

Raffaele Esposito

Appunti dalle lezioni di
MECCANICA RAZIONALE

ARACNE

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Realizzazione editoriale a cura della
ARACNE EDITRICE S.r.l.
00173 Roma, via R. Garofalo, 133 a-b
tel. (06) 93781075 telefax 72678427

ISBN 88-7999-121-3

info@aracneeditrice.it
www.aracneeditrice.it

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

I edizione: febbraio 1999

INDICE

Indice	v
Premessa	x
1. Assiomi della Meccanica	1
1.1 Tempo	1
1.2 Spazio	1
1.3 Punto materiale	12
1.4 Cambiamenti di riferimento	14
1.5 Principio d'inerzia	20
1.6 Legge di Newton	23
2. Equazioni differenziali e Legge di Newton	25
2.1 Posizione del problema	25
2.2 Esistenza ed unicità	28
2.3 Carattere deterministico della Legge di Newton	34
2.4 Continuità rispetto ai dati iniziali	36
2.5 Differenziabilità rispetto ai dati iniziali	39
2.6 Metodo delle differenze finite	41
3. Integrali primi, conservazione dell'energia	45
3.1 Integrali primi di un sistema differenziale	45
3.2 Conservazione dell'energia meccanica	45
4. Problemi unidimensionali	49
4.1 Riduzione a una dimensione	49
4.2 Analisi qualitativa del moto	51
4.3 Stabilità	58
4.4 Oscillatore armonico	62
4.5 Potenziali singolari	69
5. Problemi con attrito	74
5.1 Dissipazione dell'energia	74
5.2 Stabilità asintotica	76
5.3 Oscillatore armonico smorzato e forzato	79
5.4 Forzante periodica	84
5.5 Teorema di Fourier	86
5.6 Limite di attrito nullo	94
5.7 Piccole oscillazioni	96
6. Problemi tridimensionali. Forze centrali	100
6.1 Conservazione dell'energia	100

6.2	Conservazione del momento angolare	101
6.3	Coordinate polari	103
6.4	Conservazione della velocità areolare	105
6.5	Moti radiali	107
6.6	Moti generici	110
6.7	Moti Kepleriani	113
7.	Principio di minima azione: punto materiale	119
7.1	Funzionali su spazi di traiettorie	119
7.2	Punti stazionari di funzionali	121
7.3	Equazioni di Eulero-Lagrange	123
7.4	Principio di minima azione di Hamilton	128
7.5	Invarianza delle equazioni di Eulero-Lagrange	132
7.6	Condizioni di minimo	134
8.	Dinamica dei sistemi di punti materiali	137
8.1	Equazioni di Newton	137
8.2	Principio di azione e reazione	139
8.3	Equazioni cardinali della Meccanica	142
8.4	Legge di conservazione dell'energia	145
8.5	Moto in un riferimento non inerziale	148
8.6	Principio di minima azione di Hamilton per un sistema di particelle	149
9.	Sistemi di punti materiali vincolati	150
9.1	Vincoli e loro classificazione	150
9.2	Spazio delle configurazioni e coordinate Lagrangiane	152
9.3	Equazioni del moto e reazioni vincolari	153
9.4	Esempio 1: Moto vincolato ad una curva	154
9.5	Esempio 2: Moto di un punto su una superficie regolare	160
9.6	Principio dei lavori virtuali	165
9.7	Principio di D'Alambert	171
9.8	Principio di azione stazionaria per sistemi a vincoli ideali	172
9.9	Equazioni di Lagrange	176
9.10	Modello di vincolo ideale	180
9.11	Cenni sui vincoli anolonomi	185
10.	Proprietà dei sistemi Lagrangiani	189
10.1	Nozione di sistema Lagrangiano	189
10.2	Leggi di conservazione per un sistema Lagrangiano	194
10.3	Teorema di Noether	197
10.4	Principio di azione stazionaria di Maupertuis	200
10.5	Equilibrio e stabilità	205
10.6	Piccole oscillazioni	219
11.	Moto dei corpi rigidi	227
11.1	Cinematica del corpo rigido	227

11.2	Dinamica del corpo rigido	236
11.3	Equazioni di Eulero per il corpo rigido	246
12.	Sistemi Hamiltoniani	253
12.1	Nozione di sistema Hamiltoniano	253
12.2	Trasformata di Legendre	258
12.3	Principio di minima azione per sistemi Hamiltoniani	262
12.4	Leggi di conservazione in un sistema Hamiltoniano	264
12.5	Teorema di Liouville	265
12.6	Equazione di Liouville	272
12.7	Invarianti integrali	275
13.	Trasformazioni canoniche	286
13.1	Nozione di trasformazione canonica	286
13.2	Condizioni di canonicità	295
13.3	Funzioni generatrici di trasformazioni canoniche	298
13.4	Metodo di Hamilton-Jacobi	305
13.5	Trasformazioni completamente canoniche	311
13.6	Integrali primi e simmetrie dell'Hamiltoniana	317
14.	Sistemi integrabili e loro perturbazioni	321
14.1	Sistemi integrabili	321
14.2	Perturbazioni di sistemi integrabili	334
15.	Dinamica dei fluidi	345
15.1	Introduzione	345
15.2	Nozione di sistema continuo	345
15.3	Teorema del trasporto	348
15.4	Conservazione della massa	350
15.5	Bilancio dell'impulso (equazione di Newton	353
15.6	Bilancio del momento angolare	357
15.7	Bilancio dell'energia (prima legge della Termodinamica)	358
15.8	I fluidi	361
15.9	Fluido ideale (o di Eulero)	362
15.10	Fluido viscoso di Navier-Stokes	366
15.11	Fluido incompressibile	371
16.	Fluidi ideali	373
16.1	Equazioni dei fluidi ideali	373
16.2	Conservazione dell'energia	376
16.3	Teorema di Bernoulli	378
16.4	Teorema di Kelvin	380
16.5	Flussi bidimensionali	384
16.6	Equazione della vorticità in dimensione 3	388
16.7	Flussi potenziali	391
16.8	Paradosso di D'Alambert	393

A. Appendice: Alcuni ausili matematici	396
A.1 Principio di contrazione	396
A.2 Teorema della funzione implicita	397
Testi consigliati	401

Premessa

Le presenti note sono basate sulle lezioni di Meccanica Razionale da me tenute negli anni accademici 1994-95, 1995-96, 1996-97 agli studenti del corso di laurea in Matematica a L'Aquila. Esse non hanno la pretesa di costituire una trattazione esauriente della Meccanica Classica, ma piuttosto di fornire allo studente un filo conduttore nella preparazione dell'esame di Meccanica Razionale. È tuttavia opportuno che lo studente si riferisca anche ad uno dei tanti manuali di Meccanica esistenti per approfondire ed ampliare la discussione delle questioni qui trattate, ad esempio quelli menzionati in Bibliografia. Indispensabile per la comprensione del soggetto poi è la risoluzione di esercizi di Meccanica, dei quali esistono ampie raccolte.

Alcuni capitoli di queste note, come il secondo e l'appendice, coprono argomenti di Analisi Matematica che non sono usualmente noti agli studenti del corso di laurea in Matematica all'inizio del secondo anno, essendo parte del programma del secondo corso di Analisi Matematica. Gli ultimi due capitoli sono una rapida introduzione ai concetti preliminari della Dinamica dei Fluidi. Essi non fanno parte al momento del programma di Meccanica Razionale, ma piuttosto di quello di un corso successivo.

Ringrazio i colleghi Alessandra Celletti, Giorgio Fusco, Errico Presutti e Mario Pulvirenti e gli studenti che hanno usato queste note, per avermi offerto utili suggerimenti e segnalato sviste ed errori nelle precedenti versioni. Naturalmente, gli errori residui sono esclusivamente di mia responsabilità.

Settembre 1998

Raffaele Esposito

1. Assiomi della Meccanica

Le osservazioni empiriche che stanno alla base della Meccanica sono riassunte negli assiomi che verranno esposti in questo capitolo. La restante parte di queste note non farà alcun riferimento ai dati empirici: tutte le conclusioni saranno ottenute per via deduttiva dagli assiomi.

La nozione di *evento* è assunta come primitiva. Di ogni evento è possibile, da parte di un *osservatore* una localizzazione spaziale ed una temporale. L'insieme di tutti gli eventi si denoterà con \mathcal{M} ed il generico evento con $e \in \mathcal{M}$.

1.1 Tempo.

Ad ogni evento è possibile associare un numero reale tramite un'applicazione

$$\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$t = \mathcal{T}(e)$ si interpreta come il tempo al quale avviene l'evento e . L'applicazione \mathcal{T} consente di stabilire un ordinamento degli eventi:

“ e precede e' ” se e solo se $\mathcal{T}(e) < \mathcal{T}(e')$

e

“ e è simultaneo ad e' ” se e solo se $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}(e')$.

In Meccanica Classica (contrapposta alla Meccanica Relativistica) si assume che su tali affermazioni tutti gli osservatori concordino.

L'applicazione \mathcal{T} è detta *orologio*. Essa è in larga misura arbitraria e può essere modificata in qualsiasi altra \mathcal{T}' , a patto che la relazione d'ordine sia preservata. La specificazione di un orologio è parte integrante della caratterizzazione dell'osservatore.

1.2 Spazio.

La localizzazione spaziale richiede preliminarmente il richiamo di alcune definizioni elementari di carattere geometrico, che fornirà l'occasione per fissare le notazioni.

Notazioni.

Sia \mathbb{V}_n uno spazio vettoriale ad n dimensioni su \mathbb{R} . Con $\{e_1, \dots, e_n\}$ (o, in forma abbreviata $\{e_i\}$), denoteremo una *base* di \mathbb{V}_n . Per ogni vettore $v \in \mathbb{V}_n$, con $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ denoteremo le *componenti* di v nella base $\{e_i\}$, in modo che

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i.$$

Sia $\{e'_k\}$ un'altra base di \mathbb{V}_n , con e'_k avente componenti $\Lambda_{i,k}$ nella base $\{e_i\}$, e cioè

$$e'_k = \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} e_i.$$

Le componenti di $v \in \mathbb{V}_n$ rispetto alla base $\{e'_k\}$ si denotano con $(v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{R}^n$ e la relazione tra tali componenti e le componenti (v_1, \dots, v_n) di v rispetto alla base $\{e_i\}$ è

$$v_i = \sum_{k=1}^n \Lambda_{i,k} v'_k. \quad (1.1)$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^n v'_k e'_k = \sum_{k=1}^n v'_k \sum_{i=1}^n \Lambda_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^n e_i \sum_{k=1}^n \Lambda_{i,k} v'_k = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

e pertanto la (1.1). La matrice non singolare $\Lambda = \{\Lambda_{i,k}\}$ è detta *matrice del cambiamento di base*.

Definizione 1.1 (Prodotto Scalare): Si dice *prodotto scalare (euclideo)* su \mathbb{V}_n un'applicazione

$$\varphi: \mathbb{V}_n \times \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

tale che

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \varphi(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}_n, \\ \varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) &= \alpha_1 \varphi(u_1, v) + \alpha_2 \varphi(u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{V}_n \text{ e } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \varphi(u, u) &\geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \varphi(u, u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0. \end{aligned}$$

Vale inoltre, in conseguenza delle precedenti assunzioni, la *legge di annullamento del prodotto*:

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_n \text{ implica } u = 0.$$

Infatti, se $\varphi(u, v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{V}_n$, in particolare, ciò è vero per $v = u$. Pertanto $\varphi(u, u) = 0$ e questo implica $u = 0$ per la terza proprietà del prodotto scalare.

Se il prodotto scalare è fissato una volta per tutte, per ogni coppia di vettori u, v di \mathbb{V}_n denoteremo il prodotto scalare tra u e v con uno dei simboli $u \cdot v$ oppure (u, v) .

Definizione 1.2 (Norma) Si dice *norma* di u un'applicazione

$$\psi: \mathbb{V}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

tale che

$$\begin{aligned}\psi(\alpha u) &= |\alpha| \psi(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{V}_n, \\ \psi(u_1 + u_2) &\leq \psi(u_1) + \psi(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{V}_n, \\ \psi(u) &\geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \psi(u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0.\end{aligned}$$

Quando la norma ψ è fissata la si denota semplicemente con

$$\psi(u) = \|u\|.$$

Se su \mathbb{V}_n è definito un prodotto scalare, la funzione

$$\psi(u) = \|u\| = (u, u)^{1/2} \tag{1.2}$$

è una norma. Per mostrarlo basta controllare la seconda proprietà delle norme. A tal fine occorre dimostrare la fondamentale

Disuguaglianza di Schwartz:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \tag{1.3}$$

Dim: Poiché $(\lambda u - v) \cdot (\lambda u - v) \geq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, deve essere

$$\lambda^2 \|u\|^2 - 2\lambda(u, v) + \|v\|^2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Il discriminante di tale binomio di secondo grado in λ è

$$\frac{\Delta}{4} = (u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Esso deve essere non positivo perché (1.4) sia verificata $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. In conseguenza

$$(u, v)^2 - \|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

Estraendo la radice quadrata segue la (1.3). \square

In conseguenza, si ha

$$\begin{aligned}\|u_1 + u_2\|^2 &= (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) + 2(u_1, u_2) \\ &\leq \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + 2\|u_1\| \|u_2\| = (\|u_1\| + \|u_2\|)^2\end{aligned}$$

e pertanto vale il secondo assioma della norma.

La norma $\|u\|$ definita da (1.2) si dice *norma indotta dal prodotto scalare*. Nel seguito, salvo avviso contrario, la norma considerata sarà sempre quella indotta dal prodotto scalare. Diremo anche *lunghezza* del vettore u la sua norma.