Collana di esercizi di Algebra lineare e Geometria

2

DANTE, *Inf.,* 17,18, né fuor tai tele per Aragne imposte.
Pur., 12,43, Oh folle Aragne, sì vedea io te
già mezza aragna, triste in su li stracci
dell'opera che mal per te sì fe'.

Giulio Campanella

Matrici e sistemi di equazioni lineari

di *Gioacchino Onorati*
00133 Roma, via P. Cardella, 37
tel. (06) 2052887 telefax 2053382

ISBN 88-7999-004-2

I edizione: settembre 1996

AVVERTENZA

Gli esercizi contenuti in questo e negli altri fascicoli sono stati preparati per alcuni corsi di Geometria I per studenti di Matematica, tenuti presso l'Università 'La Sapienza' e presso l'Università di Roma Tre, a partire dall'A.A. 1991–92.

L'intera raccolta di esercizi è suddivisa in dieci Capitoli [distribuiti in otto fascicoli]. Ognuno di essi è preceduto da un'esposizione riassuntiva dei concetti e dei risultati che vengono utilizzati nello svolgimento degli esercizi di quel capitolo e dei capitoli successivi. Tali riassunti [che vanno almeno letti per comprendere le notazioni usate negli esercizi] sono abbastanza completi [quasi ogni risultato è dimostrato], ma sono scritti, in alcune parti, in forma concisa e schematica; presuppongono quindi che lo studente abbia in parte già studiato i corrispondenti argomenti del proprio libro di testo.

Gli esercizi proposti sono generalmente molto semplici e la loro difficoltà aumenta molto gradualmente. Gli esercizi contrassegnati con un asterisco [a partire dal Capitolo **IV**] *sono stati assegnati ad una prova d'esame o di esonero (dalla prova scritta).*

INDICE DEI CAPITOLI

INDICE

Capitolo II

MATRICI E SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

2.1 Matrici.

DEFINIZIONE **1.** *Sia K un campo e siano m, n due interi positivi. Una* ***matrice*** A ***a valori in*** K, ***ad*** m ***righe ed*** n ***colonne*** *[cioè* ***di tipo*** (m, n)*] è un insieme ordinato di mn elementi di K, disposti su m righe ed n colonne:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

L'insieme delle matrici (a valori in K) ad m righe ed n colonne verrà indicato con $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$. Ovviamente $\mathfrak{M}_{1,1}(K)$ è identificabile con K.

Sia $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$. Per abbreviare le notazioni, scriveremo talvolta $A = (a_{ij})$. L'elemento a_{ij} [situato sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna di A (per $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$)] sarà talvolta denotato anche $(A)_{ij}$. Inoltre indicheremo con $A^{(i)}$ la i–esima riga $(a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})$ di A e con $A_{(j)}$ la j-esima colonna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ di A. Pertanto: $A = \left(A_{(1)}\ A_{(2)} \dots A_{(n)}\right) = \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(m)} \end{pmatrix}$.

OSSERVAZIONE **1.** Per ogni intero $n \geq 1$, consideriamo il prodotto cartesiano K^n di n copie di K. Ovviamente esiste una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi K^n, $\mathfrak{M}_{1,n}(K)$ e $\mathfrak{M}_{n,1}(K)$.

Si vedrà presto [cfr. Oss. **3**] che è conveniente identificare K^n con $\mathfrak{M}_{n,1}(K)$, cioè identificare la n-pla $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ con la corrispondente *matrice colonna* $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(K)$. Denoteremo le matrici colonna con lettere in grassetto e le n-ple con lettere sottolineate; tuttavia alcune volte (soprattutto negli ultimi capitoli) per non appesantire le notazioni indicheremo matrici colonna ed n-ple nello stesso modo.

© 88-7999-004-2

DEFINIZIONE **2**. *Sia* $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$. *Si chiama* ***matrice trasposta*** *di* A *la matrice* $B \in \mathfrak{M}_{n,m}(K)$ *così definita:*

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, m.$$

La matrice B *verrà denotata con* ${}^tA$. *Ovviamente* ${}^t({}^tA) = A$. *Inoltre:*

$$({}^tA)^{(i)} = {}^t(A_{(i)}) \ \text{e} \ ({}^tA)_{(j)} = {}^t(A^{(j)}).$$

Infatti:

$$({}^tA)^{(i)} = (b_{i1}\ b_{i2} \ldots b_{im}) = (a_{1i}\ a_{2i} \ldots a_{mi}) = {}^t\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = {}^t(A_{(i)});$$

in modo analogo si verifica l'altra uguaglianza.

DEFINIZIONE **3**. *In* $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$ *sono definite le due operazioni di* ***somma di matrici*** *e di* ***moltiplicazione di una matrice per uno scalare***:

$$+ : \mathfrak{M}_{m,n}(K) \times \mathfrak{M}_{m,n}(K) \to \mathfrak{M}_{m,n}(K) \ \text{tale che:}$$
$$(A, B) \to A + B, \quad \text{con} \ (A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij};$$
$$\cdot : K \times \mathfrak{M}_{m,n}(K) \to \mathfrak{M}_{m,n}(K) \ \text{tale che:}$$
$$(c, A) \to cA, \quad \text{con} \ (cA)_{ij} = c(A)_{ij}.$$

PROPOSIZIONE **1**. *L'insieme* $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$, *dotato delle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare, è un* K*-spazio vettoriale di dimensione* mn.

DIM. Si osservi che l'elemento neutro della somma è la *matrice nulla* $\mathbf{0}$ [tale che $\mathbf{0}_{ij} = 0$, $\forall i, j$]; l'opposto della matrice A è la matrice $-A$ [tale che $(-A)_{ij} = -(A_{ij})$, $\forall i, j$]. Le verifiche degli assiomi di K-spazio vettoriale sono lasciate al lettore.

Infine, per verificare che $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$ ha dimensione mn, basta determinarne una base. Per $h = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$, consideriamo le mn matrici $E^{hk} \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$ così definite:

$$(E^{hk})_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } (i,j) \neq (h,k), \\ 1 & \text{se } (i,j) = (h,k) \end{cases}$$

[in altri termini, E^{hk} ha un unico elemento non nullo, cioè $(E^{hk})_{hk} = 1$]. Si osserva subito che, $\forall A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$, risulta:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E^{ij}$$

[e dunque le mn matrici E^{hk} formano un sistema di generatori di $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$]. Inoltre:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E^{ij} = \mathbf{0} \implies a_{ij} = 0 \quad (\forall i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$$

[e dunque le nm matrici E^{hk} sono linearmente indipendenti]. Pertanto tali matrici formano una base di $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$. Tale base è detta *base canonica* di $\mathfrak{M}_{m,n}(K)$.□

DEFINIZIONE **4**. *Una matrice $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$ è detta* ***matrice quadrata (di ordine n)*** *se $m = n$. La n–pla $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ è detta* ***diagonale*** *di A. L'insieme $\mathfrak{M}_{n,n}(K)$ verrà indicato, più semplicemente, con $\mathfrak{M}_n(K)$.*

Una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(K)$ è detta ***triangolare superiore*** *[rispett.* ***triangolare inferiore****] se $a_{ij} = 0$, $\forall i > j$ [rispett. $a_{ij} = 0$, $\forall i < j$]. Una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}_n(K)$ è detta* ***matrice diagonale*** *se è triangolare superiore ed inferiore [cioè se $a_{ij} = 0$, $\forall i \neq j$] ed una matrice diagonale A è detta* ***matrice scalare*** *se risulta: $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$. Una particolare matrice scalare è la* ***matrice unità*** *I_n, tale che $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$.*

Infine, una matrice quadrata $A \in \mathfrak{M}_n(K)$ è detta ***simmetrica*** *se $A = {}^tA$ [cioè se $a_{ij} = a_{ji}$] ed è detta* ***antisimmetrica*** *se $A = -({}^tA)$ [cioè se $a_{ij} = -a_{ji}$].*

DEFINIZIONE **5**. *Se $A = (a_1\ a_2 \dots a_n) \in \mathfrak{M}_{1,n}(K)$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(K)$, si definisce* ***prodotto (righe per colonne) di A per B*** *l'elemento*

$$AB = (a_1\ a_2 \dots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \in K.$$

Più generalmente, se $A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K)$ e $B \in \mathfrak{M}_{n,p}(K)$, si chiama ***matrice prodotto (righe per colonne) di A per B*** *la matrice:*

$$AB = \begin{pmatrix} A^{(1)}B_{(1)} & A^{(1)}B_{(2)} & \dots & A^{(1)}B_{(p)} \\ A^{(2)}B_{(1)} & A^{(2)}B_{(2)} & \dots & A^{(2)}B_{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{(m)}B_{(1)} & A^{(m)}B_{(2)} & \dots & A^{(m)}B_{(p)} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{m,p}(K),$$

dove $A^{(i)}B_{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ [per $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$].

[Si noti che il prodotto AB è definito soltanto se le colonne di A sono quante le righe di B. Ovviamente AB è sempre definito se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine].

PROPOSIZIONE **2**. *(i) Il prodotto righe per colonne è associativo, cioè:*

$$(AB)C = A(BC), \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K),\ \forall B \in \mathfrak{M}_{n,p}(K),\ \forall C \in \mathfrak{M}_{p,q}(K).$$

(ii) Valgono le seguenti proprietà:

$$(A+B)C = AC + BC, \quad \forall A, B \in \mathfrak{M}_{m,n}(K),\ \forall C \in \mathfrak{M}_{n,p}(K);$$
$$A(B+C) = AB + AC, \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K),\ \forall B, C \in \mathfrak{M}_{n,p}(K);$$
$$AI_n = A = I_m A, \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K);$$
$$(cA)B = c(AB) = A(cB), \quad \forall c \in K,\ \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K),\ \forall B \in \mathfrak{M}_{n,p}(K);$$
$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB, \quad \forall A, B \in \mathfrak{M}_{m,n}(K);$$
$${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA, \quad \forall A \in \mathfrak{M}_{m,n}(K),\ \forall B \in \mathfrak{M}_{n,p}(K).$$

(iii) Per ogni intero $n \geq 1$, $\mathfrak{M}_n(K)$ è un anello unitario [non commutativo, se $n \geq 2$], rispetto alla somma ed al prodotto righe per colonne.

DIM. Per (i) e (ii) cfr. Eserc. **4**, **6**.

(iii) Dalla Prop. **1**, $(\mathfrak{M}_n(K), +)$ è un gruppo commutativo. Da (i), il prodotto righe per colonne è associativo; da (ii), valgono le proprietà distributive (destra e sinistra) ed esiste un elemento neutro (la matrice unità I_n). Pertanto $\mathfrak{M}_n(K)$ è un anello unitario. Per $n = 1$, tale anello si identifica al campo K. Resta da verificare che, per ogni $n \geq 2$, tale anello non è commutativo. Infatti, considerate ad esempio le due matrici E^{12} e E^{21}, risulta:

$$E^{12}E^{21} = E^{11}, \text{ mentre } E^{21}E^{12} = E^{22}. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE **2** Consideriamo in $\mathfrak{M}_n(K)$ il sottoinsieme $\mathbf{GL}_n(K)$ delle *matrici invertibili*, cioè:

$$\mathbf{GL}_n(K) = \{A \in \mathfrak{M}_n(K) \ : \ \exists B \in \mathfrak{M}_n(K) \text{ tale che } AB = I_n = BA\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathbf{GL}_n(K)$ è un gruppo rispetto al prodotto righe per colonne. Tale gruppo è detto ***gruppo generale lineare di ordine*** n ***su*** K. Se $A \in \mathbf{GL}_n(K)$ e se $AB = I_n = BA$, la matrice B è la matrice inversa di A (rispetto al prodotto righe per colonne) ed è denotata A^{-1}.

Lasciamo al lettore la verifica delle seguenti proprietà:

(i) $\forall A_1, A_2 \in \mathbf{GL}_n(K)$ risulta: $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$.

(ii) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(K)$, se $AB = I_n$, allora $BA = I_n$ e dunque $B = A^{-1}$.

(iii) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(K)$ risulta: ${}^tA \in \mathbf{GL}_n(K)$ e $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(iv) $\forall A \in \mathbf{GL}_n(K)$ e $\forall c \in K$, $c \neq 0$, risulta: $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$. In particolare $(-A)^{-1} = -(A^{-1})$.

DEFINIZIONE **6**. *Una matrice $A \in \mathfrak{M}_n(K)$ è detta **ortogonale** se risulta:*

$${}^tA\,A = I_n = A\,{}^tA \quad [\textit{cioè } A^{-1} = {}^tA].$$

© 88-7999-004-2

L'insieme delle matrici ortogonali è denotato $\mathbf{O}_n(K)$. *Si verifica facilmente che tale insieme è un sottogruppo di* $\mathbf{GL}_n(K)$, *detto* ***gruppo ortogonale di ordine*** n ***su*** K.

Nel Cap. **VI** sarà necessario conoscere gli elementi del gruppo $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$. Anticipiamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE **3**. *Il gruppo* $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ *è costituito da tutte e sole le matrici:*

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

DIM. Si verifica (con un semplice calcolo diretto) che, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$:

$$R_\alpha\, {}^tR_\alpha = I_n = {}^tR_\alpha\, R_\alpha \quad \text{e} \quad S_\alpha\, {}^tS_\alpha = I_n = {}^tS_\alpha\, S_\alpha$$

Viceversa, si consideri un'arbitraria matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$. Vogliamo verificare che $A = R_\alpha$ oppure $A = S_\alpha$, $\exists\alpha \in \mathbb{R}$. Per definizione:

$$A \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R}) \iff {}^tA\,A = I_n = A\,{}^tA \iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 = a^2 + b^2 \\ ab + cd = 0 = ac + bd \\ b^2 + d^2 = 1 = c^2 + d^2. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni segue: $b^2 = c^2$. Si hanno quindi due casi:

$$(i)\ \ b = c; \qquad (ii)\ \ b = -c.$$

Nel caso (i), dalle seconde due precedenti equazioni segue che $(a+d)c = 0$ e dunque si hanno due possibilità:

$$(i')\ \ c = 0; \qquad (i'')\ \ a + d = 0.$$

Nel caso (i') si ha:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \text{ con } a^2 = d^2 = 1$$

e pertanto A è una delle seguenti quattro matrici:

$$(\bullet) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso (i'') si ha:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \text{ con } a^2 + b^2 = 1.$$

Veniamo al caso (ii). Procedendo come sopra, si ottiene: $(a - d)c = 0$ e dunque si hanno ancora due possibilità:

$$(ii')\ \ c = 0; \qquad (ii'')\ \ a - d = 0.$$

Nel caso (ii') si riottiene:

© 88-7999-004-2

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \text{con } a^2 = d^2 = 1$$

e pertanto A è ancora una delle quattro matrici (•). Nel caso (*ii*") si ha:

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \text{con } a^2 + c^2 = 1.$$

Si osservi che le quattro matrici (•) si riottengono come casi particolari tra le matrici ottenute nei casi (*i*") e (*ii*") [ponendo $b = c = 0$ e $a^2 = 1$]. Pertanto [indicando c con b nel caso (*ii*")] possiamo concludere che, $\forall A \in \mathbf{O}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{oppure } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1.$$

Poiché $a^2 + b^2 = 1$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tale che $(a, b) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$: ne segue l'asserto. □

2.2 Sistemi di equazioni lineari. L'algoritmo di Gauss–Jordan

DEFINIZIONE 7. *Un* ***sistema di*** m ***equazioni lineari in*** n ***indeterminate*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ***a valori in un campo*** K *[abbreviato SL oppure* $SL(m, n, K)$*] è un insieme di* m *equazioni del tipo:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

o (in forma abbreviata):

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad [i = 1, \ldots, m], \right.$$

dove gli elementi $a_{ij}, b_i \in K$ *sono detti rispettivamente* ***coefficienti*** *e* ***termini noti*** *delle equazioni del SL. Si chiama* ***soluzione*** *di tale SL ogni* n*–pla* $\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in K^n$ *tale che:*

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j = b_i \quad [i = 1, \ldots, m] \right.$$

Un SL privo di soluzioni è detto ***incompatibile****; altrimenti è detto* ***compatibile*** *o* ***risolubile****.*

Un $SL(m, n, K)$ *è detto* ***omogeneo*** *[abbreviato* $SLO(m, n, K)$*] se i suoi termini noti sono tutti nulli. Ovviamente un SLO è sempre compatibile: infatti ammette come soluzione la* n*–pla nulla* $\underline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, *detta* ***soluzione banale****. Le altre sue (eventuali) soluzioni sono dette* ***autosoluzioni****.*

Infine, assegnato un $SL(m, n, K)$, *sostituendo i termini noti con* 0, *si ottiene un* $SLO(m, n, K)$, *detto* ***sistema lineare omogeneo associato*** *al SL dato.*