Raffaele Esposito

Appunti dalle lezioni di
MECCANICA RAZIONALE

ARACNE

Realizzazione editoriale a cura della
ARACNE EDITRICE S.r.l.
00173 Roma, via R. Garofalo, 133 a–b
tel. (06) 93781075 telefax 72678427

ISBN 88-7999–121–3

info@aracneeditrice.it
www@aracneeditrice.it

I edizione: febbraio 1999

INDICE

Premessa

Le presenti note sono basate sulle lezioni di Meccanica Razionale da me tenute negli anni accademici 1994-95, 1995-96, 1996-97 agli studenti del corso di laurea in Matematica a L'Aquila. Esse non hanno la pretesa di costituire una trattazione esauriente della Meccanica Classica, ma piuttosto di fornire allo studente un filo conduttore nella preparazione dell'esame di Meccanica Razionale. È tuttavia opportuno che lo studente si riferisca anche ad uno dei tanti manuali di Meccanica esistenti per approfondire ed ampliare la discussione delle questioni qui trattate, ad esempio quelli menzionati in Bibliografia. Indispensabile per la comprensione del soggetto poi è la risoluzione di esercizi di Meccanica, dei quali esistono ampie raccolte.

Alcuni capitoli di queste note, come il secondo e l'appendice, coprono argomenti di Analisi Matematica che non sono usualmente noti agli studenti del corso di laurea in Matematica all'inizio del secondo anno, essendo parte del programma del secondo corso di Analisi Matematica. Gli ultimi due capitoli sono una rapida introduzione ai concetti preliminari della Dinamica dei Fluidi. Essi non fanno parte al momento del programma di Meccanica Razionale, ma piuttosto di quello di un corso successivo.

Ringrazio i colleghi Alessandra Celletti, Giorgio Fusco, Errico Presutti e Mario Pulvirenti e gli studenti che hanno usato queste note, per avermi offerto utili suggerimenti e segnalato sviste ed errori nelle precedenti versioni. Naturalmente, gli errori residui sono esclusivamente di mia responsabilità.

Settembre 1998

Raffaele Esposito

1. Assiomi della Meccanica

Le osservazioni empiriche che stanno alla base della Meccanica sono riassunte negli assiomi che verranno esposti in questo capitolo. La restante parte di queste note non farà alcun riferimento ai dati empirici: tutte le conclusioni saranno ottenute per via deduttiva dagli assiomi.

La nozione di *evento* è assunta come primitiva. Di ogni evento è possibile, da parte di un *osservatore* una localizzazione spaziale ed una temporale. L'insieme di tutti gli eventi si denoterà con $\mathcal{M}$ ed il generico evento con $e \in \mathcal{M}$.

1.1 Tempo.

Ad ogni evento è possibile associare un numero reale tramite un'applicazione

$$\mathcal{T}: \quad \mathcal{M} \to \mathbb{R}.$$

$t = \mathcal{T}(e)$ si interpreta come il tempo al quale avviene l'evento e. L'applicazione $\mathcal{T}$ consente di stabilire un ordinamento degli eventi:

"e precede e'" se e solo se $\mathcal{T}(e) < \mathcal{T}(e')$

e

"e è simultaneo ad e'" se e solo se $\mathcal{T}(e) = \mathcal{T}(e')$.

In Meccanica Classica (contrapposta alla Meccanica Relativistica) si assume che su tali affermazioni tutti gli osservatori concordino.

L'applicazione $\mathcal{T}$ è detta *orologio*. Essa è in larga misura arbitraria e può essere modificata in qualsiasi altra $\mathcal{T}'$, a patto che la relazione d'ordine sia preservata. La specificazione di un orologio è parte integrante della caratterizzazione dell'osservatore.

1.2 Spazio.

La localizzazione spaziale richiede preliminarmente il richiamo di alcune definizioni elementari di carattere geometrico, che fornirà l'occasione per fissare le notazioni.

<u>Notazioni</u>.

Sia $\mathbb{V}_n$ uno spazio vettoriale ad n dimensioni su $\mathbb{R}$. Con $\{e_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ (o, in forma abbreviata $\{e_i\}$), denoteremo una *base* di $\mathbb{V}_n$. Per ogni vettore $v \in \mathbb{V}_n$, con $(v_1, \ldots v_n) \in \mathbb{R}^n$ denoteremo le *componenti* di v nella base $\{e_i\}$, in modo che

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

Sia $\{e'_k\}$ un'altra base di $\mathbb{V}_n$, con e'_k avente componenti $\Lambda_{i,k}$ nella base $\{e_i\}$, e cioè

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,k} e_i.$$

Le componenti di $v \in \mathbb{V}_n$ rispetto alla base $\{e'_k\}$ si denotano con $(v'_1, \dots v'_n) \in \mathbb{R}^n$ e la relazione tra tali componenti e le componenti $(v_1, \dots v_n)$ di v rispetto alla base $\{e_i\}$ è

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{i,k} v'_k. \tag{1.1}$$

Infatti

$$\sum_{k=1}^{n} v'_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} v'_k \sum_{i=1}^{n} \Lambda_{i,k} e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{k=1}^{n} \Lambda_{i,k} v'_k = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

e pertanto la (1.1). La matrice non singolare $\Lambda = \{\Lambda_{i,k}\}$ è detta *matrice del cambiamento di base.*

Definizione 1.1 (Prodotto Scalare): Si dice *prodotto scalare (euclideo)* su $\mathbb{V}_n$ un'applicazione

$$\varphi : \quad \mathbb{V}_n \times \mathbb{V}_n \to \mathbb{R},$$

tale che

$$\begin{aligned}
&\varphi(u, v) = \varphi(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}_n, \\
&\varphi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \varphi(u_1, v) + \alpha_2 \varphi(u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in \mathbb{V}_n \text{ e } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\
&\varphi(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \varphi(u, u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0.
\end{aligned}$$

Vale inoltre, in conseguenza delle precedenti assunzioni, la *legge di annullamento del prodotto*:

$$\varphi(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}_n \text{ implica } u = 0.$$

Infatti, se $\varphi(u, v) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{V}_n$, in particolare, ciò è vero per $v = u$. Pertanto $\varphi(u, u) = 0$ e questo implica $u = 0$ per la terza proprietà del prodotto scalare.

Se il prodotto scalare è fissato una volta per tutte, per ogni coppia di vettori u, v di $\mathbb{V}_n$ denoteremo il prodotto scalare tra u e v con uno dei simboli $u \cdot v$ oppure (u, v).

Definizione 1.2 (Norma) Si dice *norma* di u un'applicazione

$$\psi : \quad \mathbb{V}_n \to \mathbb{R}^+$$

tale che

$$\psi(\alpha u) = |\alpha|\psi(u) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in \mathbb{V}_n,$$
$$\psi(u_1 + u_2) \leq \psi(u_1) + \psi(u_2) \quad \forall u_1, u_2 \in \mathbb{V}_n,$$
$$\psi(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{V}_n, \text{ e } \psi(u) = 0 \text{ se e solo se } u = 0.$$

Quando la norma ψ è fissata la si denota semplicemente con

$$\psi(u) = ||u||.$$

Se su $\mathbb{V}_n$ è definito un prodotto scalare, la funzione

$$\psi(u) = ||u|| = (u, u)^{1/2} \tag{1.2}$$

è una norma. Per mostrarlo basta controllare la seconda proprietà delle norme. A tal fine occorre dimostrare la fondamentale

Disuguaglianza di Schwartz:

$$|(u, v)| \leq ||u|| \, ||v||. \tag{1.3}$$

Dim: Poiché $(\lambda u - v) \cdot (\lambda u - v) \geq 0$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, deve essere

$$\lambda^2 ||u||^2 - 2\lambda(u, v) + ||v||^2 \geq 0. \tag{1.4}$$

Il discriminante di tale binomio di secondo grado in λ è

$$\frac{\Delta}{4} = (u, v)^2 - ||u||^2 ||v||^2.$$

Esso deve essere non positivo perché (1.4) sia verificata $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. In conseguenza

$$(u, v)^2 - ||u||^2 ||v||^2 \leq 0.$$

Estraendo la radice quadrata segue la (1.3). $\square$

In conseguenza, si ha

$$\begin{aligned} ||u_1 + u_2||^2 &= (u_1 + u_2, u_1 + u_2) = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) + 2(u_1, u_2) \\ &\leq ||u_1||^2 + ||u_2||^2 + 2||u_1|| \, ||u_2|| = (||u_1|| + ||u_2||)^2 \end{aligned}$$

e pertanto vale il secondo assioma della norma.

La norma $||u||$ definita da (1.2) si dice *norma indotta dal prodotto scalare*. Nel seguito, salvo avviso contrario, la norma considerata sarà sempre quella indotta dal prodotto scalare. Diremo anche *lunghezza* del vettore u la sua norma.