A02

IO

Joseph Quartieri
Stefano Steri

Elementi di Probabilità e Statistica con applicazioni ai fenomeni naturali

Volume I

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–7999–145–2

I edizione: dicembre 1996

Prefazione

Questi elementi sono stati redatti per l'utilizzo da parte degli studenti del primo anno che seguono un corso di elementi di analisi matematica, base di ogni discorso preciso e rigoroso; ma anche sono pensati compagni di percorso per chi, studente di scienze naturali o biomediche, oggi non può ignorare gli elementi di matematica dell'incertezza. Si articolano in due volumi, proprio per soddisfare questo intento. Sono frutto di lunga esperienza didattica degli autori, l'uno fisico, l'altro matematico.

Legenda dei simboli non matematici:

"♣soft": indica una dimostrazione "soft" da non trascurare;

"♠hard": indica che la dimostrazione è "hard"; in prima lettura può essere trascurata, comunque non il concetto o il risultato;

"♦richiamo": indica un richiamo di *analisi matematica* da rinverdire;

"♥complementi": indica un complemento, una dimostrazione comunque non essenziale, oppure che essendo particolarmente "hard" è per i più studiosi.

T.S.G. indica il 2° v. delle Tavole Scientifiche Geigy.

Joseph Quartieri e Stefano Steri Napoli ottobre 1996

INDICE

Capitolo

1

- **1.1 - Necessità dello schema stocastico, eventi e loro rappresentazione** (per la comprensione sono necessari richiami di teoria degli insiemi).

Una pallina è lasciata cadere sul pavimento, diviso in settori; sappiamo prevedere in quale settore si fermerà? Evidentemente no. Diciamo che essa si ferma **a caso**. Se tuttavia potessimo valutare tutte le cause che concorrono al risultato: peso della biglia, altezza di caduta, elasticità del materiale della pallina e del pavimento, resistenza dell'aria, attrito,..., potremmo predire l'esito, che invece è incerto, **aleatorio** .

Siamo in condizioni di incertezza per carenza di informazioni, il nostro non è lo **schema** di conoscenza **deterministico**, cioè sapere che da certe cause consegue univoco un risultato, ma lo **stocastico**, cioè che più risultati sono possibili e, nella previsione di quanto accadrà, occorrerà valutare il diverso **grado di realizzabilità o probabilità** delle risposte, che nell'esempio, sono i settori del pavimento in cui dopo il rimbalzo e il rotolamento la pallina può fermarsi. Quando in base all'esperienza, gli esiti si possono tutti ritenere ugualmente realizzabili, si tratterà di risposte **equiprobabili**; ma allorché sembra ragionevole privilegiare un settore, daremo a quel risultato una **misura** più grande di realizzabilità o probabilità. Mettersi nello schema stocastico significa rinunciare, per semplicità, all'analisi dettagliata delle cause, che possono essere molte, non tutte note o a incidenza non ben valutabile, e introdurre la misura della probabilità delle espressioni, risposte, **esiti** del fenomeno studiato. Per far questo è necessaria una teoria, chiamata ***calcolo delle probabilità***, di cui desideriamo acquisire gli elementi.

Fenomeno aleatorio:

è ciò che accade, si manifesta con più risultati o uscite, o esiti.

Esperimento

E' il complesso, l'insieme di tutte le cause non tutte note o, quand'anche note, non ben valutabili nella loro incidenza che, se messe in atto dallo sperimentatore ad es. in laboratorio, o agenti spontaneamente in natura, producono l'effetto (risposta, esito, uscita).

Prova

è la realizzazione (messa in atto delle cause) di un esperimento e conduce a un solo esito.

Evento elementare

Supponiamo di lanciare un dado. Posso prima della prova, dire: uscirà il 3, cioè enunciare come possibile un risultato; oppure a prova avvenuta, constatare il risultato ed enunciare l'accaduto: è uscito il 4. Enuncio, cioè riesprimo a posteriori, o predico un risultato e la proposizione "semplice" che lo esprime a parole è un evento elementare.

Introdotto lo **<u>spazio campionario</u>**, che è l'insieme di tutti i <u>simboli che contraddistinguono</u> <u>le uscite</u> (per es. nel lancio di un solo dado si tratta dei numeri dell'insieme $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$),un evento elementare sarà rappresentato da un sottoinsieme di un sol elemento; è uscito il 5 si rappresenta con $\{5\} \subset \Omega$, ovvero $\{5\} \in \wp(\Omega)$, insieme delle parti di Ω. Cioè è cosa ben diversa ad esempio 5 da $\{5\}$, il primo è uno degli elementi di Ω, cioè uno dei numeri di punti impressi sulle facce del dado, l'altro, che rappresenta la lettura di cinque punti sulla faccia superiore del dado allorché questo , lanciato, si è fermato, è un elemento di $\wp(\Omega)$, insieme dei sottoinsiemi dello spazio campionario.

<u>Evento non elementare</u>

è una frase "composta" di più frasi semplici che enuncia l'accaduto o lo predice; così nel lancio di un dado posso dire - è uscito il pari - cioè è uscito il 2 o il 4 o il 6, cioè l'uscita del 2 lo verifica così come altre uscite, del 4 o del 6; cioè l'evento non consiste di una sola uscita pari perché questa non esaurisce le sue possibilità di verifica, ma di più risultati con la stessa proprietà, numeri divisibili per due, all'uscita di uno di essi l'evento si realizza. Lo si rappresenta con un sottoinsieme di più punti: $\{2,4,6\} \subset \Omega$.

In definitiva alle realizzazioni, alle prove di un esperimento è associato un insieme di frasi, un discorso, che spiega a parole ciò che accade o può accadere nell'attuazione del fenomeno, e i suoi elementi sono rappresentati con gli elementi unitari o no di $\wp(\Omega)$, insieme delle parti di Ω.

Allora agli eventi si potranno applicare due linguaggi equivalenti:

linguaggio logico della definizione	linguaggio insiemistico della rappresentazione
eventi sono frasi che esprimono quanto accade nelle prove; frasi "semplici" o "composte": uscirà o è uscito il 2; è uscito o uscirà un numero dispari; è uscito un numero pari e primo.	eventi sono i sottoinsiemi di Ω, spazio campionario, cioè sono gli elementi di $\wp(\Omega)$, sottoinsiemi unitari oppure non unitari, cioè con uno solo o più di un elemento di Ω.

L'evento non elementare $\{2,4,6\}=\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}$ si realizza con una qualunque delle sue uscite o <u>eventi elementari componenti</u>.

L'evento $\Omega = \{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}\cup\{6\}$ è detto <u>certo</u> perché si realizza ad ogni prova.

L'evento $\varnothing$ rappresentato dal sottoinsieme vuoto, che è privo di elementi, non può realizzarsi ed è detto <u>impossibile</u> e si considera non elementare.

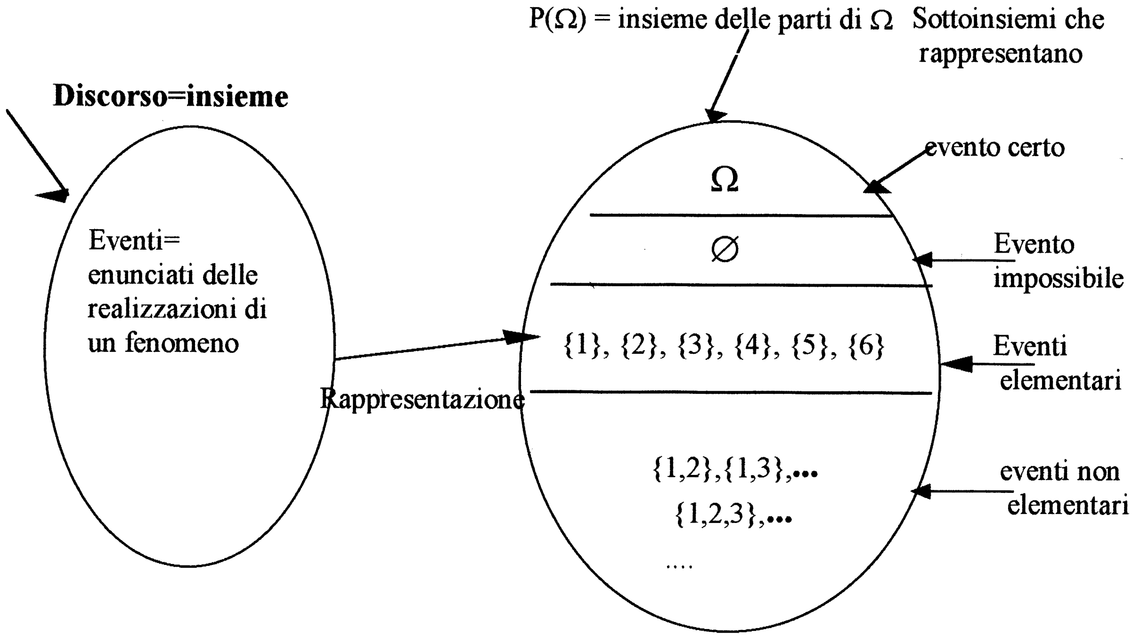


Fig 1.

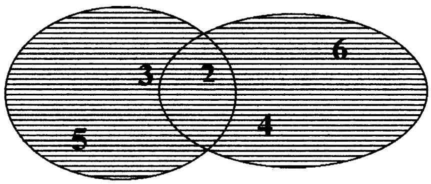
Quale è l'evento rappresentato dal sottoinsieme $A \cup B$, A, B $\subseteq \Omega$?

$A=\{2,4,6\}$, evento uscita pari;

$B=\{2,3,5\}$, evento uscita di un numero primo;

$A \cup B$ = sottoinsieme degli elementi appartenenti ad almeno uno dei dati sottoinsiemi = $\{2,4,6,3,5\}$, rappresenta l'uscita di un numero o pari o primo o anche pari e primo.

Il diagramma di Venn che rappresenta l'evento: A oppure B è:



Qual'è l'evento $A \cap B$?

E', nell'esempio precedente, l'uscita $\{2\}$ cioè un evento elementare (sottoinsieme unitario); $A \cap B$ rappresenta infatti l'uscita del numero che appartiene e ad A e a B, cioè pari e primo simultaneamente: il numero 2.

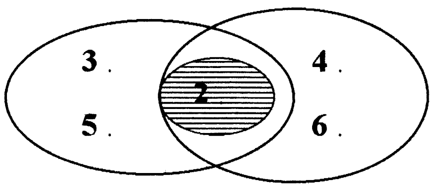


Fig. 3