Piero de Mottoni

Complementi di matematica

Aoi
15

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-7999-041-1

I edizione: dicembre 1992
I ristampa: marzo 1999
II ristampa: febbraio 2003

A Giovanna e Carlotta

PREFAZIONE

Nella collaborazione con il Dipartimento di Matematica, iniziata già da qualche tempo con la pubblicazione di alcuni volumi, l'incontro con Piero ha segnato un momento umano e scientifico importante.

Sapevo che la sera stendeva pazientemente per iscritto le lezioni per i suoi studenti; pensai sarebbe stato interessante, sia da un punto di vista scientifico che didattico, pubblicarle, e così preparai alcune prove di stampa da sottoporgli. Ma poi non ebbi il coraggio di mostrargliele, né di accennare al mio progetto. Fu Piero stesso, un giorno nei corridoi del Dipartimento, a propormi di collaborare con lui. Ebbe così inizio un continuo e a volte vorticoso susseguirsi di bozze, che piano piano prendevano forma. Il 23 novembre mi chiese di portargli l'ultima versione, che avrebbe voluto rivedere durante il fine settimana. Ma "transiet vita nostra tamquam vestigium nubis" (SAP. 2,3): il 25 novembre Piero moriva.

Ora questa prima parte delle sue lezioni viene pubblicata, grazie anche al prezioso e attento lavoro di revisione e redazione finale di Michiel Bertsch, di Alberto Berretti e di Michele Matzeu.

Gioacchino Onorati

INTRODUZIONE

Dal 1984 al 1990 Piero de Mottoni ha insegnato "Complementi di Matematica" presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Roma Tor Vergata.

Questo volume è la prima parte del libro scritto da Piero per i suoi studenti. In esso viene presentata la teoria classica delle funzioni olomorfe di una variabile complessa.

La seconda parte, in corso di pubblicazione, sarà dedicata alle trasformate di Laplace e di Fourier e alle funzioni speciali. Gli argomenti trattati sono svolti tenendo presente anche una molteplicità di problemi riguardanti l'ambito dell'ingegneria.

Nel volume si considerano note al lettore le proprietà elementari dei numeri complessi e la teoria delle funzioni reali di più variabili reali, argomento dei corsi di Analisi Matematica I e II.

Michiel Bertsch

INDICE

CAPITOLO 1

FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

Supporremo acquisite le nozioni fondamentali relative ai numeri complessi, e in particolare la rappresentazione dei numeri complessi come punti del "piano complesso" $\mathbb{C}$ o come vettori in $\mathbb{C}$.

Useremo le consuete notazioni relative ad un numero complesso z:

$\mathrm{Re}\, z$: parte reale di z

$\mathrm{Im}\, z$: parte immaginaria di z

$|z|$: modulo di z

$\arg z$: argomento di z

$\overline{z}$: complesso coniugato di z.

Ricordiamo che, se $z \neq 0$, $\arg z$ è definito a meno di multipli di 2π; denotiamo con $\{\arg z\}$ l'insieme degli argomenti di z; se $z = 0$, $\arg z$ non è definito.

Supporremo inoltre note le "quattro operazioni" per numeri complessi, nonché la formula $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$.

Ricordiamo infine:

- la rappresentazione **cartesiana** di un numero complesso z: $z = x + iy; \quad x = \mathrm{Re}\, z, \quad y = \mathrm{Im}\, z$;
- la rappresentazione **polare** di un numero complesso z: $z = r\, e^{i\varphi}$; $r = |z|, \quad \varphi = \arg z$.

Funzioni complesse di una variabile complessa: si tratta di funzioni f il cui dominio di definizione $D(f)$ e il cui codominio $R(f)$ sono sottoinsiemi del piano complesso $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} \supset D(f) :\xrightarrow{f} R(f) \subset \mathbb{C}.$$

Assegnare una funzione complessa equivale pertanto ad assegnare una coppia di funzioni reali di due variabili reali: se $w = f(z)$, posto $u = \mathrm{Re}\, w$, $v = \mathrm{Im}\, w$, $z = x + iy$, assegnare $f(z)$ equivale ad assegnare le funzioni $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Per "visualizzare" una funzione complessa di variabile complessa, occorrerebbe servirsi di uno spazio quadridimensionale. Si ricorre perciò spesso ad una rappresentazione che consiste nel disegnare in due diversi piani dominio e codominio (il dominio nel piano "origine" o piano z, il

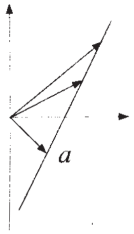

Figura 1.1.

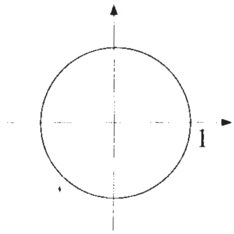

Figura 1.2.

codominio nel piano w o piano "immagine"). Per visualizzare il comportamento di una funzione assegnata si traccia sul piano origine un sistema di coordinate, e si studia poi l'immagine di tale sistema nel piano immagine. Nei paragrafi seguenti presenteremo alcuni esempi.

1.1. Funzioni complesse di variabile reale

Si tratta del caso particolare in cui $D(f) \subset \mathbb{R} : \ \mathbb{R} \supset D(f) \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$. Se $D(f)$ è un intervallo, e f è continua, l'immagine $R(f)$ di f è allora una *curva* nel piano immagine.

Esempi di funzioni complesse di variabile reale:

1. siano $a, bD(f) = \mathbb{R}, \in \mathbb{C},\ b \neq 0$, e consideriamo $f(t)$ così definita:

$$f(t) = a + bt \quad , \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

   L'immagine è una retta che passa per il punto a e ha la direzione di b (visto come vettore in $\mathbb{C}$).
2. Sia $\omega > 0$, e $f : t \to e^{i\omega t}$. L'immagine è il cerchio unitario. Si tratta visibilmente di una funzione non iniettiva poiché due punti di $\mathbb{R}$ che differiscono per $2\pi/\omega$ hanno la stessa immagine.

1.2. Alcune classi notevoli di funzioni complesse di variabile complessa

1.2.1. Funzioni lineari

Siano $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, la funzione complessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $f(z) = az + b$ si dice *lineare*. Casi particolari notevoli:

(i) $a = 1$. Si vede facilmente che ogni figura nel piano origine viene trasformata, nel piano immagine, nella stessa figura *traslata* del vettore b. La trasformazione si chiama pertanto **traslazione**.