

A09

7

Armando Bellini / Gennaro Figalli

Il motore asincrono

negli azionamenti industriali



Copyright © MMII
ARACNE EDITRICE S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

00173 Roma
via Raffaele Garofalo, 133 A/B
(06) 93781065

ISBN 88-7999-036-5

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

I edizione: gennaio 1995

Indice

Introduzione	v
1. Schematizzazione bifase equivalente di un avvolgimento trifase	1
1.1 Modello bifase di un avvolgimento trifase	1
Appendice	8
A.1 Interpretazione fisica	8
A.2 Approccio sistemistico	10
2. Alimentazione di un avvolgimento trifase mediante un convertitore statico	15
2.1 Convertitore c.a.-c.a. a controllo di fase	15
2.2 Inverter a tensione impressa	17
2.3 Inverter a corrente impressa	20
2.4 Cicloconvertitore	23
2.5 Alimentazione in corrente	25
Appendice	26
A.1 Tecniche di modulazione implementate su dispositivi analogici	26
A.2 Tecniche di modulazione implementate su microprocessori	34
Bibliografia	42
3. Modello del motore asincrono trifase	49
3.1 Schematizzazione bifase equivalente con assi fissi con lo statore	49
3.2 Schematizzazione bifase equivalente con assi solidali con il rotore	53
3.3 Schematizzazione bifase equivalente con assi rotanti a velocità qualsiasi	54
3.4 Schematizzazione con variabili complesse	58

4. Comportamento a regime permanente del motore asincrono trifase	61
4.1 Caratteristiche statiche con alimentazione sinusoidale	61
4.2 Effetti dovuti alla alimentazione non sinusoidale	69
4.2.1 Alimentazione con inverter a tensione impressa	70
4.2.2 Alimentazione con inverter a corrente impressa	74
5. Modalità di controllo del motore asincrono trifase	79
5.1 Controllo da statore	79
5.1.1 Motore controllato in tensione	79
5.1.2 Motore controllato in frequenza	80
5.2 Controllo da rotore	81
Bibliografia	88
6. Controllo in frequenza con alimentazione a tensione impressa	91
6.1 Legge di variazione della tensione di alimentazione	91
6.2 Modello linearizzato del motore asincrono	98
6.3 Stabilità	104
6.4 Struttura del sistema di controllo	109
Appendice	113
Bibliografia	121
7. Controllo in frequenza con alimentazione a corrente impressa	125
7.1 Legge di variazione della corrente di alimentazione	125
7.2 Modello linearizzato	127
7.2.1 Controllo a flusso di statore costante	129
7.2.2 Controllo a flusso di rotore costante	132
7.3 Struttura del sistema di controllo	134
7.3.1 Alimentazione con inverter a corrente impressa	135

7.3.2 Alimentazione con inverter a tensione impressa	142
Appendice	151
Bibliografia	159
8. Controllo ad orientamento di campo	163
8.1 Principio del controllo ad orientamento di campo	163
8.2 Implementazione della tecnica di controllo	166
8.2.1 Implementazione con inverter a corrente impressa	168
8.2.2 Implementazione con inverter a tensione impressa	169
8.3 Effetti delle variazioni parametriche nel controllo di tipo indiretto	171
8.3.1 Metodi per determinare la costante di tempo rotorica	178
8.4 Controllo di tipo diretto: determinazione delle componenti del flusso rotorico	180
8.4.1 Osservatore dello stato	182
8.5 Sensibilità alle variazioni dei parametri di macchina e agli errori di misura	186
8.5.1 Impiego delle equazioni rotoriche	189
8.5.2 Impiego delle equazioni statoriche	191
8.5.3 Impiego dell'osservatore dello stato	192
8.6 Sviluppi futuri	200
Bibliografia	201
Bibliografia generale	207

INTRODUZIONE

La possibilità di impiegare i motori in corrente alternata, ideati e progettati per funzionare a velocità costante, come attuatori negli azionamenti a velocità variabile è nota da molti anni. Già dall'inizio del secolo, infatti, furono compiuti i primi studi tendenti ad analizzare la possibilità di impiegare, negli azionamenti a velocità variabile, un motore in corrente alternata al posto del motore in corrente continua che, pur possedendo caratteristiche statiche e dinamiche adeguate a diversi settori applicativi, presenta vari svantaggi per quanto riguarda ingombro, manutenzione, costo, sovraccaricabilità e valore massimo della tensione di alimentazione.

Le vie seguite per sostituire, negli azionamenti industriali, il motore in corrente continua con un motore in corrente alternata furono diverse: fra le più importanti, l'alimentazione mediante convertitori rotanti di motori asincroni e sincroni con tensioni di ampiezza e frequenza variabili e l'alimentazione del motore asincrono direttamente da rete e controllo della velocità mediante l'inserzione di reattanze saturabili nei circuiti di statore o di rotore oppure con dispositivi rotanti, inseriti nel circuito di rotore, atti a trasferire in rete parte dell'energia trasmessa dallo statore al rotore. La complicazione di realizzare i dispositivi di controllo e la loro bassa affidabilità, unitamente agli alti costi di impianto, fecero però abbandonare queste prime realizzazioni.

Alla fine degli anni '60 l'avvento dei semiconduttori di potenza ha ridestato l'interesse verso l'impiego dei motori in corrente alternata. La tecnologia elettronica degli anni '70 non si è, però, rivelata sufficientemente evoluta per tale trasformazione sia per gli aspetti di potenza sia per quelli di manipolazione dei segnali. Infatti, l'elettronica di potenza, realizzata mediante raddrizzatori controllati al silicio a commutazione forzata, risultava troppo costosa e di non sufficiente affidabilità rispetto a quella impiegata negli azionamenti con motore in corrente continua, mentre l'elettronica di segnale, basata su dispositivi analogici o digitali, integrati in piccola scala, non permetteva la realizzazione di tecniche di controllo abbastanza sofisticate per garantire un comportamento dinamico della macchina in corrente alternata pienamente soddisfacente. Le realizzazioni degli anni '70 e dei primi anni '80 sono state, pertanto, prettamente prototipiche e hanno trovato un impiego conveniente solo in particolari applicazioni, quali centrali di pompaggio, mulini e forni per cemento, grossi impianti di ventilazione o di irrigazione, cartiere, impianti per la produzione di cavi elettrici.

Le prospettive sono completamente mutate durante la seconda metà degli anni '80, a causa del rapido sviluppo della tecnologia elettronica. In questi anni, infatti, si è assistito a una profonda trasformazione dell'elet-

tronica di potenza, specialmente per potenze inferiori a qualche centinaio di kW, dovuta allo sviluppo di transistor di potenza (dapprima bipolari e, successivamente, di tipo MOSFET e IGBT), per cui, attualmente, i dispositivi (inverter) per il pilotaggio dei motori in corrente alternata presentano un elevato grado di affidabilità e un costo decisamente contenuto. Anche i problemi, connessi alla realizzazione di tecniche di controllo adeguate allo scopo, sono stati superati con lo sviluppo dei microprocessori e, in particolare, dei Digital Signal Processor, che si sono rivelati particolarmente idonei per la implementazione di tecniche di controllo sofisticate con tempi di calcolo estremamente ridotti.

Le macchine impiegate negli azionamenti con motore in corrente alternata possono essere sia di tipo sincrono che di tipo asincrono. Entrambi i tipi sono caratterizzati da uno statore, la cui struttura magnetica è costituita da un pacco di lamierini isolati; ciascun lamierino ha la forma di una corona circolare e presenta verso l'esterno una serie di fori equidistanti (di varia forma costruttiva) che, nella sovrapposizione dei successivi lamierini, danno origine alla formazione delle cave, nelle quali è collocato l'avvolgimento di statore. Tale avvolgimento è di tipo polifase; nel seguito, si farà riferimento solo a macchine il cui statore è costituito da un avvolgimento trifase. Il rotore presenta caratteristiche costruttive notevolmente differenti nei due tipi di motore; infatti, nel motore asincrono il rotore assume la funzione di indotto mentre, nel motore sincrono, esso assume il ruolo di induttore.

I motori sincroni vengono, in genere, impiegati o negli azionamenti di elevata potenza, fino a qualche centinaio di MW, o in azionamenti di bassa potenza, fino a qualche decina di kW. Nel primo caso, si impiegano macchine con avvolgimenti di eccitazione mentre, nel secondo, si utilizzano o motori a magneti permanenti o motori a riluttanza variabile.

Negli azionamenti con motore asincrono, il cui utilizzo si estende in un campo di potenza notevolmente ampio (da pochi kW fino a qualche MW), la macchina più utilizzata è quella con rotore a gabbia. In alcune applicazioni di elevata potenza, che richiedono un limitato campo di variazione della velocità, si fa spesso ricorso a motori a rotore avvolto con controllo sul circuito di rotore.

Motore asincrono

Il motore asincrono è il motore in corrente alternata che ha avuto la maggiore diffusione negli impianti industriali sia per la sua compattezza che per la sua flessibilità di impiego.

Il circuito magnetico del rotore di un motore asincrono è realizzato con un pacco di lamierini isolati sagomati come una corona circolare all'esterno della quale sono ricavate le cave per l'avvolgimento. Quest'ultimo, come già accennato, può essere realizzato con due distinte modalità costruttive a seconda che si desideri o meno poter accedere all'avvolgimento. Nel primo caso, l'avvolgimento di rotore è realizzato in maniera analoga a

quello di statore e i terminali delle tre fasi sono accessibili dall'esterno mediante anelli e spazzole. Nel secondo caso, l'avvolgimento rotorico è costituito da un insieme di barre, una per ciascuna cava; tutte le barre sono collegate mediante due anelli saldati, che le chiudono permanentemente in corto circuito (motore a gabbia di scoiattolo). Le barre rotoriche possono avere varie forme; in particolare, si possono individuare tre tipi di rotore: rotore a gabbia esterna, rotore a gabbia profonda e rotore a doppia gabbia.

La struttura della gabbia rotorica influenza in maniera determinante le caratteristiche statiche della macchina. Il rotore a doppia gabbia è usato essenzialmente nel caso di motori alimentati da rete a tensione e frequenza costante; negli azionamenti, in cui l'alimentazione è a frequenza costante, si preferisce in genere impiegare un rotore a gabbia profonda, mentre, quando la frequenza di alimentazione è variabile, la gabbia rotorica è di tipo esterno. Poiché l'interesse maggiore è rivolto agli azionamenti a frequenza variabile, il modello del motore sarà ricavato prendendo in considerazione solo il motore con rotore a gabbia esterna; in questo caso, il circuito di rotore può essere schematizzato mediante un avvolgimento trifase ovviamente chiuso in corto circuito.

Il traferro della macchina asincrona ha uno spessore costante e deve essere il più piccolo possibile, compatibilmente con le esigenze meccaniche e con le dilatazioni dovute alla temperatura. All'aumentare dello spessore del traferro, le caratteristiche della macchina si degradano e ciò costituisce un limite specifico alla massima potenza di impiego.

Motore sincrono

La macchina sincrona è stata, fino ad alcuni anni fa, prevalentemente utilizzata come generatore o come condensatore rotante. Il suo impiego come motore era, in genere, limitato a quelle particolari applicazioni in cui si rendeva necessario mantenere rigorosamente costante la velocità impressa al carico oppure occorreva mantenere sincrone tra loro le velocità di più macchine. Solo negli ultimi anni, lo sviluppo dei convertitori statici ha reso possibile il pratico impiego di macchine sincrone come attuatori a velocità variabile.

A differenza del rotore della macchina asincrona, quello di un motore sincrono presenta un avvolgimento monofase in corrente continua e svolge la funzione di induttore. La struttura magnetica del rotore può essere realizzata secondo due diverse modalità costruttive; infatti, l'avvolgimento rotorico può essere distribuito in cave disposte all'esterno del rotore o può essere avvolto su espansioni polari. Nel primo caso, la riluttanza magnetica è uguale in ogni direzione trasversale della macchina (macchina isotropa); nel secondo caso, invece, la riluttanza magnetica è diversa a seconda della direzione (macchina anisotropa). Gli estremi dell'avvolgimento rotorico sono accessibili dall'esterno mediante anelli e spazzole; in alcuni casi, per evitare contatti striscianti, l'alimentazione del circuito di rotore è effettuata impiegando un trasformatore rotante collegato

all'avvolgimento rotorico mediante un raddrizzatore a diodi posto sul rotore.

Oltre all'avvolgimento descritto, il rotore presenta spesso un avvolgimento in corto circuito simile alla gabbia di un motore asincrono (gabbia smorzatrice). Lo scopo di tale gabbia è quello di opporsi a eventuali differenze tra la velocità istantanea del rotore e la pulsazione delle tensioni o delle correnti applicate allo statore. La gabbia smorzatrice contribuisce, quindi, a ridurre le eventuali coppie alternative dovute ad armoniche presenti nelle tensioni o nelle correnti di alimentazione oppure ad armoniche di spazio dovute alla distribuzione non perfettamente sinusoidale del flusso e degli avvolgimenti statorici della macchina. In macchine di piccola potenza (dell'ordine di qualche kW), inoltre, la gabbia smorzatrice può permettere l'avviamento della macchina anche quando la frequenza applicata allo statore venga mantenuta costante (macchine autoavvianti).

L'aumento dello spessore del traferro provoca un degrado delle caratteristiche della macchina molto meno significativo di quello prodotto sul motore asincrono; per questo motivo, i motori sincroni possono raggiungere potenze notevolmente superiori.

Molto spesso, infine, nelle macchine sincrone di piccola potenza, il campo induttore è ottenuto, invece che con un avvolgimento, impiegando magneti permanenti.

Organizzazione generale

Lo studio del comportamento statico e dinamico dei motori in corrente alternata è più complesso e laborioso di quello dei motori in corrente continua e, per effettuarlo, si assumono, in genere, alcune ipotesi semplificative che consistono nel trascurare le eventuali anisotropie presenti nel circuito magnetico, nel considerare il circuito magnetico lineare e nel supporre che tutte le perdite siano dovute solo alle correnti statoriche e rotoriche (cioè, assumere nulle le perdite nel ferro). Risulta, inoltre, conveniente ricorrere ad una schematizzazione bifase equivalente, secondo due assi ortogonali, che permette di ottenere una ulteriore semplificazione delle equazioni differenziali che descrivono il comportamento dinamico del motore.

Il Capitolo 1 presenta la trasformazione che consente di ricavare la schematizzazione bifase equivalente di un avvolgimento trifase. Il Capitolo 2 descrive le varie possibilità impiegate per alimentare, mediante un convertitore statico, un avvolgimento trifase. Nel Capitolo 3, la trasformazione bifase equivalente è applicata per ricavare varie formulazioni del modello bifase del motore asincrono in modo da poter utilizzare quella più opportuna, a seconda del particolare impiego. Il Capitolo 4 mostra le caratteristiche statiche del motore asincrono trifase. Il Capitolo 5 presenta una breve descrizione delle principali modalità di controllo del motore ottenute agendo sul circuito di statore o su quello di rotore.

I successivi capitoli sono dedicati al controllo in frequenza, che costituisce la modalità maggiormente impiegata negli azionamenti con motore asincrono, analizzando sia il comportamento statico che quello dinamico della macchina. In particolare, nei Capitoli 6 e 7 sono descritte le modalità di controllo di tipo tradizionale realizzate, rispettivamente, con alimentazione a tensione e a corrente impressa. Il Capitolo 8 è relativo al controllo ad orientamento di campo, che risulta attualmente la tecnica più diffusa negli azionamenti in cui sono richieste elevate prestazioni dinamiche.

Alla fine di alcuni capitoli, è riportata una dettagliata bibliografia sugli argomenti trattati. I testi di maggiore interesse nel settore sono elencati, invece, nella bibliografia generale riportata alla fine del libro.

SCHEMATIZZAZIONE BIFASE EQUIVALENTE DI UN AVVOLGIMENTO TRIFASE

La schematizzazione bifase equivalente permette di semplificare lo studio di uno o più avvolgimenti polifasi e, quindi, anche quello di un avvolgimento trifase.

L1 Modello bifase di un avvolgimento trifase

Si consideri un avvolgimento trifase simmetrico, cioè costituito da tre avvolgimenti monofasi uguali disposti in modo che i loro assi formino tra loro angoli di $2\pi/3$, come mostrato in Fig. 1.1.

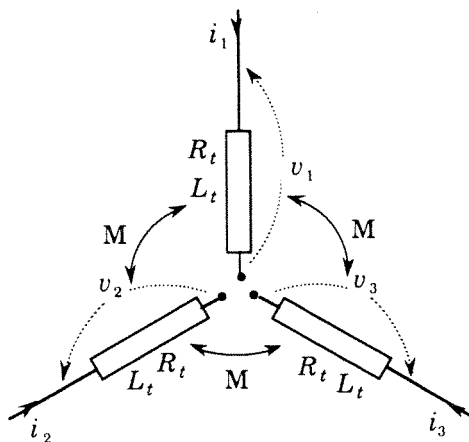


Figura 1.1

Trascurando le eventuali perdite dovute alla variazione del flusso nei circuiti magnetici, le tensioni applicate ai singoli avvolgimenti sono legate alle correnti e ai flussi dalle seguenti equazioni differenziali:

$$v_1 = R_t i_1 + \frac{d\phi_1}{dt} \quad (1.1-a)$$

$$v_2 = R_t i_2 + \frac{d\phi_2}{dt} \quad (1.1-b)$$

$$v_3 = R_t i_3 + \frac{d\phi_3}{dt}, \quad (1.1-c)$$

essendo R_t la resistenza di ogni avvolgimento. Inoltre, nell'ipotesi di linearità dei circuiti magnetici, i flussi e le correnti sono legati tra loro dalle seguenti relazioni lineari:

$$\phi_1 = L_t i_1 + M(i_2 + i_3) \quad (1.2-a)$$

$$\phi_2 = L_t i_2 + M(i_1 + i_3) \quad (1.2-b)$$

$$\phi_3 = L_t i_3 + M(i_1 + i_2), \quad (1.2-c)$$

in cui L_t ed M rappresentano rispettivamente l'induttanza propria di ogni avvolgimento e la mutua induttanza tra due avvolgimenti.

Il comportamento del circuito può, pertanto, essere studiato mediante un sistema di tre equazioni differenziali tra loro dipendenti. Come già accennato, tale sistema può essere semplificato ricorrendo alla schematizzazione bifase equivalente, che consente di ottenere un sistema composto da tre equazioni differenziali indipendenti. Il passaggio dalla schematizzazione trifase a quella bifase può essere effettuato impiegando vari approcci; nel seguito, si impiegherà un approccio basato su una opportuna trasformazione lineare di variabili definita a priori, mentre una interpretazione fisica della trasformazione e un approccio più sistemistico sono riportati nella Appendice.

Nella trasformazione bifase equivalente, le variabili (tensioni, correnti e flussi) sono rappresentate, invece che dalle loro componenti secondo gli avvolgimenti 1, 2 e 3, dalle componenti secondo tre avvolgimenti fittizi α , β e o . Le componenti di ciascuna variabile, riferite a tali avvolgimenti, sono legate a quelle riferite agli avvolgimenti 1, 2 e 3 mediante le seguenti trasformazioni lineari:

$$x_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[x_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3) \right] \quad (1.3-a)$$

$$x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_2 - x_3) \quad (1.3-b)$$

$$x_o = \frac{1}{\sqrt{3}} (x_1 + x_2 + x_3), \quad (1.3-c)$$

in cui la variabile "x" può rappresentare o la tensione o la corrente o il flusso.

Le equazioni (1.3) rappresentano una trasformazione biunivoca; infatti, dalle componenti x_α , x_β e x_o è possibile ricavare le componenti x_1 , x_2 e x_3 mediante le seguenti equazioni:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2x_\alpha + \sqrt{2}x_o) \quad (1.3'-a)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-x_\alpha + \sqrt{3}x_\beta + \sqrt{2}x_o) \quad (1.3'-b)$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-x_\alpha - \sqrt{3}x_\beta + \sqrt{2}x_o). \quad (1.3'-c)$$

Sostituendo nelle equazioni (1.1) le espressioni delle tre componenti della tensione, della corrente e del flusso fornite dalle equazioni (1.3') e moltiplicando ambo i membri di tutte le equazioni per $\sqrt{6}$, si ottiene

$$2v_\alpha + \sqrt{2}v_o = R_t(2i_\alpha + \sqrt{2}i_o) + 2\frac{d\phi_\alpha}{dt} + \sqrt{2}\frac{d\phi_o}{dt}$$

$$-v_\alpha + \sqrt{3}v_\beta + \sqrt{2}v_o = R_t(-i_\alpha + \sqrt{3}i_\beta + \sqrt{2}i_o) - \frac{d\phi_\alpha}{dt} + \sqrt{3}\frac{d\phi_\beta}{dt} + \sqrt{2}\frac{d\phi_o}{dt}$$

$$-v_\alpha - \sqrt{3}v_\beta + \sqrt{2}v_o = R_t(-i_\alpha - \sqrt{3}i_\beta + \sqrt{2}i_o) - \frac{d\phi_\alpha}{dt} - \sqrt{3}\frac{d\phi_\beta}{dt} + \sqrt{2}\frac{d\phi_o}{dt};$$

esplicitando le componenti v_α , v_β e v_o della tensione, si ricavano, quindi, le seguenti tre equazioni differenziali:

$$v_\alpha = R_t i_\alpha + \frac{d\phi_\alpha}{dt} \quad (1.4-a)$$

$$v_\beta = R_t i_\beta + \frac{d\phi_\beta}{dt} \quad (1.4-b)$$

$$v_o = R_t i_o + \frac{d\phi_o}{dt}. \quad (1.4-c)$$

Ripetendo lo stesso procedimento per le equazioni (1.2) si ottengono, infine, i seguenti legami tra le componenti del flusso e della corrente secondo gli avvolgimenti α , β e o :

$$\phi_\alpha = (L_t - M) i_\alpha \quad (1.5-a)$$

$$\phi_\beta = (L_t - M) i_\beta \quad (1.5-b)$$

$$\phi_o = (L_t + 2M) i_o. \quad (1.5-c)$$

Le equazioni (1.4) e (1.5) coincidono con quelle che descrivono il comportamento del sistema di avvolgimenti mostrato in Fig. 1.2 e composto da due avvolgimenti (α e β) uguali e perpendicolari tra loro e, quindi, non concatenati e da un terzo avvolgimento (o) a sua volta non concatenato con i precedenti, purché i parametri di tali avvolgimenti siano legati a quelli dell'avvolgimento trifase dalle seguenti relazioni:

$$R = R_o = R_t \quad L = L_t - M \quad L_o = L_t + 2M.$$

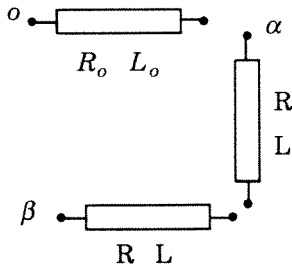


Figura 1.2

Si può, inoltre, osservare che, nel caso di collegamento a triangolo, la somma delle tensioni v_1 , v_2 e v_3 applicate all'avvolgimento trifase è nulla e, quindi, anche la tensione v_o risulta nulla. Dualmente, nel caso di collegamento a stella senza neutro, la somma delle tre correnti i_1 , i_2 e i_3 (e, quindi, la corrente i_o) risulta nulla.

Pertanto, poiché l'avvolgimento o non si concatena con nessun altro avvolgimento, quando l'avvolgimento trifase è alimentato con solo tre fili sia la tensione v_o che la corrente i_o sono nulle ed è sufficiente, nella schematizzazione bifase, considerare solo gli avvolgimenti α e β e il modello bifase equivalente risulta costituito dalle seguenti due equazioni differenziali:

$$v_\alpha = R i_\alpha + \frac{d\phi_\alpha}{dt} \quad (1.6-a)$$

$$v_\beta = R i_\beta + \frac{d\phi_\beta}{dt} \quad (1.6-b)$$

e dai seguenti legami tra le componenti del flusso e della corrente:

$$\phi_\alpha = L i_\alpha \qquad \phi_\beta = L i_\beta. \qquad (1.7)$$

Si vuole ora determinare come si modificano le relazioni che legano tra loro le componenti della tensione, della corrente e del flusso quando, invece delle proiezioni secondo gli assi α e β fissi con l'avvolgimento trifase[§], si considerano le proiezioni secondo due assi ortogonali d e q fittizi e rotanti con velocità angolare ω rispetto agli assi α e β , come mostrato in Fig. 1.3.

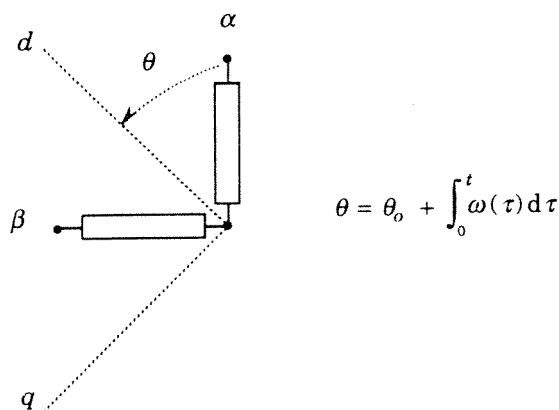


Figura 1.3

Se x_α e x_β sono le componenti del generico vettore x (tensione o corrente o flusso) secondo gli assi α e β e x_d e x_q sono le componenti dello stesso vettore secondo gli assi d e q sfasati dell'angolo θ rispetto agli assi α e β , tra x_d , x_q e x_α , x_β sussistono le seguenti relazioni:

$$x_d = x_\alpha \cos\theta + x_\beta \sin\theta \qquad (1.8-a)$$

$$x_q = -x_\alpha \sin\theta + x_\beta \cos\theta \qquad (1.8-b)$$

o, equivalentemente

$$x_\alpha = x_d \cos\theta - x_q \sin\theta \qquad (1.8'-a)$$

[§] Il concetto di vettore rappresentativo di una grandezza trifase è illustrato nella Appendice.

$$x_\beta = x_d \sin\theta + x_q \cos\theta. \quad (1.8'-b)$$

Sostituendo nelle equazioni (1.6) le espressioni di i_α , i_β , v_α e v_β fornite dalle relazioni (1.8') particolarizzate per la corrente e la tensione, si ha

$$v_d \cos\theta - v_q \sin\theta = R(i_d \cos\theta - i_q \sin\theta) + \frac{d\phi_\alpha}{dt} \quad (1.9-a)$$

$$v_d \sin\theta + v_q \cos\theta = R(i_d \sin\theta + i_q \cos\theta) + \frac{d\phi_\beta}{dt}. \quad (1.9-b)$$

Derivando rispetto al tempo le relazioni (1.8') particolarizzate per il flusso, e considerando che

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega \, d\tau,$$

si ricava

$$\frac{d\phi_\alpha}{dt} = \frac{d\phi_d}{dt} \cos\theta - \frac{d\phi_q}{dt} \sin\theta - \omega \phi_d \sin\theta - \omega \phi_q \cos\theta \quad (1.10-a)$$

$$\frac{d\phi_\beta}{dt} = \frac{d\phi_d}{dt} \sin\theta + \frac{d\phi_q}{dt} \cos\theta + \omega \phi_d \cos\theta - \omega \phi_q \sin\theta. \quad (1.10-b)$$

Sostituendo, infine, queste espressioni delle derivate dei flussi nelle equazioni (1.9) ed esplicitando v_d e v_q , si ottengono i seguenti legami tra le componenti della tensione, della corrente e del flusso riferite agli assi d e q rotanti a velocità ω rispetto al sistema di assi fissi:

$$v_d = R i_d + \frac{d\phi_d}{dt} - \omega \phi_q \quad (1.11-a)$$

$$v_q = R i_q + \frac{d\phi_q}{dt} + \omega \phi_d. \quad (1.11-b)$$

A queste ultime equazioni differenziali si devono poi aggiungere le espressioni delle componenti del flusso in funzione di quelle della corrente, cioè

$$\phi_d = L i_d \quad (1.12-a)$$

$$\phi_q = L i_q, \quad (1.12-b)$$

che si ottengono considerando che i legami tra le componenti del flusso e della corrente sono istantanei.

Da quanto esposto, si può affermare che è possibile effettuare una schematizzazione equivalente ad un avvolgimento trifase mediante una coppia di avvolgimenti α e β , fissi rispetto all'avvolgimento trifase e ortogonali tra loro, e un avvolgimento o che non si concatena con nessuno dei due precedenti. E', inoltre, possibile prendere in considerazione, invece delle componenti della tensione, della corrente e del flusso secondo gli assi α e β , le componenti delle stesse grandezze secondo due assi ortogonali d e q fittizi e rotanti con velocità ω rispetto all'avvolgimento reale; in quest'ultimo caso, però, occorre tener conto, nelle equazioni differenziali che legano le componenti della tensione, della corrente e del flusso, dei termini mozionali $-\omega\phi_d$ e $\omega\phi_q$. Si può, infine, osservare che la schematizzazione bifase equivalente (con assi fissi o rotanti) può essere adottata anche nel caso in cui l'avvolgimento trifase abbia un numero di coppie polari "p" diverso dall'unità; in questo caso, però, la velocità angolare ω che compare nelle equazioni (1.11) deve essere espressa in radianti elettrici al secondo, cioè deve essere pari alla velocità angolare degli assi rotanti moltiplicata per il numero di coppie polari.