
Laura Gori – Maria Laura Lo Cascio – Francesca Pitolli

ESERCIZI DI CALCOLO NUMERICO

EDIZIONI KAPPA

Laura Gori

*Ordinario di Calcolo Numerico
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate
Università "La Sapienza" Roma*

Maria Laura Lo Cascio

*Associato di Analisi Numerica
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate
Università "La Sapienza" Roma*

Francesca Pitolli

*Associato di Analisi Numerica
Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate
Università "La Sapienza" Roma*

in km

© 2007 by Edizioni Kappa Piazza Borghese, 6 Roma Tel. +39 06 6790356

I Edizione 1999

II Edizione 2007

Composizione tipografica effettuata con il programma T_EX © dalla
CompoMat Loc. Braccione, 02040 Configni (RI) Telefax +39 0746 672240

Introduzione

Questo testo di esercizi presenta una raccolta di temi svolti e commentati, volti ad illustrare le caratteristiche applicative dei principali metodi numerici presentati nei Corsi dell'area "Calcolo Numerico", indirizzati agli studenti della Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma.

La maggior parte degli esercizi comprende una trattazione teorica, per la quale sono sufficienti gli strumenti acquisiti dallo studente nei Corsi di Analisi Matematica, ed uno sviluppo numerico, spesso da affrontare con l'ausilio del calcolatore. Numerosi, tra gli esercizi, sono quelli costituiti da ampliamento o rielaborazione di temi d'esame; ma, oltre a ciò, per rispondere alla richiesta degli studenti di disporre di prove d'esame svolte, si è ritenuto opportuno dedicare un Capitolo, il settimo, esclusivamente alla presentazione dei testi, ed alla successiva soluzione, di temi selezionati tra quelli proposti in sede di esame scritto negli anni più recenti (la scelta della diversa impostazione di presentazione di questi esercizi è dovuta all'obiettivo di indurre lo studente a controllare la soluzione solo dopo aver elaborato la propria!).

A proposito di questi esercizi, va sottolineato che le soluzioni sono presentate in forma volutamente semplice e dettagliata, secondo uno schema quale potrebbe essere seguito dallo studente durante la prova scritta, quando ha a disposizione un tempo relativamente limitato ed il solo ausilio di una calcolatrice tascabile, spesso, d'altronde, anche superflua. L'obiettivo di queste prove scritte, che sono solo una parte dell'esame, è infatti quello di verificare se lo studente è in grado di verificare le ipotesi minime di applicabilità di metodi ed algoritmi. Nelle soluzioni presentate sono stati tuttavia inseriti commenti e suggerimenti allo scopo di stimolare successivi approfondimenti.

Le notazioni e l'esposizione seguite fanno riferimento al testo "Calcolo Numerico", Laura Gori, Edizioni Kappa, 2006, (talora indicato nei richiami con [LG]).

Roma, febbraio 2007

GLI AUTORI

Indice

PREFAZIONE	Pag.	v
Capitolo 1 - <i>Soluzione di equazioni e sistemi di equazioni non lineari</i>	”	1
Capitolo 2 - <i>Problemi di algebra lineare numerica</i>	”	37
Capitolo 3 - <i>Interpolazione e approssimazione di funzioni</i>	”	71
Capitolo 4 - <i>Quadratura</i>	”	103
Capitolo 5 - <i>Equazioni alle differenze</i>	”	133
Capitolo 6 - <i>Equazioni differenziali ordinarie</i>	”	147
Capitolo 7 - <i>Prove d'esame</i>	”	171
<i>Testi</i>	”	171
<i>Soluzioni</i>	”	200

Capitolo 1

Soluzione di equazioni e sistemi di equazioni non lineari

≡ **Esercizio 1.1.** Risolvere l'equazione

$$f(x) = x \log_{1/3} x + 2 = 0$$

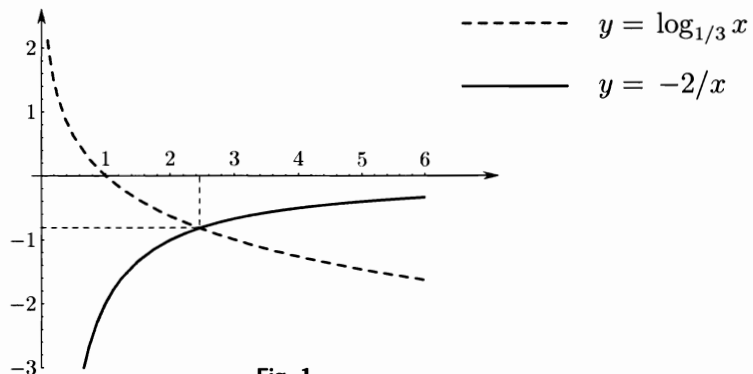
con il metodo delle bipartizioni (o dicotomico), applicato ad un conveniente intervallo $[a, b]$, determinando a priori il numero delle partizioni in relazione alla scelta di $[a, b]$, in modo da ottenere un errore che, in modulo, sia minore di 10^{-5} .

Soluzione

Mediante interpretazione geometrica si isola facilmente lo zero unico $\xi \in [a, b] := [2, 3]$ della funzione assegnata $f \in C[a, b]$, come si vede tracciando i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = \log_{1/3} x; \quad y = h(x) = -2/x$$

che hanno unica intersezione.



Il metodo delle bipartizioni si applica con il seguente algoritmo: posto $[a_1, b_1] = [a, b]$, si calcolano, per $i = 1, 2, \dots$:

$$m_i = \frac{a_i + b_i}{2}, \quad f(m_i);$$

se $f(m_i) = 0$, allora $\xi = m_i$, altrimenti:

se $f(m_i) \cdot f(b_i) < 0$, si pone $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [m_i, b_i]$,

se $f(m_i) \cdot f(b_i) > 0$, si pone $[a_{i+1}, b_{i+1}] = [a_i, m_i]$.

Si itera un numero n di volte tale che risulti

$$|e_n| = |m_n - \xi| \leq (b - a)/2^n < 10^{-5},$$

da cui segue

$$n > \log 10^5 / \log 2 \cong 16.61.$$

Mediante un semplice programma di calcolo automatico si determina la successione m_i seguente:

i	m_i	$f(m_i)$
1	2.500000	$-8.510947 \cdot 10^{-2}$
2	2.250000	$3.391839 \cdot 10^{-1}$
3	2.375000	$1.300328 \cdot 10^{-1}$
4	2.437500	$2.319121 \cdot 10^{-2}$
5	2.453125	$-3.077912 \cdot 10^{-2}$
..
16	2.450943	$1.883507 \cdot 10^{-5}$
17	2.450951	$5.602837 \cdot 10^{-6}$

Un'approssimazione migliore della radice ξ , che può essere ottenuta operando con 16 cifre significative, è il valore 2.45095393, cui corrisponde $f(2.45095393) \cong -3.4 \cdot 10^{-9}$.

≡ **Esercizio 1.2.** *Separare graficamente la radice dell'equazione*

$$f(x) = 1.2 \sin x + 0.7 \cos x - x = 0$$

(si tenga conto che: $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha)$, con $\alpha = \arctg B/A$) ed applicare il metodo delle approssimazioni successive per valutare tale radice con 5 cifre decimali esatte.

Soluzione

L'equazione data può essere riscritta nella forma

$$x = \sqrt{1.93} \sin(x + \alpha),$$

con $\alpha = \arctg(0.58\bar{3})$; il grafico della curva

$$y = h(x) = \sqrt{1.93} \sin(x + \alpha)$$

può essere ottenuto da quello di $y = \sin x$, con una traslazione che porta l'origine nel punto di ascissa $-\alpha$, e con una amplificazione delle ordinate di ampiezza $\sqrt{1.93}$; cosicché per $\bar{x} = \pi/2 - \alpha \cong 1.0427$, risulta

$$h(\bar{x}) = \sqrt{1.93}.$$

Intersecando la bisettrice con il grafico della $y = h(x)$ si individua $I = [\bar{x}, 1.5]$ come intervallo di separazione dell'unica radice positiva. Applichiamo due passi del metodo delle bisezioni, posto $a_0 = \bar{x}$, $b_0 = 1.5$, si ha

$$m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{\pi/2 - \alpha + 1.5}{2} \cong 1.27136094,$$

risulta $f(m_0)f(b_0) < 0$, quindi si pone $[a_1, b_1] = [m_0, b_0]$, da cui

$$m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\pi/2 - \alpha + 4.5}{4} \cong 1.3856805,$$

poiché $f(m_1)f(b_1) > 0$, si assume come intervallo di separazione di ξ , l'intervallo $[a, b] = [a_1, m_1]$. Avendo così raffinato l'intervallo di separazione della radice, applichiamo il metodo del punto unito all'intervallo $[a, b]$, assumendo come funzione di iterazione

$$\varphi(x) = h(x) = \sqrt{1.93} \sin(x + \alpha)$$

funzione $\in C^\infty(\mathbb{R})$, con

$$\varphi'(x) = \sqrt{1.93} \cos(x + \alpha);$$

per $x \in [a, b]$ risulta $x + \alpha \in [\pi/2, \pi]$, quindi sia φ che φ' sono decrescenti. Risulta:

$$a < \varphi(b) \cong 1.261818 \leq \varphi(x) \leq \varphi(a) \cong 1.3530937 < b,$$

inoltre φ' è decrescente su valori negativi per cui si ha:

$$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(b)| \cong 0.47 < 1.$$

Le ipotesi del teorema del punto unito sono soddisfatte e il metodo può essere applicato a partire da un qualsiasi punto $x_0 \in [a, b]$. Si genera la successione $x_{i+1} = \varphi(x_i)$, convergente a ξ , con approssimazioni per difetto e per eccesso alternativamente, in quanto φ' è negativa in $[a, b]$; ciò comporta che risulta $|e_n| = |x_n - \xi| \leq |x_n - x_{n-1}|$, inoltre che l'ordine di convergenza è 1; si ha infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} = |\varphi'(\xi)| > 0.$$

Assumendo $x_0 = 1.3$, si ottiene:

$$x_{11} = 1.331658, \quad \text{con} \quad |x_{11} - x_{10}| \cong 0.4 \cdot 10^{-5}.$$

Osservazione. La verifica della condizione $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ non è indispensabile quando già si conosca l'esistenza di un punto unito $\xi \in [a, b]$ e risulti $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, $x \in [a, b]$; in tal caso infatti la successione delle iterate converge a ξ , purché x_0 sia scelto in un *opportuno* intorno A di ξ . La difficoltà applicativa consiste proprio nell'individuazione di A ; per evitare ciò, è spesso più conveniente procedere come qui indicato e come sarà fatto in vari altri esercizi.

≡ **Esercizio 1.3.** Data l'equazione

$$f(x) = e^{-x} - 2(x-1)^2 = 0$$

separarne le radici, ed approssimare le radici separate con un conveniente metodo iterativo.

Soluzione

Tracciando i grafici delle funzioni

$$y = g(x) = e^{-x};$$

$$y = h(x) = 2(x - 1)^2$$

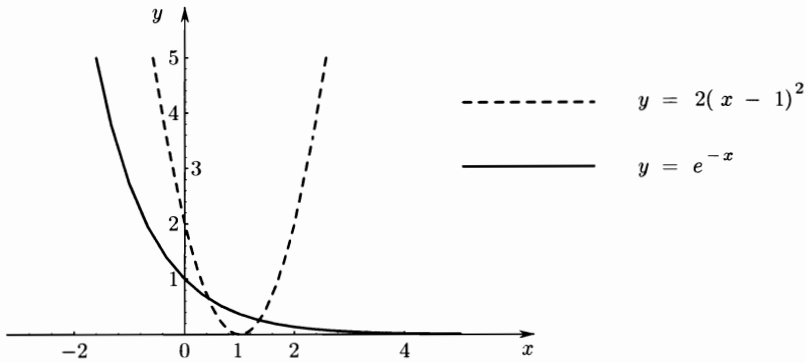


Fig. 2.

è facile isolare le radici $\xi_2 \in (0, 0.5)$, $\xi_3 \in (1, 1.5)$. Meno evidente è l'esistenza di un'ulteriore intersezione, corrispondente ad una ascissa negativa, per individuare la quale è più conveniente, in base ad ovvie considerazioni sull'ordine di grandezza delle ordinate, intersecare i grafici delle funzioni

$$y = g_1(x) = \log g(x) = -x$$

$$y = h_1(x) = \log h(x) = 2 \log |x - 1| + \log 2.$$

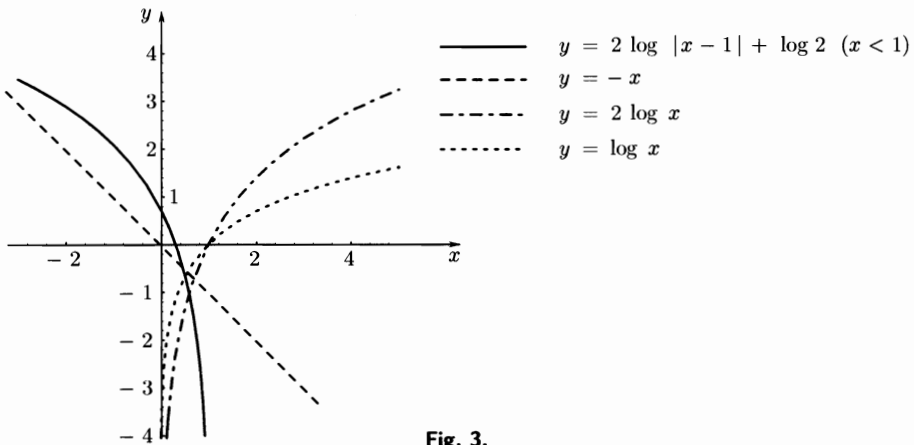


Fig. 3.

Osserviamo che i grafici di queste semplici funzioni possono essere dedotti in modo facile da quelli ben noti delle funzioni elementari con qualche trasformazione. Riportiamo in dettaglio un caso, a titolo di esempio. Il grafico della $y = h_1(x)$ per $x > 1$ può essere tracciato, a partire da quello di $y = \log x$, mediante una traslazione di una unità nel verso positivo dell'asse x . Si presenta poi un'amplificazione delle ordinate dovuta al fattore 2, e una traslazione, nel verso positivo dell'asse y , di ampiezza pari a $\log 2 \simeq 0.69315$; infine, dalla curva così tracciata, con una simmetria rispetto alla retta $x = 1$, si ottiene anche il grafico relativo alle ascisse $x < 1$.

Si separa una radice negativa $\xi_1 \in I_1 := [-4, -3]$; per la cui approssimazione, consideriamo la seguente funzione di iterazione $x = \varphi_1(x)$ con

$$(1) \quad x = \varphi_1(x) = -\log 2(x-1)^2$$

e quindi per $x \leq 1$,

$$x = \varphi_1(x) = -\log 2 - 2 \log(1-x).$$

In I_1 , la funzione $\varphi_1(x)$ è crescente (infatti $1-x$ è decrescente, quindi $-\log(1-x)$ è crescente), si ha così

$$-4 < -\log 50 = \varphi_1(-4) \leq \varphi_1(x) \leq \varphi_1(-3) = -\log 32 < -3$$

ovvero

$$\varphi_1(I_1) \subseteq I_1.$$

Inoltre, risulta $\varphi_1'(x)$ crescente e > 0 in I_1 , pertanto

$$0 < \varphi_1'(x) = 2/(1-x) \leq \varphi_1'(-3) = 0.5 < 1.$$

Si conclude così che $\varphi_1(x)$ in I_1 è una contrazione; ciò è sufficiente ad assicurare l'unicità della soluzione ξ_1 in I_1 e la convergenza del procedimento iterativo

$$\begin{cases} x_0 \in I_1 \\ x_n = \varphi_1(x_{n-1}). \end{cases}$$

Ad esempio, per $x_0 = -4$, $x_0 = -3$, si ha rispettivamente:

n	x_n	x_n
0	-4	-3
1	-3.912023005	-3.465735903
2	-3.876518929	-3.686015121
...
10	-3.851879937	-3.851737066
...
21	-3.851879489	-3.851879478
...
24	-3.851879486	-3.851879486

Si noti la lentezza del procedimento e la monotonia delle due successioni ottenute; cose entrambi prevedibili dal comportamento di $\varphi'_1(x)$ ($0 < \varphi'_1(x) < 0.5$), da cui segue inoltre, detto e_{1n} l'errore dell'iterata n -sima

$$|e_{1n}| = |\xi_1 - x_n| = |\varphi_1(\xi_1) - \varphi_1(x_{n-1})| \leq (0.5)^n.$$

La (1) non è adatta per approssimare ξ_2, ξ_3 ; risultando

$$\begin{cases} \varphi'_1(x) = \frac{2}{1-x} > 2, & x \in (0, 0.5) \\ |\varphi'_1(x)| = \left| -\frac{2}{x-1} \right| > 4, & x \in (1, 1.5). \end{cases}$$

L'equazione data può anche essere posta nella forma

$$\begin{cases} x = \varphi_2(x) = 1 - e^{-x/2}/\sqrt{2} > 0, & x < 1 \\ x = \varphi_3(x) = 1 + e^{-x/2}/\sqrt{2} > 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

È facile verificare che, posto $I_2 = [0, 0.5]$, $I_3 = [1, 1.5]$, si ha

$$\varphi_2(I_2) \subseteq I_2 \quad \varphi_3(I_3) \subseteq I_3;$$

infatti, entrambe le funzioni di iterazione sono monotone, e risulta

$$\begin{aligned} 0 < 0.2929 \cong \varphi_2(0) \leq \varphi_2(x) \leq \varphi_2(0.5) \cong 0.4993 < 0.5, \\ 1 < 1.3340 \cong \varphi_3(1.5) \leq \varphi_3(x) \leq \varphi_3(1) \cong 1.4389 < 1.5. \end{aligned}$$

Inoltre

$$(2) \quad \begin{cases} 0 < \varphi'_2(x) = e^{-x/2}/2\sqrt{2} \leq \varphi'_2(0) \cong 0.354, & x \in I_2 \\ 0 > \varphi'_3(x) = -e^{-x/2}/2\sqrt{2} \geq \varphi'_3(1) \simeq -0.215, & x \in I_3. \end{cases}$$