

*A mia madre*

Nicola Melone

Professore Ordinario di Geometria  
nella Seconda Università di Napoli

*Introduzione ai  
metodi  
dell'algebra lineare*



Copyright © MCMXCVI  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133/A-B  
00173 Roma  
(06) 93781065

**ISBN 88-7999-144-2**

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

**I edizione: ottobre 1996**

# INDICE

## *Introduzione*

### CAPITOLO I

#### INSIEMI, APPLICAZIONI E STRUTTURE ALGEBRICHE

1	Insiemi, operazioni tra insiemi e relazioni d'equivalenza	1
2	Applicazioni tra insiemi, permutazioni e matrici	16
3	Generalità su gruppi, anelli e campi	31
4	Principio di induzione	45
5	Il campo dei numeri complessi	50
6	Polinomi su un campo	58
7	Vettori numerici su un campo e operazioni tra vettori numerici	67

### CAPITOLO II

#### MATRICI, RANGO E DETERMINANTI

8	Matrici su un campo e operazioni tra matrici	74
9	Matrici elementari e algoritmo di riduzione a gradini	85
10	L'anello delle matrici quadrate su un campo, matrici invertibili e algoritmo per invertire una matrice	90
11	Sistemi di equazioni lineari su un campo e algoritmo di Gauss-Jordan	96
12	Determinante di una matrice quadrata, proprietà elementari e teoremi di Laplace e Binet	103
13	Invertibilità di una matrice quadrata e calcolo dell'inversa con l'uso dei determinanti	124
14	Rango di una matrice su un campo e calcolo del rango col metodo di riduzione a gradini e col metodo degli orlati	128

### CAPITOLO III

#### SPAZI VETTORIALI E APPLICAZIONI LINEARI

15	Definizione di spazio vettoriale e proprietà elementari	144
16	Sottospazi vettoriali	155
17	Dipendenza e indipendenza lineare e teorema di Steinitz	175
18	Spazi vettoriali di dimensione finita e loro proprietà	184
19	Sistemi lineari, criteri di compatibilità e risoluzione con il metodo dei determinanti	198
20	Applicazioni lineari, nucleo e immagine	208
21	Applicazioni lineari e matrici	225
22	Diagonalizzazione di endomorfismi e di matrici	233
23	Questioni metriche sui vettori liberi	245
24	Spazi vettoriali euclidei, basi ortonormali e algoritmo di Gram-Schmidt	251
25	Diagonalizzazione ortogonale	265

### CAPITOLO IV

#### ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA

26	Proprietà affini e euclidee in due e tre dimensioni	269
27	Geometria analitica in un piano affine euclideo $\mathbb{E}^2$	274
28	Geometria analitica in $\mathbb{E}^3$	290
29	Rappresentazione analitica di curve e superfici notevoli	313
30	Riduzione a forma canonica e classificazione delle coniche e delle quadriche	331

### CAPITOLO V

#### FORME BILINEARI E HERMITIANE, FORME QUADRATICHE

31	Forme bilineari e hermitiane	346
32	Spazi geometrici di dimensione finita	358
33	Ortogonalità negli spazi geometrici	364
34	Basi ortogonali e simplettiche e teorema di Lagrange	369

35	Invarianti e classificazione degli spazi geometrici e delle matrici simmetriche, antisimmetriche e hermitiane	374
36	Forme quadratiche	381
37	Forme hermitiane quadratiche	388
38	Riduzione a forma canonica di una forma quadratica e algoritmo di Lagrange	392
39	Forme quadratiche reali e hermitiane quadratiche definite	403
40	Spazi unitari	412
41	Il gruppo ortogonale e il gruppo unitario	415
	Indice analitico	422
	Simboli	433

## *Introduzione*

Queste “*dispense*” derivano dai corsi di Algebra lineare e Geometria tenuti presso l'Università degli Studi di Napoli "Federico II" e presso la Seconda Università di Napoli.

La forma espositiva rispecchia la mia “*deologia didattica*” che si riassume nel motto: “*cercare di non rendere astruse le cose lineari e difficili quelle semplici*”

A tale scopo ho preferito premettere alla trattazione assiomatica degli spazi vettoriali l'algebra lineare dei vettori numerici, delle matrici e dei sistemi di equazioni lineari, soffermandomi in particolare sull'algoritmo di riduzione a gradini come strumento per invertire una matrice quadrata, per determinare il rango di una matrice e per risolvere un sistema di equazioni lineari. Tale scelta è motivata dall'esigenza di partire da modelli “*concreti*” e semplici e di introdurre subito alcuni metodi molto utili in generale.

Gli elementi di geometria analitica sono sviluppati utilizzando l'algebra lineare, anticipando così in modo elementare la moderna impostazione assiomatica della geometria affine e euclidea.

Il testo è (o almeno spero che sia) assolutamente dalla parte dello studente, nel senso che gli enunciati sono dati in maniera più esplicita (anche se meno elegante) e sono corredati da esempi che ne illustrino il significato e consentano al lettore di valutarne immediatamente la comprensione.

Spero pertanto che “*il navigar sia dolce in questo mare*”.

## CAPITOLO I

## Insiemi, applicazioni e strutture algebriche

### 1. Insiemi, operazioni tra insiemi e relazioni di equivalenza

In questo paragrafo e nel successivo saranno introdotte in modo "*ingenuo*" le principali nozioni di teoria degli insiemi, linguaggio alla base di tutte le teorie matematiche. Il punto di vista "ingenuo" consiste essenzialmente nel preferire al rigore logico dell'impostazione assiomatica un approccio più intuitivo. Avvertiamo esplicitamente però che tale impostazione, se da un lato ha l'innegabile vantaggio didattico di essere più vicino all'esperienza quotidiana, dall'altro lato fa sorgere alcune contraddizioni logiche (le cosiddette antinomie) che possono essere eliminate soltanto con un'impostazione assiomatica.

Secondo il punto di vista ingenuo converremo di chiamare *insieme* una qualsiasi raccolta (o collezione, raggruppamento) di oggetti. Gli oggetti che stanno in un insieme  $S$  si diranno anche gli *elementi* di  $S$  e si scriverà  $x \in S$  per indicare che  $x$  è un elemento di  $S$  (si legge anche  $x$  appartiene ad  $S$ ). Il simbolo  $y \notin S$  indicherà invece che  $y$  non è un elemento di  $S$ .

Per assegnare un insieme occorre descrivere i suoi elementi e ciò si fa elencandoli (quando è possibile) oppure fissando una proprietà (o una regola) che li determini senza ambiguità. Per denotare l'insieme avente come elementi gli oggetti  $a, b, c, 1, 0$  si usa il simbolo

$$\{a, b, c, 1, 0\}.$$

Per indicare invece che  $S$  è l'insieme avente come elementi tutti e soli gli oggetti che verificano una assegnata proprietà  $\mathcal{A}$  si usa il simbolo

$$S = \{x \mid \mathcal{A}\}.$$

Converremo che una proprietà falsa per ogni oggetto (ad esempio la proprietà  $x \neq x$ ) determini un insieme privo di elementi, che si dice *insieme vuoto* e si denota con il simbolo  $\emptyset$ .

**Esempi (1.1).** (i) I simboli  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  denotano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, l'insieme costituito dallo zero e dai numeri naturali,



l'insieme dei numeri interi (relativi), l'insieme dei numeri razionali e quello dei numeri reali.

(ii) I polinomi nell'indeterminata  $x$  a coefficienti in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}_0$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  costituiscono altrettanti insiemi che si denotano rispettivamente con i simboli  $\mathbb{N}[x]$ ,  $\mathbb{N}_0[x]$ ,  $\mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathbb{Q}[x]$ ,  $\mathbb{R}[x]$ . Si ha ad esempio:

$$\begin{aligned} x, 5, x^3 + 4x + 7 &\in \mathbb{N}[x], \quad x - 1, -3 \notin \mathbb{N}[x] \\ x - 1, x^4 - 2x^3 + 5, x, -7 &\in \mathbb{Z}[x], \quad \frac{3}{4}x^3 - 5x^2 + 2 \notin \mathbb{Z}[x] \\ \frac{3}{4}x^3 - 5x^2 + 2, 3x - 5 &\in \mathbb{Q}[x], \quad ex^3 - \pi x^2 + \sqrt[3]{5} \notin \mathbb{Q}[x] \\ 5, x^3 + 4x + 7, \frac{2}{\sqrt[3]{7}}, ex^3 - \pi x^2 + \sqrt[3]{5}, &(\log_3 5)x^3 - \frac{\sqrt[3]{3}}{5}x + 2 \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

(iii) Un piano  $\pi$  può essere riguardato come insieme dei suoi punti. Riferendoci alla figura 1 si ha ad esempio  $A, B, C \in \pi$  e  $D \notin \pi$ .

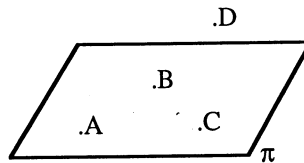


fig.1

(iv) Le rette di un piano  $\pi$  costituiscono un insieme che denoteremo col simbolo  $\mathfrak{L}_\pi$ . Le rette di  $\pi$  passanti per un fissato punto  $O$  costituiscono un insieme che denoteremo con  $F(\pi, O)$  e che si chiama *fascio* di rette di  $\pi$  di *centro* il punto  $O$ . Riferendoci alla figura 2 si ha ad esempio  $r, s, t \in \mathfrak{L}_\pi$  e  $u \notin \mathfrak{L}_\pi$ ,  $r', s' \in F(\pi', O)$  e  $t' \notin F(\pi', O)$ .

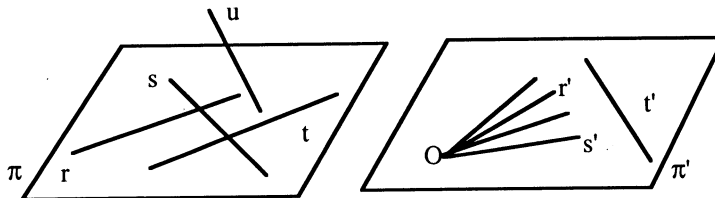


fig.2

(v) Ogni retta  $r$ , ogni segmento  $AB$ , ogni circonferenza  $\Gamma$ , ogni cerchio  $\mathfrak{C}$ , ogni poligonale  $\mathfrak{P}$  e, più in generale, ogni "figura" di punti di un piano  $\pi$  possono essere considerati come insiemi dei loro punti. Riferendoci alla figura 3 si ha ad esempio  $C \in AB$ ,  $P \in r$ ,  $D \in \Gamma$ ,  $E \notin \Gamma$ ,  $F \in \mathfrak{P}$  e  $G \notin \mathfrak{P}$ .

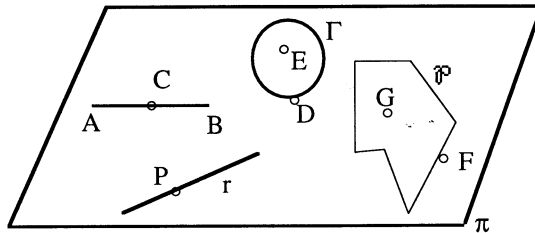


fig.3

(vi) Le circonferenze di un piano  $\pi$  costituiscono gli elementi di un insieme  $S$ . Riferendosi alla figura 4 si ha ad esempio  $a, b \in S$ ,  $c, d, e \notin S$ .

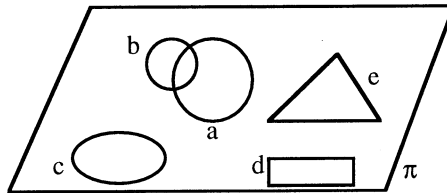


fig.4

Si dice che un insieme  $X$  è **sottoinsieme** (o parte) di un insieme  $S$  (o anche che  $X$  è contenuto o incluso in  $S$ ) e si scrive  $X \subseteq S$  (o anche  $S \supseteq X$ ) se  $X$  è vuoto oppure ogni elemento di  $X$  è anche elemento di  $S$ . Ovviamente per ogni insieme  $S$  hanno senso le scritture  $S \subseteq S$  e  $\emptyset \subseteq S$ .

La totalità dei sottoinsiemi di un insieme  $S$  costituisce un insieme, che si chiama **insieme delle parti** di  $S$  e si denota con  $\mathfrak{P}(S)$ . Risulta  $\emptyset, S \in \mathfrak{P}(S)$ .

Un sottoinsieme  $X$  di un insieme  $S$  che non coincida con  $S$  si dice **sottoinsieme proprio** di  $S$ . In tal caso si dice anche che  $X$  è **contenuto** (o **incluso**) **propriamente** in  $S$ . Per indicare che  $X$  è incluso propriamente in  $S$  si usa il simbolo  $X \subset S$  (o anche  $S \supset X$ ). Ovviamente un insieme  $S$  non è sottoinsieme proprio di se stesso, ovvero non si può scrivere  $S \subset S$ .

Due insiemi  $S$  e  $T$  si dicono **uguali**, e si scrive  $S=T$ , se  $S \subseteq T$  e  $T \subseteq S$ , ovvero se ogni elemento di ciascuno dei due è anche elemento dell'altro.

Due insiemi non uguali si dicono **diversi**. Si ha allora che due insiemi  $S$  e  $T$  sono diversi, e si scrive  $S \neq T$ , se, e soltanto se, almeno uno dei due non è contenuto nell'altro, ovvero esiste almeno un elemento in uno dei due insiemi che non appartiene all'altro.