

Piero de Mottoni

*Complementi di matematica*

$\frac{A0I}{15}$



Copyright © MMCMXCII  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133/A-B  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 88-7999-041-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: dicembre 1992  
I ristampa: marzo 1999  
II ristampa: febbraio 2003

*A Giovanna e Carlotta*



## PREFAZIONE

Nella collaborazione con il Dipartimento di Matematica, iniziata già da qualche tempo con la pubblicazione di alcuni volumi, l'incontro con Piero ha segnato un momento umano e scientifico importante.

Sapevo che la sera stendeva pazientemente per iscritto le lezioni per i suoi studenti; pensai sarebbe stato interessante, sia da un punto di vista scientifico che didattico, pubblicarle, e così preparai alcune prove di stampa da sottoporgli. Ma poi non ebbi il coraggio di mostrargliele, né di accennare al mio progetto. Fu Piero stesso, un giorno nei corridoi del Dipartimento, a propormi di collaborare con lui. Ebbe così inizio un continuo e a volte vorticoso susseguirsi di bozze, che piano piano prendevano forma. Il 23 novembre mi chiese di portargli l'ultima versione, che avrebbe voluto rivedere durante la fine settimana. Ma "transiet vita nostra tamquam vestigium nubis" (SAP. 2,3): il 25 novembre Piero moriva.

Ora questa prima parte delle sue lezioni viene pubblicata, grazie anche al prezioso e attento lavoro di revisione e redazione finale di Michiel Bertsch, di Alberto Berretti e di Michele Matzeu.

Gioacchino Onorati

## INTRODUZIONE

Dal 1984 al 1990 Piero de Mottoni ha insegnato "Complementi di Matematica" presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma Tor Vergata.

Questo volume è la prima parte del libro scritto da Piero per i suoi studenti. In esso viene presentata la teoria classica delle funzioni olomorfe di una variabile complessa.

La seconda parte, in corso di pubblicazione, sarà dedicata alle trasformate di Laplace e di Fourier e alle funzioni speciali. Gli argomenti trattati sono svolti tenendo presente anche una molteplicità di problemi riguardanti l'ambito dell'ingegneria.

Nel volume si considerano note al lettore le proprietà elementari dei numeri complessi e la teoria delle funzioni reali di più variabili reali, argomento dei corsi di Analisi Matematica I e II.

Michiel Bertsch



# INDICE

<b>Capitolo 1. FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Funzioni complesse di variabile reale . . . . .	14
1.2. Alcune classi notevoli di funzioni complesse di variabile complessa . . . . .	14
1.2.1. Funzioni lineari . . . . .	14
1.2.2. Funzioni quadratiche . . . . .	16
1.2.3. La funzione "potenza $n$ -esima" . . . . .	18
1.2.4. La funzione esponenziale complessa . . . . .	18
1.3. Funzioni iniettive e loro inverse . . . . .	18
1.3.1. Inversione di $f(z) = z^2$ . . . . .	19
1.3.2. Inversione di $f(z) = z^n$ . . . . .	21
1.3.3. Il logaritmo complesso e le potenze generalizzate . . . . .	21
1.4. La funzione di Jukowski . . . . .	23
1.4.1. Inversione della funzione di Jukowski . . . . .	26
1.5. Le funzioni trigonometriche complesse . . . . .	27
1.6. Il punto all'infinito . . . . .	29
<b>Capitolo 2. SOTTOINSIEMI DEL PIANO COMPLESSO, SUCCESSIONI, SERIE . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1. Insiemi di punti nel campo complesso . . . . .	31
2.2. Successioni nel campo complesso . . . . .	32
2.3. Serie nel campo complesso . . . . .	32
2.4. Criteri di convergenza assoluta . . . . .	33
2.5. Serie doppie . . . . .	35
2.6. Prodotto di serie . . . . .	38
2.7. Serie di funzioni e serie di potenze . . . . .	38
2.8. Operazioni con le serie di potenze . . . . .	41
2.9. Cenni sul comportamento di una serie di potenze sulla circonferenza del cerchio di convergenza . . . . .	44
<b>Capitolo 3. FUNZIONI OLOMORFE . . . . .</b>	<b>45</b>
3.1. Derivabilità in senso complesso . . . . .	45
3.2. Funzioni oloomorfe e funzioni armoniche . . . . .	51
3.3. Esempi di funzioni oloomorfe . . . . .	52
3.4. Proprietà elementari delle funzioni oloomorfe . . . . .	54
3.5. Interpretazione geometrica della derivabilità complessa . . . . .	56
3.6. Trasformazioni conformi . . . . .	59

<b>Capitolo 4. L'USO DELLE TRASFORMAZIONI CONFORMI NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI POTENZIALI PIANI</b>	63
4.1. Trasformazione conforme di un potenziale	63
4.2. Applicazioni	65
<b>Capitolo 5. I TEOREMI INTEGRALI DI CAUCHY</b>	77
5.1. Integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa	77
5.2. Il teorema integrale di Cauchy	84
5.3. Una semplice applicazione del teorema integrale di Cauchy	91
5.4. Il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni olomorfe	94
5.5. Il teorema di rappresentazione di Cauchy e sue prime conseguenze	96
5.6. Calcolo di integrali curvilinei nel piano complesso; il Lemma di Jordan	104
5.6.1. $\int_{ z =2} \frac{dz}{z^2+1}$	104
5.6.2. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$	105
5.7. La formula integrale di Cauchy per le derivate successive di una funzione olomorfa; il teorema di Morera	108
<b>Capitolo 6. FUNZIONI OLMORFE E SERIE DI POTENZE</b>	113
6.1. Serie di funzioni olomorfe e serie di potenze	113
6.2. Sviluppabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe; sviluppi di Taylor	115
6.2.1. Esempi di sviluppi in serie di Taylor	117
6.3. Olomorfia all'infinito e sviluppi di Taylor nell'intorno dell'infinito	120
6.4. Il teorema di Liouville	121
6.5. Serie doppie	123



<b>Capitolo 7. IDENTITÀ DI FUNZIONI OLOMORFE; PROLUNGAMENTI ANALITICI; FUNZIONI ANALITICHE COMPLETE POLIDROME E MONODROME . . . . .</b>	<b>127</b>
7.1. Identità per serie di potenze e per funzioni oloomorfe . . . . .	127
7.2. Il principio del prolungamento analitico . . . . .	130
7.2.1. Calcolo dei coefficienti di Taylor di elementi analitici “suc- cessivi” . . . . .	138
7.2.2. Il teorema di Pringsheim e sue conseguenze . . . . .	138
7.3. Prolungamento analitico lungo curve. Il logaritmo complesso	141
7.3.1. Prolungamento lungo curve . . . . .	141
7.3.2. La funzione $\ln z$ . . . . .	142
7.4. Punti di diramazione . . . . .	148
7.5. Il teorema di monodromia . . . . .	150
7.6. Conseguenze del teorema di monodromia. Rami oloomorfi di funzioni analitiche . . . . .	151
7.7. Rami oloomorfi di funzioni analitiche complete in domini non semplicemente internamente connessi . . . . .	154
 <b>Capitolo 8. SINGOLARITÀ ISOLATE DI FUNZIONI OLOMORFE . . . . .</b>	 <b>161</b>
8.1. La serie di Laurent . . . . .	161
8.1.1. Raggi di Convergenza della serie di Laurent . . . . .	164
8.1.2. Unicità della serie di Laurent; esempi . . . . .	164
8.2. Serie di Laurent e serie di Fourier . . . . .	168
8.3. Singolarità isolate . . . . .	170
8.3.1. Singolarità eliminabili . . . . .	172
8.3.2. Poli . . . . .	173
8.3.3. Singolarità essenziali . . . . .	174
8.4. Serie di Laurent e parte principale di una funzione olo- omorfa nei pressi di una singolarità isolata . . . . .	175
8.5. Calcolo dei Residui . . . . .	179
8.5.1. Caso di un polo del primo ordine . . . . .	180
8.5.2. Il residuo in un polo di ordine $n$ . . . . .	181
8.5.3. Applicazioni del teorema dei residui . . . . .	182
8.6. Comportamento all'infinito di funzioni oloomorfe. Il residuo all'infinito . . . . .	183
8.7. La derivata logaritmica e l'indicatore logaritmico . . . . .	185
8.7.1. Interpretazione geometrica dell'indicatore logaritmico . . . . .	188
8.8. La serie di Bürmann–Lagrange . . . . .	191
8.8.1. Applicazioni della serie di Bürmann–Lagrange . . . . .	193

8.8.2. L'inversione di serie di potenze mediante la serie di Bürmann-Lagrange . . . . .	194
<b>Capitolo 9. INTEGRALI IMPROPRI REALI CALCO- LATI MEDIANTE IL TEOREMA DEI RE- SIDUI . . . . .</b>	<b>197</b>
9.1. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$ . . . . .	197
9.2. Il valore principale di Cauchy . . . . .	199
9.3. Integrali di funzioni periodiche . . . . .	201
9.4. $\int_{-\infty}^{\infty} R(e^x) e^{\alpha x} dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	202
9.5. $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} R(x) dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	204
9.6. $\int_0^{\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha}} dx$ con $R$ avente poli semplici su $\mathbb{R}^+$ . . . . .	207
9.7. $\int_0^{\infty} R(x) \log x dx$ . . . . .	209
9.8. Cambiamento di variabili e teorema dei residui . . . . .	210
9.9. Integrali estesi ad archi di curva in $\mathbb{C}$ . Integrali del tipo $\int_0^{\infty} R(x) dx$ . . . . .	213
9.10. Uso del calcolo dei Residui per trovare la somma di serie numeriche . . . . .	217
<b>Capitolo 10. LE FUNZIONI <math>\Gamma</math> E <math>B</math> DI EULERO . . . . .</b>	<b>219</b>
10.1. Richiami sugli integrali impropri uniformemente convergenti	219
10.2. La funzione $\Gamma$ di Eulero . . . . .	220
10.2.1. La funzione $\Gamma$ e l'integrale di Gauss . . . . .	222
10.3. La funzione $B$ di Eulero . . . . .	222
10.4. Formula dei complementi . . . . .	224
<b>Capitolo 11. TRASFORMATA DI LAPLACE . . . . .</b>	<b>227</b>
11.1. Trasformata di Laplace e sua inversa . . . . .	227
11.2. Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	235
11.3. Teoremi di convoluzione . . . . .	241
11.4. Teoremi di sviluppo . . . . .	242
11.5. La trasformata di Laplace di potenze generalizzate . . . . .	247
11.6. Applicazioni del teorema di convoluzione . . . . .	247
11.7. Un'applicazione della trasformata di Laplace all'equazio- ne di Bessel . . . . .	249
11.8. La trasformata di Laplace bilatera e la trasformata di Mellin . . . . .	250
11.9. Gli integrali di Lipschitz e Weber . . . . .	254

<b>Capitolo 12. CENNI DI TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI</b> . . . . .	255
12.1. Introduzione . . . . .	255
12.2. Derivata di distribuzioni . . . . .	259
12.3. Funzioni a decrescenza rapida e distribuzioni temperate . . . . .	261
12.4. Trasformata di Laplace di distribuzioni . . . . .	262
<b>Capitolo 13. POLINOMI DI LEGENDRE E EQUAZIONE DI LEGENDRE</b> . . . . .	265
13.1. Polinomi di Legendre . . . . .	265
13.2. L'equazione differenziale di Legendre . . . . .	267
13.3. Funzioni di Legendre (armoniche sferiche di secondo tipo) . . . . .	269
13.4. Una rappresentazione esplicita dei polinomi di Legendre: la formula di Rodrigues . . . . .	270
13.5. Ortogonalità dei polinomi di Legendre . . . . .	271
<b>Capitolo 14. FUNZIONI DI BESSEL</b> . . . . .	273
14.1. Osservazione sul prodotto di serie assolutamente convergenti: il prodotto "antidiagonale" . . . . .	273
14.2. Funzioni di Bessel . . . . .	274
14.3. L'equazione differenziale di Bessel . . . . .	277
14.4. L'equazione della membrana e l'equazione di Bessel . . . . .	279
14.5. Funzioni di Bessel di secondo tipo . . . . .	280
14.6. Un'equazione riconducibile a un'equazione di Bessel . . . . .	282
14.7. Un'applicazione delle funzioni di Bessel . . . . .	283
<b>Capitolo 15. TRASFORMATA DI FOURIER</b> . . . . .	287
15.1. Serie di Fourier . . . . .	287
15.2. Teoremi di convergenza per la serie di Fourier . . . . .	288
15.3. La trasformata di Fourier . . . . .	289
15.4. Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	290
15.5. Trasformata di Fourier: esempi . . . . .	291
15.6. Trasformata di Fourier di "Funzioni" singolari . . . . .	293
15.7. Trasformata di Fourier e serie di Fourier . . . . .	296
15.8. Serie di Fourier troncate . . . . .	299
15.9. Somme di Fejér . . . . .	300
15.10. Il teorema di campionamento (Sampling theorem) . . . . .	301
15.11. Trasformate di Fourier bidimensionale e trasformate di Hankel . . . . .	303

<b>Capitolo 16. EQUAZIONE DEL CALORE E LA SUA TRATTAZIONE CON IL METODO DI FOURIER</b> . . . . .	309
16.1. Equazione del calore . . . . .	309
16.2. Il metodo di Fourier . . . . .	311
<b>Capitolo 17. TRASFORMATA <math>Z</math></b> . . . . .	321
17.1. Definizione e proprietà basilari . . . . .	321
17.2. Esempi di trasformate $Z$ . . . . .	322
17.3. Inversione della trasformata $Z$ . . . . .	325
17.4. Ulteriori proprietà della trasformata $Z$ . . . . .	330
17.5. Uso della trasformata $Z$ per la risoluzione di equazioni alle differenze . . . . .	338
<b>Capitolo 18. LA TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA</b> . . . . .	341
18.1. Introduzione . . . . .	341
18.2. Proprietà della DFT . . . . .	342

## CAPITOLO 1

### FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

Supporremo acquisite le nozioni fondamentali relative ai numeri complessi, e in particolare la rappresentazione dei numeri complessi come punti del “piano complesso”  $\mathbb{C}$  o come vettori in  $\mathbb{C}$ .

Useremo le consuete notazioni relative ad un numero complesso  $z$ :

$\operatorname{Re} z$ : parte reale di  $z$

$\operatorname{Im} z$ : parte immaginaria di  $z$

$|z|$ : modulo di  $z$

$\arg z$ : argomento di  $z$

$\bar{z}$ : complesso coniugato di  $z$ .

Ricordiamo che, se  $z \neq 0$ ,  $\arg z$  è definito a meno di multipli di  $2\pi$ ; denotiamo con  $\{\arg z\}$  l'insieme degli argomenti di  $z$ ; se  $z = 0$ ,  $\arg z$  non è definito.

Supporremo inoltre note le “quattro operazioni” per numeri complessi, nonché la formula  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

Ricordiamo infine:

- la rappresentazione **cartesiana** di un numero complesso  $z$ :  
 $z = x + iy$ ;  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ;
- la rappresentazione **polare** di un numero complesso  $z$ :  $z = r e^{i\varphi}$ ;  
 $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ .

Funzioni complesse di una variabile complessa: si tratta di funzioni  $f$  il cui dominio di definizione  $D(f)$  e il cui codominio  $R(f)$  sono sottoinsiemi del piano complesso  $\mathbb{C}$ .

$$\mathbb{C} \supset D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subset \mathbb{C}.$$

Assegnare una funzione complessa equivale pertanto ad assegnare una coppia di funzioni reali di due variabili reali: se  $w = f(z)$ , posto  $u = \operatorname{Re} w$ ,  $v = \operatorname{Im} w$ ,  $z = x + iy$ , assegnare  $f(z)$  equivale ad assegnare le funzioni  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ .

Per “visualizzare” una funzione complessa di variabile complessa, occorrerebbe servirsi di uno spazio quadridimensionale. Si ricorre perciò spesso ad una rappresentazione che consiste nel disegnare in due diversi piani dominio e codominio (il dominio nel piano “origine” o piano  $z$ , il

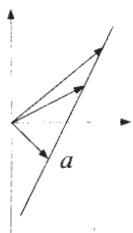


Figura 1.1.

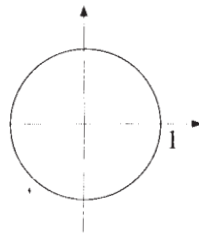


Figura 1.2.

codominio nel piano  $w$  o piano “immagine”). Per visualizzare il comportamento di una funzione assegnata si traccia sul piano origine un sistema di coordinate, e si studia poi l’immagine di tale sistema nel piano immagine. Nei paragrafi seguenti presenteremo alcuni esempi.

### 1.1. FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE REALE

Si tratta del caso particolare in cui  $D(f) \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \supset D(f) \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ . Se  $D(f)$  è un intervallo, e  $f$  è continua, l’immagine  $R(f)$  di  $f$  è allora una *curva* nel piano immagine.

Esempi di funzioni complesse di variabile reale:

1. siano  $a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0$ , e consideriamo  $f(t)$  così definita:

$$f(t) = a + bt \quad , \quad t \in \mathbb{R} .$$

L’immagine è una retta che passa per il punto  $a$  e ha la direzione di  $b$  (visto come vettore in  $\mathbb{C}$ ).

2. Sia  $\omega > 0$ , e  $f : t \rightarrow e^{i\omega t}$ . L’immagine è il cerchio unitario. Si tratta visibilmente di una funzione non iniettiva poiché due punti di  $\mathbb{R}$  che differiscono per  $2\pi/\omega$  hanno la stessa immagine.

### 1.2. ALCUNE CLASSI NOTEVOLI DI FUNZIONI COMPLESSE DI VARIABILE COMPLESSA

#### 1.2.1. Funzioni lineari

Siano  $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ , la funzione complessa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da  $f(z) = az + b$  si dice *lineare*. Casi particolari notevoli:

- (i)  $a = 1$ . Si vede facilmente che ogni figura nel piano origine viene trasformata, nel piano immagine, nella stessa figura *traslata* del vettore  $b$ . La trasformazione si chiama pertanto **traslazione**.