

A02

IO

Joseph Quartieri
Stefano Steri
**Elementi di Probabilità e Statistica
con applicazioni ai fenomeni naturali**

Volume I



Copyright © MMXI
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-7999-145-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 1996

Prefazione

Questi elementi sono stati redatti per l'utilizzo da parte degli studenti del primo anno che seguono un corso di elementi di analisi matematica, base di ogni discorso preciso e rigoroso; ma anche sono pensati compagni di percorso per chi, studente di scienze naturali o biomediche, oggi non può ignorare gli elementi di matematica dell'incertezza. Si articolano in due volumi, proprio per soddisfare questo intento. Sono frutto di lunga esperienza didattica degli autori, l'uno fisico, l'altro matematico.

Legenda dei simboli non matematici:

“♣soft”: indica una dimostrazione “soft” da non trascurare;

“♠hard”: indica che la dimostrazione è “hard”; in prima lettura può essere trascurata, comunque non il concetto o il risultato;

“♦richiamo”: indica un richiamo di *analisi matematica* da rinverdire;

“♥complementi”: indica un complemento, una dimostrazione comunque non essenziale, oppure che essendo particolarmente “hard” è per i più studiosi.

T.S.G. indica il 2° v. delle Tavole Scientifiche Geigy.

Joseph Quartieri e Stefano Steri

Napoli ottobre 1996

INDICE

II CAPITOLO I

- 1.1 - Necessita' dello schema stocastico. Eventi e loro rappresentazioni
- 1.2 - Complementi: algebra di Boole
- 1.3 - Misura della realizzabilita' o probabilita' degli eventi elementari- Spazio equiprobabile
- 1.4 - Assiomi di probabilita'
- 1.5 - Disuguaglianza di Boole
- 1.6 - Esercizi sugli spazi equiprobabili
- 1.7 - Probabilita' condizionata
- 1.8 - Teorema di moltiplicazione
- 1.9 - Indipendenza stocastica
- 1.9.1-Indipendenza di più eventi
- 1.10 - Probabilita' totale
- 1.11- Teorema di Bayes
- 1.12- Probabilità nello spazio prodotto
- 1.13-Counting the ways
- 1.14- Esercizi di riepilogo

75 CAPITOLO II

- 2.1 - Esempi introduttivi
- 2.2 - Variabile aleatoria (v.a.), distribuzione di probabilita'
- 2.3 - Funzione di ripartizione
- 2.4 - Distribuzione binomiale o di Bernoulli
- 2.5 - Esercizi sulla distribuzione binomiale
- 2.6 - Media o speranza matematica o momento di ordine uno di una v.a.
- 2.7 - Studio della distribuzione di Bernoulli
- 2.8 - Distribuzione di Poisson
- 2.9 - Varianza e concetto di variabile standardizzata o ridotta

- 2.10 - Calcolo della varianza per la variabile di Bernoulli e per quella di Poisson

I17 CAPITOLO III

- 3.1 - Teoremi locale ed integrale di de Moivre-Laplace e distribuzione normale
- 3.2 - Legge debole dei grandi numeri dal teorema integrale di de Moivre-Laplace
- 3.3 - Caratteristiche salienti della curva di Gauss
- 3.4 - Modo alternativo di introdurre la variabile normale ed in generale una v.a. continua
- 3.5 - Media e varianza di una v.a. continua.
- 3.6- Integrali di interesse probabilistico :3.6.1- Integrale di Gauss ;
3.6.2 - La funzione gamma ;
- 3.6.3 - La funzione beta e suo legame con la funzione gamma.

I47 CAPITOLO IV

- 4.1 - Disuguaglianza di Chebishev
- 4.2 - Regola del 3-sigma
- 4.3 - Significato di media e di varianza dal confronto di due distribuzioni normali con la stessa media ma con diversa varianza.
- 4.4 - Funzione generatrice dei momenti
- 4.5 - Teorema di unicità della funzione della ripartizione (enunciato) e corollario : unicità della distribuzione.
- 4.6 - Una applicazione del teorema di unicità
- 4.7 - Convergenza della ridotta di Poisson alla normale

I63 CAPITOLO V

- 5.1 - Distribuzione gamma
- 5.2 - Convergenza della distribuzione gamma alla normale
- 5.3 - La variabile chi-quadrato
- 5.4 - Legame della distribuzione chi-quadrato con la normale
- 5.5 - Complementi: trasformazione di una v.a. continua
- 5.6 - La variabile t di Student

- 5.7 - Tendenza asintotica della t di Student alla normale
- 5.8 - Calcolo della media e della varianza per la t di Student
- 5.9 - Distributivita' dell'operatore speranza E
- 5.10 - Speranza del prodotto di vv. aa. Indipendenti.
- 5.11 - Varianza della somma di vv. aa.
- 5.12 - Legge debole dei grandi numeri (teorema di Bernoulli).
- 5.13 - Alcuni risultati notevoli sulla somma di vv. aa. dello stesso tipo.
- 5.14 - Teorema del limite centrale di Lyapunov.
- 5.15 - Applicazioni.
- 5.16- Esercizi sulla distribuzione normale.
- 5.17- Esercizi sulla distribuzione t di Student.
- 5.18- Esercizi sulla distribuzione chi-quadrato.

195 APPENDICE

- Distribuzione ipergeometrica.
- Comportamento asintotico : tendenza della ipergeometrica alla bernoulliana
- Calcolo della media e della varianza per l'ipergeometrica.
- Dimostrazione del teorema di de Moivre- Laplace.
- Media e varianza della distribuzione normale.

- 1.1 - **Necessità dello schema stocastico, eventi e loro rappresentazione** (per la comprensione sono necessari richiami di teoria degli insiemi).

Una pallina è lasciata cadere sul pavimento, diviso in settori; sappiamo prevedere in quale settore si fermerà? Evidentemente no. Diciamo che essa si ferma **a caso**. Se tuttavia potessimo valutare tutte le cause che concorrono al risultato: peso della biglia, altezza di caduta, elasticità del materiale della pallina e del pavimento, resistenza dell'aria, attrito,..., potremmo predire l'esito, che invece è incerto, **aleatorio**.

Siamo in condizioni di incertezza per carenza di informazioni, il nostro non è lo **schema** di conoscenza **deterministico**, cioè sapere che da certe cause consegue univoco un risultato, ma lo **stocastico**, cioè che più risultati sono possibili e, nella previsione di quanto accadrà, occorrerà valutare il diverso **grado di realizzabilità o probabilità** delle risposte, che nell'esempio, sono i settori del pavimento in cui dopo il rimbalzo e il rotolamento la pallina può fermarsi. Quando in base all'esperienza, gli esiti si possono tutti ritenere ugualmente realizzabili, si tratterà di risposte **equiprobabili**; ma allorché sembra ragionevole privilegiare un settore, daremo a quel risultato una **misura** più grande di realizzabilità o probabilità. Mettersi nello schema stocastico significa rinunciare, per semplicità, all'analisi

dettagliata delle cause, che possono essere molte, non tutte note o a incidenza non ben valutabile, e introdurre la misura della probabilità delle espressioni, risposte, **esiti** del fenomeno studiato. Per far questo è necessaria una teoria, chiamata ***calcolo delle probabilità***, di cui desideriamo acquisire gli elementi.

Fenomeno aleatorio:

è ciò che accade, si manifesta con più **risultati o uscite, o esiti**.

Esperimento

E' il complesso, l'insieme di tutte le cause non tutte note o, quand'anche note, non ben valutabili nella loro incidenza che, se messe in atto dallo sperimentatore ad es. in laboratorio, o agenti spontaneamente in natura, producono l'effetto (risposta, esito, uscita).

Prova

è la realizzazione (messa in atto delle cause) di un esperimento e conduce a un solo esito.

Evento elementare

Supponiamo di lanciare un dado. Posso prima della prova, dire: uscirà il 3, cioè enunciare come possibile un risultato; oppure a prova avvenuta, constatare il risultato ed enunciare l'accaduto: è uscito il 4. Enuncio, cioè riesprimo a

posteriori, o predico un risultato e la proposizione “semplice” che lo esprime a parole è un evento elementare.

Introdotta lo spazio campionario, che è l'insieme di tutti i simboli che contraddistinguono le uscite (per es. nel lancio di un solo dado si tratta dei numeri dell'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$), un evento elementare sarà rappresentato da un sottoinsieme di un sol elemento; è uscito il 5 si rappresenta con $\{5\} \subset \Omega$, ovvero $\{5\} \in \wp(\Omega)$, insieme delle parti di Ω . Cioè è cosa ben diversa ad esempio 5 da $\{5\}$, il primo è uno degli elementi di Ω , cioè uno dei numeri di punti impressi sulle facce del dado, l'altro, che rappresenta la lettura di cinque punti sulla faccia superiore del dado allorché questo, lanciato, si è fermato, è un elemento di $\wp(\Omega)$, insieme dei sottoinsiemi dello spazio campionario.

Evento non elementare

è una frase “composta” di più frasi semplici che enuncia l'accaduto o lo predice; così nel lancio di un dado posso dire - è uscito il pari - cioè è uscito il 2 o il 4 o il 6, cioè l'uscita del 2 lo verifica così come altre uscite, del 4 o del 6; cioè l'evento non consiste di una sola uscita pari perché questa non esaurisce le sue possibilità di verifica, ma di più risultati con la stessa proprietà, numeri divisibili per due,

all'uscita di uno di essi l'evento si realizza. Lo si rappresenta con un sottoinsieme di più punti: $\{2,4,6\} \subset \Omega$.

In definitiva alle realizzazioni, alle prove di un esperimento è associato un insieme di frasi, un discorso, che spiega a parole ciò che accade o può accadere nell'attuazione del fenomeno, e i suoi elementi sono rappresentati con gli elementi unitari o no di $\wp(\Omega)$, insieme delle parti di Ω .

Allora agli eventi si potranno applicare due linguaggi equivalenti:

linguaggio logico della definizione	linguaggio insiemistico della rappresentazione
eventi sono frasi che esprimono quanto accade nelle prove; frasi "semplici" o "composte": uscirà o è uscito il 2; è uscito o uscirà un numero dispari; è uscito un numero pari e primo.	eventi sono i sottoinsiemi di Ω , spazio campionario, cioè sono gli elementi di $\wp(\Omega)$, sottoinsiemi unitari oppure non unitari, cioè con uno solo o più di un elemento di Ω .

L'evento non elementare $\{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ si realizza con una qualunque delle sue uscite o eventi elementari componenti.

L'evento $\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$ è detto certo perché si realizza ad ogni prova.

L'evento \emptyset rappresentato dal sottoinsieme vuoto, che è privo di elementi, non può realizzarsi ed è detto impossibile e si considera non elementare.

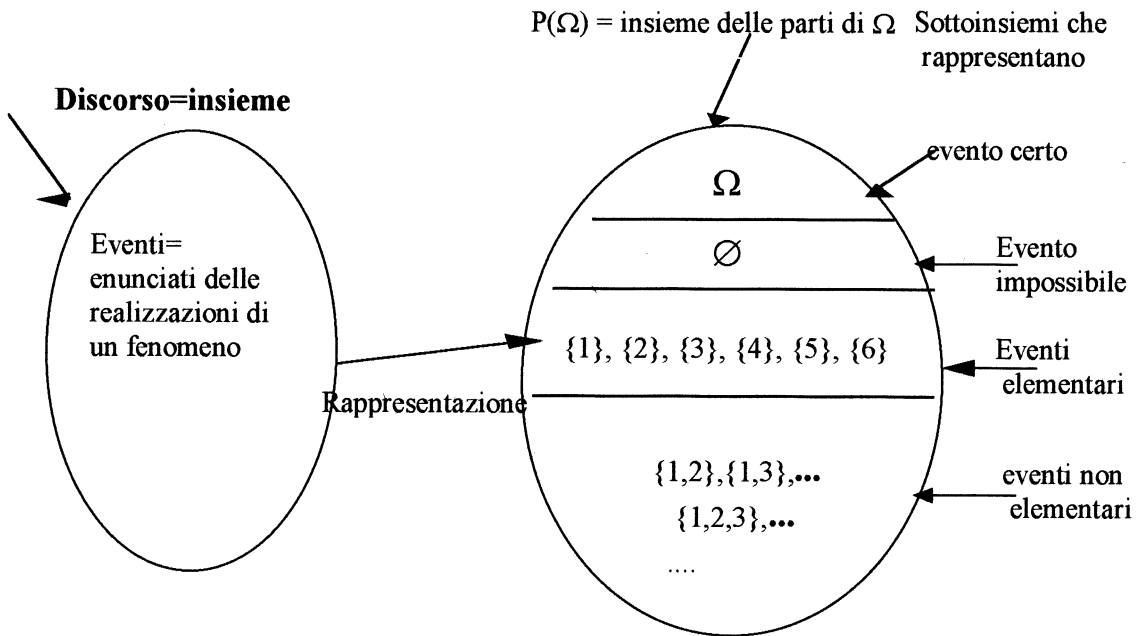


Fig 1.

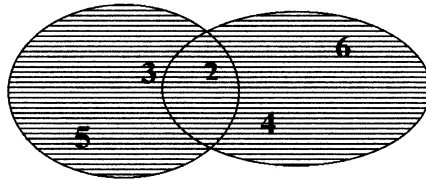
Quale è l'evento rappresentato dal sottoinsieme $A \cup B$, $A, B \subseteq \Omega$?

$A = \{2, 4, 6\}$, evento uscita pari;

$B = \{2, 3, 5\}$, evento uscita di un numero primo;

$A \cup B$ = sottoinsieme degli elementi appartenenti ad almeno uno dei dati sottoinsiemi = $\{2, 4, 6, 3, 5\}$, rappresenta l'uscita di un numero o pari o primo o anche pari e primo.

Il diagramma di Venn che rappresenta l'evento: A oppure B è:



Qual'è l'evento $A \cap B$?

È, nell'esempio precedente, l'uscita $\{2\}$ cioè un evento elementare (sottoinsieme unitario); $A \cap B$ rappresenta infatti l'uscita del numero che appartiene e ad A e a B, cioè pari e primo simultaneamente: il numero 2.

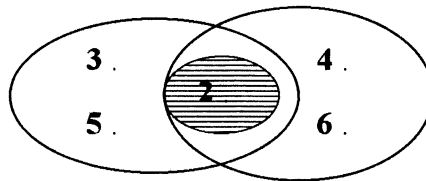


Fig. 3