = iniziale) ovvero con frequenza $\nu_f < \nu_i$. Se vogliamo esprimere la differenza in termini di lunghezza d'onda, secondo un criterio ondulatorio, e tenendo presente la relazione ben conosciuta dalla Fisica classica $\lambda\nu = c$, otterremo $\lambda_f > \lambda_i$.

Come il lettore può nuovamente notare, aspetto corpuscolare ed aspetto ondulatorio continuano ad essere sostanzialmente legati: siamo costretti a parlare di quanti di energia, senza però distaccarci da formule di tipo ondulatorio, quale quella che esprime la relazione tra frequenza e lunghezza d'onda.

Precisiamo ora l'aspetto matematico dell'effetto Compton su FIGURA 1.2:

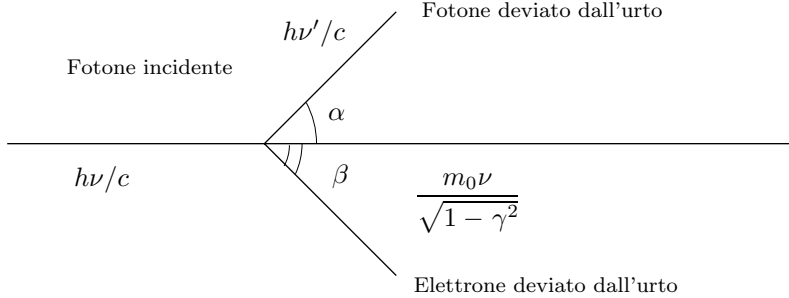


Figura 1.2.

Prima dell'urto, l'elettrone sarà immobile, per cui la sua quantità di moto risulterà nulla, mentre quella del fotone sarà $\frac{h\nu}{c}$. Dopo l'urto l'elettrone assumerà energia cinetica, mentre il fotone perderà parte della sua. L'equazione di conservazione sarà (se l'elettrone raggiungerà velocità relativistica)

$$(1.5) \quad h\nu = h\nu' + m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} - 1 \right) \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{v}{c}$$

Infatti l'elettrone immobile possiede esclusivamente la sua energia di massa ($m_0 c^2$). Dopo l'urto, se consideriamo che l'energia cinetica provoca un aumento della massa del corpuscolo, questa sarà aumentata a $m c^2$. Allora, detta E_c l'energia cinetica, otterremo

$$(1.6) \quad E_c = m c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} - 1 \right)$$

La conservazione della quantità di moto dà invece

$$(1.7) \quad \frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \alpha + \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cos \beta$$

Con una semplice formula trigonometrica si ottiene

$$(1.8) \quad \frac{m_0^2 v^2}{1-\gamma^2} = \frac{h^2 \nu^2}{c^2} + \frac{h^2 \nu_1^2}{c^2} - \frac{2h\nu}{c} \frac{h\nu'}{c} \cos \alpha$$

ed eliminando ν tra le due equazioni si otterrà $\nu - \nu' = \frac{h}{m_0c} \nu \nu' (1 - \cos \alpha)$ che espresso in lunghezza d'onda risulta

$$(1.9) \quad \lambda - \lambda' = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \alpha)$$

Il valore $\frac{h}{m_0c}$ risulta essere di $2,4 \cdot 10^{-10}$ cm e corrisponde esattamente alle misurazioni di laboratorio. Gli effetti che abbiamo considerato confermarono ulteriormente che la Meccanica classica era inadeguata ad esprimere il comportamento della radiazione. Ma ulteriori esperienze di laboratorio giunsero ad arricchire e, diremmo, a complicare il quadro che si andava delineando.

1.4 Esperienze quantistiche

In questo paragrafo descriveremo solo due delle esperienze alle quali ci si è riferiti nel paragrafo precedente, quelle che ci sembrano più significative.

Se analizziamo un fascio di luce polarizzato linearmente, questo, in termini quantistici, deve essere costituito da fotoni polarizzati in modo identico, e la medesima proprietà sarebbe comunque conservata per gli altri tipi di polarizzazione (circolare, ellittica etc...). Ora consideriamo un fascio di luce che attraversa un cristallo Polaroid, che è dotato della capacità di filtrare la radiazione, lasciando passare le componenti di polarizzazione lineare ortogonale all'asse ottico. Se poi la polarizzazione del fascio forma un angolo α con l'asse, ne passerà una proporzione proporzionale a $\sin \alpha$, e se la medesima sarà parallela non passerà nulla. Ma come interpretare questo fenomeno in termini di quanti di radiazione?

Ci accorgiamo che:

- 1) Se la polarizzazione dei fotoni è perpendicolare, passeranno tutti;
- 2) Se è parallela, non ne passerà alcuno;
- 3) Se l'angolo è compreso tra zero e 90 gradi, alcuni passeranno, mostrando polarizzazione perpendicolare (dopo aver attraversato il cristallo, ovviamente); altri non passeranno affatto. Anche in tal caso varrà la proporzione rispetto a $\sin \alpha$.

Il lettore consideri che è possibile far giungere sul cristallo anche un solo fotone per volta, utilizzando ad esempio la luce di una stella molto debole. La sequenza dei passaggi è allora del tutto casuale, e può interpretarsi come "sì", "sì", "no", "sì", "no", "no", etc... Perché un fotone passa ed un altro

no? Ebbene, non lo sappiamo. Non ne abbiamo la minima idea, e questo è ciò che intendevamo quando, citando Feynman, ricordavamo la sua frase, secondo la quale nessuno ha mai compreso la Meccanica quantistica. E quando dicevamo che il formalismo matematico è ben comprensibile, intendevamo dire che la sequenza casuale è trattabile in termini probabilistici, secondo tecniche matematiche ben conosciute: non sappiamo cosa faccia un fotone, ma sappiamo cosa facciano un miliardo di fotoni, poiché questi costituiscono un insieme che ha significato statistico.

Vediamo tuttavia di approfondire il concetto: un fotone polarizzato obliquamente può essere considerato parte nella polarizzazione parallela all'asse ottico, parte in quella perpendicolare. Quando il corpuscolo attraversa il cristallo, noi lo *costringiamo a scegliere*, ovvero lo sottoponiamo a quella che si definisce una *osservazione*. Il fotone che sceglie di essere perpendicolare passa, quello che sceglie di essere parallelo non passa. Quel che noi effettivamente non sappiamo è *perché* uno scelga di essere parallelo e l'altro di essere perpendicolare.

Ma illustriamo un altro esempio. Questa volta consideriamo un fascio di luce che entra in un interferometro. Secondo una interpretazione classica, diciamo che il fascio viene fatto dividere in due parti, che poi vengono fatte incontrare dando luogo alla figura di interferenza. Ma in teoria quantistica il fascio è costituito da uno sciame di fotoni e, se ricorriamo alla solita tecnica di far entrare un fotone per volta, otterremo che alcuni corpuscoli prendano una direzione che potremmo definire "su", ed altri una direzione "giù", se l'interferometro divide il fascio verticalmente (altrimenti sarà "destra" e "sinistra"). La sequenza sarà altrettanto casuale di quella di "sì" e "no" che abbiamo incontrato nell'esperimento precedente. E sarà altrettanto vero che un insieme di quanti sufficientemente grande sarà considerabile con criteri di tipo statistico. Ma soprattutto, potremo nuovamente considerare ciascuna delle particelle che stanno per entrare nell'interferometro nella somma di due stati, ovvero parte nello stato "su", e parte nello stato "giù", per poi sottoporle ad osservazione.

Una conclusione parziale che possiamo trarre è che la radiazione ha un comportamento non del tutto sorprendente. Se la materia non è suddivisibile all'infinito, e non lo è nemmeno l'energia (secondo un concetto per altro già presente in alcune scuole filosofiche dell'antica Grecia), allora sarà ovvia l'esistenza di un limite inferiore nelle manifestazioni che abbiamo considerato, e che sotto questo limite non sarà possibile andare. Dunque è abbastanza ovvio che negli esperimenti che abbiamo descritto non si incontri mai una frazione di fotone, ma che quest'ultimo si presenti interamente in uno stato o nell'altro

(“su” o “giù” nell’esperienza con il diffrattometro, “sì” o “no” in quello col Polaroid).

Ci siamo resi conto in questo modo che, ogni volta che effettuiamo un’osservazione su un fotone, accade qualcosa che in Fisica classica è incomprensibile, e cioè che la nostra azione interferirà col medesimo, cambiandone lo stato. Ora, se osserviamo una palla che rotola o un treno che passa, noi interagiamo con questi oggetti senza interferire sui medesimi e senza cambiarne le caratteristiche, o quelle delle loro equazioni del moto. Ma possiamo esprimere il medesimo concetto, anche soltanto in sede teorica, considerando che il corpuscolo è costituito dalla minima quantità discreta di energia, e che per osservarlo dobbiamo interagire proprio energicamente con esso, così come interagiamo con la palla e col treno? Ovviamente la risposta è negativa. La nostra osservazione “disturberà” il corpuscolo, equivalendo in qualche modo a quelle prove distruttive che si effettuano in tecnologia delle macchine, senza le quali peraltro non è possibile conoscere le caratteristiche dell’oggetto che stiamo analizzando. Dovremo allora concludere che, prima della nostra osservazione, il quanto era qualcos’altro rispetto a ciò che abbiamo trovato, mentre non erano qualcos’altro il treno e la palla. Che cos’era dunque? Come abbiamo visto, non è possibile rispondere secondo criteri classici.

Abbiamo considerato, nell’esperienza col Polaroid, che il quanto era costituito da un insieme di due polarizzazioni, quella verticale e quella orizzontale, e che prima dell’interferometro era invece un’insieme di stato “su” e di stato “giù”. Concludiamo allora che, prima di essere osservato, il corpuscolo è solo un’insieme di probabilità: è la nostra operazione che crea il risultato, costringendo la particella a “scegliere”, come abbiamo visto. Diremo quindi che l’osservazione fa precipitare lo stato del corpuscolo in uno dei valori possibili della misura. Questa valutazione verrà successivamente approfondita quando specificheremo quali valori associati al quanto sono oggetto della misura stessa. Il lettore può immaginare come questi risultati abbiano gettato il mondo dei fisici in grande scompiglio. In particolare, essi trassero le seguenti conclusioni:

- 1) Se non è possibile conoscere il corpuscolo prima di averlo osservato, ciò significa che noi non possiamo stabilire quella che potrebbe definirsi la sua essenza fisica, e questo creava una situazione mai prima conosciuta, ed indefinibile in termini di filosofia scientifica.
- 2) È del tutto incredibile che il comportamento del corpuscolo, per quanto prevedibile al momento dell’osservazione in termini statistici e su grandi numeri, sia del tutto imprevedibile singolarmente.