A mia madre

Nicola Melone

Professore Ordinario di Geometria
nella Seconda Università di Napoli

Introduzione ai metodi dell'algebra lineare

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-7999-144-2

I edizione: ottobre 1996

INDICE

CAPITOLO III

SPAZI VETTORIALI E APPLICAZIONI LINEARI

CAPITOLO IV

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

CAPITOLO V

FORME BILINEARI E HERMITIANE, FORME QUADRATICHE

Introduzione

Queste *"dispense"* derivano dai corsi di Algebra lineare e Geometria tenuti presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e presso la Seconda Università di Napoli.

La forma espositiva rispecchia la mia *"deologia didattica"* che si riassume nel motto: *"cercare di non rendere astruse le cose lineari e difficili quelle semplici"*

A tale scopo ho preferito premettere alla trattazione assiomatica degli spazi vettoriali l'algebra lineare dei vettori numerici, delle matrici e dei sistemi di equazioni lineari, soffermandomi in particolare sull'algoritmo di riduzione a gradini come strumento per invertire una matrice quadrata, per determinare il rango di una matrice e per risolvere un sistema di equazioni lineari. Tale scelta è motivata dall'esigenza di partire da modelli *"concreti"* e semplici e di introdurre subito alcuni metodi molto utili in generale.

Gli elementi di geometria analitica sono sviluppati utilizzando l'algebra lineare, anticipando così in modo elementare la moderna impostazione assiomatica della geometria affine e euclidea.

Il testo è (o almeno spero che sia) assolutamente dalla parte dello studente, nel senso che gli enunciati sono dati in maniera più esplicita (anche se meno elegante) e sono corredati da esempi che ne illustrino il significato e consentano al lettore di valutarne immediatamente la comprensione.

Spero pertanto che *"il navigar sia dolce in questo mare"*.

CAPITOLO I

Insiemi, applicazioni e strutture algebriche

1. Insiemi, operazioni tra insiemi e relazioni di equivalenza

In questo paragrafo e nel successivo saranno introdotte in modo *"ingenuo"* le principali nozioni di teoria degli insiemi, linguaggio alla base di tutte le teorie matematiche. Il punto di vista "ingenuo" consiste essenzialmente nel preferire al rigore logico dell'impostazione assiomatica un approccio più intuitivo. Avvertiamo esplicitamente però che tale impostazione, se da un lato ha l'innegabile vantaggio didattico di essere più vicino all'esperienza quotidiana, dall'altro lato fa sorgere alcune contraddizioni logiche (le cosiddette antinomie) che possono essere eliminate soltanto con un'impostazione assiomatica.

Secondo il punto di vista ingenuo converremo di chiamare ***insieme*** una qualsiasi raccolta (o collezione, raggruppamento) di oggetti. Gli oggetti che stanno in un insieme S si diranno anche gli ***elementi*** di S e si scriverà $x \in S$ per indicare che x è un elemento di S (si legge anche x appartiene ad S). Il simbolo $y \notin S$ indicherà invece che y non è un elemento di S.

Per assegnare un insieme occorre descrivere i suoi elementi e ciò si fa elencandoli (quando è possibile) oppure fissando una proprietà (o una regola) che li determini senza ambiguità. Per denotare l'insieme avente come elementi gli oggetti a,b,c,1,0 si usa il simbolo

$$\{a,b,c,1,0\}.$$

Per indicare invece che S è l'insieme avente come elementi tutti e soli gli oggetti che verificano una assegnata proprietà $\mathfrak{a}$ si usa il simbolo

$$S=\{x \mid \mathfrak{a}\}.$$

Converremo che una proprietà falsa per ogni oggetto (ad esempio la proprietà $x \neq x$) determini un insieme privo di elementi, che si dice ***insieme vuoto*** e si denota con il simbolo $\emptyset$.

Esempi (1.1). (i) I simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, l'insieme costituito dallo zero e dai numeri naturali, l'insieme dei numeri interi (relativi), l'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri reali.

(ii) I polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ costituiscono altrettanti insiemi che si denotano rispettivamente con i simboli $\mathbb{N}[x]$, $\mathbb{N}_0[x]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$. Si ha ad esempio:

$$x, 5, x^3+4x+7 \in \mathbb{N}[x],\ x-1, -3 \notin \mathbb{N}[x]$$

$$x-1, x^4-2x^3+5, x, -7 \in \mathbb{Z}[x],\ \frac{3}{4}x^3 - 5x^2 + 2 \notin \mathbb{Z}[x]$$

$$\frac{3}{4}x^3 - 5x^2 + 2, 3x-5 \in \mathbb{Q}[x],\ ex^3-\pi x^2+\sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}[x]$$

$$5, x^3+4x+7, \frac{2}{\sqrt[5]{7}}, ex^3-\pi x^2+\sqrt[3]{5}, (\log_3 5)x^3 - \frac{\sqrt[5]{3}}{5}x + 2 \in \mathbb{R}[x].$$

(iii) Un piano π può essere riguardato come insieme dei suoi punti. Riferendoci alla figura 1 si ha ad esempio $A, B, C \in \pi$ e $D \notin \pi$.

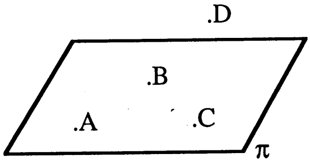

fig.1

(iv) Le rette di un piano π costituiscono un insieme che denoteremo col simbolo $\mathcal{L}_\pi$. Le rette di π passanti per un fissato punto O costituiscono un insieme che denoteremo con $F(\pi,O)$ e che si chiama *fascio* di rette di π di *centro* il punto O. Riferendoci alla figura 2 si ha ad esempio $r, s, t \in \mathcal{L}_\pi$ e $u \notin \mathcal{L}_\pi$, $r', s' \in F(\pi', O)$ e $t' \notin F(\pi', O)$.

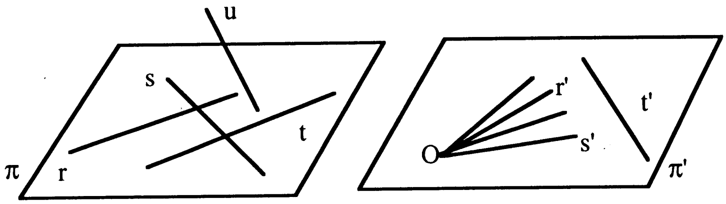

fig.2

(v) Ogni retta r, ogni segmento AB, ogni circonferenza Γ, ogni cerchio $\mathcal{C}$, ogni poligonale $\mathcal{P}$ e, più in generale, ogni "figura" di punti di un piano π possono essere considerati come insieme dei loro punti. Riferendoci alla figura 3 si ha ad esempio $C \in AB$, $P \in r$, $D \in \Gamma$, $E \notin \Gamma$, $F \in \mathcal{P}$ e $G \notin \mathcal{P}$.

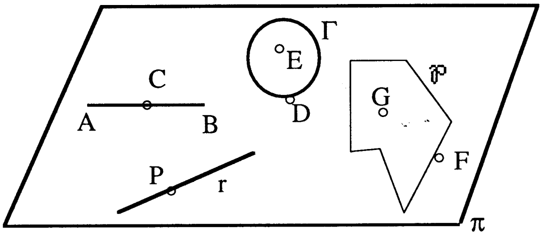

fig.3

(vi) Le circonferenze di un piano π costituiscono gli elementi di un insieme S. Riferendosi alla figura 4 si ha ad esempio a,b∈ S, c,d,e∉ S.

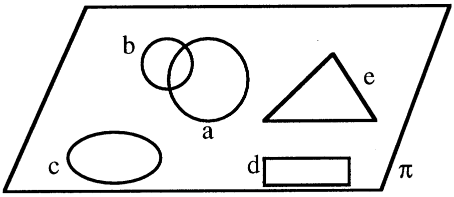

fig.4

.♦

Si dice che un insieme X *è* ***sottoinsieme*** *(o parte) di un insieme* S *(o anche che X è contenuto o incluso in* S*) e si scrive* X⊆S *(o anche* S⊇X*) se X è vuoto appure ogni elemento di* X *è anche elemento di* S. Ovviamente per ogni insieme S hanno senso le scritture S⊆S e ∅⊆S.

La totalità dei sottoinsiemi di un insieme S costituisce un insieme, che si chiama ***insieme delle parti*** di S e si denota con $\mathfrak{P}$(S). Risulta ∅,S∈ $\mathfrak{P}$(S).

Un sottoinsieme X di un insieme S che non coincida con S si dice ***sottoinsieme proprio*** di S. In tal caso si dice anche che X è *contenuto (o incluso) propriamente* in S. Per indicare che X è incluso propriamente in S si usa il simbolo X⊂S (o anche S⊃X). Ovviamente un insieme S non è sottoinsieme proprio di se stesso, ovvero non si può scrivere S⊂S.

Due insiemi S *e* T *si dicono* ***uguali****, e si scrive* S=T, *se* S⊆T *e* T⊆S, *ovvero se ogni elemento di ciascuno dei due è anche elemento dell'altro.*

Due insiemi non uguali si dicono ***diversi***. Si ha allora che due insiemi S e T sono diversi, e si scrive S≠T, se, e soltanto se, almeno uno dei due non è contenuto nell'altro, ovvero esiste almeno un elemento in uno dei due insiemi che non appartiene all'altro.