Aoi

Giacomo Lorenzoni

Argomentazioni analitiche di probabilità e statistica

Copyright © MMXIII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-5831-2

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.

Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.

I edizione: febbraio 2013

INDICE

1 INTRODUZIONE

Questo scritto sarà rilasciato ufficialmente dall'autore in data martedì 13 febbraio 2007 e subito dopo sarà disponibile all'indirizzo http://www.giacomo.lorenzoni.name/arganprobstat/.

Il lavoro tratta concetti fondamentali di probabilità e statistica, e ha come sua finalità più essenziale quella di pervenire alla formulazione dei cardini matematici di procedure di elaborazione numerica. Per questo fine sono usate argomentazioni deduttive, svolte in termini di logica e analisi matematica, e fondate su proposizioni ritenute certe.

Nella sez. 2 sono stabiliti la simbologia le definizioni e gli strumenti logici e matematici che sono usati successivamente. Questi contenuti, per lo più ampiamente noti e consolidati in Letteratura, sono esposti sinteticamente ma con procedimenti deduttivi e in forme immediatamente suscettibili di applicazione, e in qualche caso presentano approfondimenti e risultati particolari.

La sez. 3 introduce e circostanzia le proprietà fondamentali e le definizioni attinenti i concetti di evento e probabilità, che sono poi usate abitualmente nel seguito essendo peraltro la loro importanza evidentemente preminente in un contesto di probabilità e statistica.

Nella sez. 4 dapprima sono descritte le definizioni e le caratteristiche distintive di campione e universo statistici, poi per mezzo di queste si perviene ai basilari concetti di variabile casuale e sua densità di probabilità.

Nella sez. 5 sono trattate la densità di probabilità di un insieme e di una funzione di variabili casuali, e sono altresì stabilite ulteriori importanti proprietà di una variabile casuale.

Nella sez. 6 sono dedotte le proprietà essenziali (quali la densità di probabilità, il valore medio e la varianza) delle più usate variabili casuali; in particolare è dimostrato il teorema del limite centrale e, sulla base di questo, è descritto con valenza applicativa il metodo Montecarlo per il calcolo approssimato di un integrale.

La sez. 7 tratta estesamente e dettagliatamente il test statistico e le inerenti ipotesi, e perviene a limitazioni inferiori per la probabilità di queste.

Nella sez. 8 sono esposti un procedimento e le relative condizioni da cui risultano limitazioni (inferiore e superiore) per la probabilità che un'incognita si trovi in una data zona dell'asse reale, e inoltre sono descritti i casi di quattro incognite notevoli.

Le sezioni 9 e 10 trattano con molti particolari e nell'aspetto generalmente pluridimensionale le analisi della varianza e della regressione che hanno la nota importanza applicativa.

2 COGNIZIONI PRELIMINARI

2.1 *Nozioni di logica matematica*

Una proposizione è costituita da uno o più simboli grafici. Un nome di un oggetto è una proposizione che lo riferisce, e che lo contraddistingue in quanto gli attribuisce delle proprietà la cui totalità è posseduta solo da esso. Per esempio il nome "carattere tipografico" individua il noto oggetto che ha un peculiare complesso di proprietà tra le quali è compresa la proprietà "colore".

Una A≡B afferma che A e B sono due nomi diversi di uno stesso oggetto. Una A≢B nega la A≡B. Il nome di un oggetto inesistente è considerato irrilevante e come tale è trascurato.

Una proprietà può assumere uno o più valori. Per esempio: i valori rosso verde e blu sono tra quelli che possono essere assunti dalla proprietà colore; i valori −1.02 0.3 e 4 sono tra quelli che possono essere assunti dalla proprietà numero. Un valore di una proprietà può essere considerato come un'ulteriore proprietà. Una A=B afferma che la proprietà A ha il valore B o che le proprietà A e B hanno un uguale valore. Una A≠B nega la A=B.

Si distingue, tra le proprietà di un oggetto, una che ne è detta la principale. Il nome di un oggetto è usato anche per riferire la sua proprietà principale e viceversa.

Si dice che un oggetto è espresso da un valore o equivalentemente che esprime (o ha o assume, etc.) un valore, per affermare che tale valore è assunto dalla proprietà principale di tale oggetto. Un'espressione di un oggetto è un suo nome o una proposizione che ne esprime un valore.

La conoscenza di un oggetto riferito da un certo nome, è la conoscenza del valore di ogni proprietà che gli è attribuita dal detto nome. Tuttavia la conoscenza di un valore che esprime un oggetto di nome A, è chiamata brevemente la conoscenza di A.

Si dice che una proposizione è sottintesa, per affermare che essa, quando avrà influenza senza essere stata contraddetta o dubitata, sarà considerata vera anche senza essere menzionata.

Una grandezza è un oggetto che ha la proprietà numero come principale. Una A≡B implica la A=B quando A e B sono due grandezze. Ogni grandezza è sottintesa reale nel senso che i valori che essa può assumere non sono numeri complessi ma reali.

Un insieme è un oggetto costituito da un certo numero di individui, i quali sono a loro volta gli elementi del detto insieme. Si indica $\underline{\varnothing}$ l'insieme vuoto cioè quello che non ha alcun elemento. Un insieme è noto se sono tali tutti i suoi elementi.

Il significato di una proposizione rimane valido fino a quando non è modificato. Un numero tra parentesi tonde, che individua una o più righe in quanto è posto nel loro margine destro, è un nome della proposizione costituita da queste; un tale numero, all'esterno della sua sezione, è riferito anteponendogli la sigla numerica che identifica tale sezione. Le parentesi graffe {} delimitano una proposizione. Questo e ogni altro tipo di parentesi sono omessi quando sono contestualmente superflui. Ogni proposizione è sottintesa vera. Una proposizione può essere costituita da più proposizioni. L'introduzione di una proposizione in un'altra, è una riscrittura della seconda che si avvale di quanto è affermato dalla prima. Le parentesi ⦃ ⦄ delimitano una proposizione che definisce un evento (avendone perciò riferimento in sez. 3.1).

Un B è una specificazione di un A in quanto: B ha tutte le proprietà di A, A ha o non tutte le proprietà di B, una proprietà posseduta sia da A sia da B non ha necessariamente valori uguali nei due casi. Si pone la Æ⟨A /B /C⟩≡{l'essere A una specificazione di B di cui C} dove " /C" può essere assente causando così l'assenza di "di cui C".

2.1.1 *Proposizioni e deduzioni*

Intendendo che $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}_A$ e $\mathcal{P}_B$ sono tre proposizioni, si pongono le

$\wedge \equiv \mathrm{AND} \equiv$ congiunzione $\vee \equiv \mathrm{OR} \equiv \{$disgiunzione inclusiva$\}$ $\dot{\vee} \equiv \mathrm{XOR} \equiv \{$disgiunzione esclusiva$\}$
$\{\mathcal{P}\} \equiv \{\mathcal{P}$ è vera$\}$ $\neg\{\mathcal{P}\} \equiv \{\mathcal{P}$ è falsa$\}$ $\mathsf{f}\langle\mathcal{P}\rangle \equiv \{\mathcal{P}$ è respinta come se fosse falsa$\}$
$\mathsf{v}\langle\mathcal{P}\rangle \equiv \{\mathcal{P}$ è accettata come se fosse vera$\}$ $\sqcap\langle\mathcal{P}\rangle \equiv \{\neg\mathsf{f}\langle\mathcal{P}\rangle \wedge \neg\mathsf{v}\langle\mathcal{P}\rangle\}$

$\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \Leftarrow \mathcal{P}_A\} \equiv \{\mathcal{P}_B$ è deducibile da $\mathcal{P}_A\}$ $\{\mathcal{P}_A \Leftrightarrow \mathcal{P}_B\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_B \Rightarrow \mathcal{P}_A\}\}$
$\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \underline{\leftarrow} \mathcal{P}_A\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A\} \Rightarrow \{\mathcal{P}_B\}\}$ $\{\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A\} \Leftrightarrow \{\mathcal{P}_B\}\} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\}$

$\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle \mathcal{P}_B \shortmid \mathcal{P}_A \rangle \equiv \{$un insieme di proposizioni dal quale è deducibile $\mathcal{P}_B$, essendo tali proposizioni tutte vere tranne $\mathcal{P}_A$ che può essere vera o falsa$\}$

$\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \{\mathcal{P}_B\}\} \equiv \{$la proposizione ottenibile sottoponendo $\mathcal{P}_A$ alla condizione $\mathcal{P}_B$ e a ogni condizione deducibile da $\mathcal{P}_B\}$ $\{\mathcal{P} \mid \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\} \equiv \{\{\mathcal{P} \mid \mathcal{P}_A\} \mid \mathcal{P}_B\}$

Si pone la $\neg\mathcal{P} \equiv \{\mathrm{A} \mid \{\mathrm{A}\} \Leftrightarrow \neg\{\mathcal{P}\}\}$ da cui si deducono le $\neg\neg\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$ $\neg\{\mathcal{P}\} \equiv \{\neg\mathcal{P}\}$ $\{\neg\mathcal{P}_A \equiv \neg\mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\}$.

Il significato letterale di $\vee$ (ossia di OR in inglese e di O in italiano) e l'evidente falsità di $\{\mathcal{P}_A \wedge \neg\mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_B \wedge \neg\mathcal{P}_A\}$ sono sufficienti a definire univocamente il significato di $\dot{\vee}$ per mezzo della $\{\mathcal{P}_A \dot{\vee} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \wedge \neg\mathcal{P}_B\} \vee \{\mathcal{P}_B \wedge \neg\mathcal{P}_A\}$. La $\dot{\vee}$ ha (come anche la $\wedge$) le proprietà commutativa e associativa, e perciò se ne hanno le rispettive $\{\mathcal{P}_A \dot{\vee} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \dot{\vee} \mathcal{P}_A\}$ e $\{\mathcal{P}_A \dot{\vee} \mathcal{P}_B \dot{\vee} \mathcal{P}\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A \dot{\vee} \mathcal{P}_B\} \dot{\vee} \mathcal{P}\}$. La $\vee$ ha la $\{\mathcal{P}_A \vee \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \dot{\vee} \mathcal{P}_B \dot{\vee} \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\}$, e è sia commutativa sia associativa per cui se ne hanno le rispettive $\{\mathcal{P}_A \vee \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_B \vee \mathcal{P}_A\}$ e $\{\mathcal{P}_A \vee \mathcal{P}_B \vee \mathcal{P}\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A \vee \mathcal{P}_B\} \vee \mathcal{P}\}$. La $\wedge$ è distributiva rispetto a $\vee$ e viceversa, e perciò si ha la $\mathrm{A} \square \{\mathrm{B} \Box \mathrm{C}\} \equiv \{\mathrm{A} \square \mathrm{B}\} \Box \{\mathrm{A} \square \mathrm{C}\}$ di cui la $\{\square, \Box\} \equiv \{\{\wedge, \vee\} \dot{\vee} \{\vee, \wedge\}\}$. La $\wedge$ è distributiva rispetto a $\dot{\vee}$ per cui si ha la $\mathrm{A} \wedge \{\mathrm{B} \dot{\vee} \mathrm{C}\} \equiv \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\} \dot{\vee} \{\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}\}$.

Si pongono la $\wedge \equiv \{, \dot{\vee} ;\}$ (per cui si ha la $\{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\} \equiv \{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \equiv \{\mathrm{A};\mathrm{B}\}$), e le

$\{$da $\mathcal{P}_A$ segue $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A$ porta $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A$ mostra $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A$ dà luogo a $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A$ implica $\mathcal{P}_B\} \equiv$
$\{\mathcal{P}_B$ è dovuta a $\mathcal{P}_A\} \equiv \{\mathcal{P}_B$ è ottenibile da $\mathcal{P}_A\} \equiv \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\}$ $\{\mathcal{P}_A$ di cui $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A$ dove $\mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}$

$\{$da: $\mathrm{A}_1; \mathrm{A}_2; \ldots; \mathrm{A}_i$; segue $\mathrm{B}_0 \square_1 \mathrm{B}_1 \square_2 \mathrm{B}_2 \ldots \square_i \mathrm{B}_i \square_{i+1} \mathrm{B}_{i+1} \ldots \square_{i+j} \mathrm{B}_{i+j}\} \equiv$
$\{\mathrm{A}_1 \underline{\rightarrow} \{\mathrm{B}_0 \square_1 \mathrm{B}_1\}; \mathrm{A}_2 \underline{\rightarrow} \{\mathrm{B}_1 \square_2 \mathrm{B}_2\}; \ldots; \mathrm{A}_i \underline{\rightarrow} \{\mathrm{B}_{i-1} \square_i \mathrm{B}_i\}\}$

dove: ognuno dei $\{\square_1, \square_2, \ldots, \square_{i+j}\}$ è un simbolo relazionale, quale per esempio uno dei $\{\equiv, \not\equiv, =, \neq, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \underline{\rightarrow}, \underline{\leftrightarrow}\}$; $\{\square_{i+1} \mathrm{B}_{i+1} \ldots \square_{i+j} \mathrm{B}_{i+j}\}$ può essere assente e se è presente la validità della sua presenza è ritenuta evidente; e ognuno dei $\{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_i\}$ è sostituito dal simbolo þ quando è ritenuta evidente la validità del corrispondente tra i $\{\{\mathrm{B}_0 \square_1 \mathrm{B}_1\}, \{\mathrm{B}_1 \square_2 \mathrm{B}_2\}, \ldots, \{\mathrm{B}_{i-1} \square_i \mathrm{B}_i\}\}$.

Il quantificatore universale $\forall$ e il quantificatore esistenziale $\exists$ sono definiti dalle $\forall \equiv \{$per ogni$\}$ e $\exists \equiv \{$esiste almeno un$\}$. È sottintesa la $\Box\{\mathcal{P}\} \equiv \{\Box \mathcal{P}\} \equiv \{\Box\{\mathcal{P}\}\}$ di cui la $\Box \equiv \{\forall \dot{\vee} \exists\}$.

Conformemente a quanto in [1] si ha la

$$\{\mathcal{P}_A \Rightarrow \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\{\mathcal{P}_A\} \text{ è sufficiente per } \{\mathcal{P}_B\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_B; \forall \mathcal{P}_A\} \underline{\leftrightarrow} \{\neg\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \neg\mathcal{P}_A\} \underline{\leftrightarrow}$$
$$\{\{\mathcal{P}_B\} \text{ è necessaria per } \{\mathcal{P}_A\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\exists \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle \mathcal{P}_B \shortmid \mathcal{P}_A \rangle\} \underline{\leftrightarrow} \exists \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle \neg\mathcal{P}_A \shortmid \neg\mathcal{P}_B \rangle \tag{1}$$

di cui le

$\{\{\mathcal{P}_A\}$ è sufficiente per $\{\mathcal{P}_B\}\} \equiv \{\{\mathcal{P}_B\} \lozenge \{\mathcal{P}_A\}\}$
$\{\{\mathcal{P}_B\}$ è necessaria per $\{\mathcal{P}_A\}\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A\}$ solo $\lozenge \{\mathcal{P}_B\}\}$ $\lozenge \equiv \{$se $\dot{\vee}$ quando$\}$.

La (1) porta $\{\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\neg\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \neg\mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \exists\{\underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle \mathcal{P}_B \shortmid \mathcal{P}_A \rangle, \underline{\boldsymbol{\mathcal{P}}}\langle \mathcal{P}_A \shortmid \mathcal{P}_B \rangle\}$. In base alla (1), una $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ afferma una relazione di causa-effetto nel senso che $\{\mathcal{P}_A\}$ è una causa sufficiente dell'effetto $\{\mathcal{P}_B\}$.

Si hanno la $\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\}$ e le

$$\{\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\}\} \tag{2}$$

$$\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\} \tag{3}$$

$$\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\{\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\}\} \tag{4}$$

$$\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \equiv \{\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \mid \mathcal{P}_B\} \tag{5}$$

La (4) consente di affermarne il secondo membro in quanto la $\mathcal{P}_A$ è stata affermata vera o è sottintesa tale.

Le (5) e $\text{Æ}\langle \mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B / \mathcal{P}_A /(1)\rangle$ portano le $\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e $\neg \mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \neg\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}$. Da ciò segue sia la $\{\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\} \wedge \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_A\}\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_A$ sia che la $\{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}$ implica il sottintendere la $\{\mathcal{P}_B\}$.

La $\{\mathcal{P}_A \underline{\leftrightarrow} \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \equiv \mathcal{P}_B\}$ porta che l'ultimo membro della (3) può essere scritto $\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}$. Da ciò segue la

$$\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \{\{\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}\}\} \tag{6}$$

Da: þ; (1); segue

$$\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}\} \tag{7}$$

Da: þ; $\text{Æ}\langle \mathcal{P} / \mathcal{P}_A /(7)\rangle$; segue

$$\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P} \equiv \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P}_B\}\} \tag{8}$$

Da: (1); (3); $\text{Æ}\langle \mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B / \mathcal{P}_B /(1)\rangle$; segue

$$\{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_B\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\} \underline{\leftrightarrow} \{\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \mid \mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}\} \tag{9}$$

Le $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B$ e $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}$ portano, in base alla (3), le rispettive $\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\}$ e $\mathcal{P}_A \equiv \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}\}$, e quindi la $\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \equiv \{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}\}$. Questa e la $\mathcal{P} \underline{\rightarrow} \mathscr{P}$ portano la $\{\mathcal{P}_A \wedge \mathcal{P}_B\} \underline{\rightarrow} \mathscr{P}$. Questa e la $\text{Æ}\langle \mathscr{P} / \mathcal{P} /(2)\rangle$ portano la $\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\}$. Perciò si ha la $\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}, \mathcal{P} \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\} \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\}\}$. Questa e la $\text{Æ}\langle \{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}, \mathcal{P} \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\}, \mathcal{P}_A, \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\} / \mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B, \mathcal{P} /(2)\rangle$ portano la

$$\{\mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}_B, \mathcal{P}_A \underline{\rightarrow} \mathcal{P}, \mathcal{P} \underline{\rightarrow} \mathscr{P}, \mathcal{P}_A\} \underline{\rightarrow} \{\mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \mathscr{P}\} \tag{10}$$

La (1) (ovvero la $\{\neg \mathcal{P}_B \underline{\rightarrow} \neg \mathcal{P}_A\} \underline{\leftrightarrow} \exists \underline{\mathcal{P}}\langle \mathcal{P}_B \mid \mathcal{P}_A\rangle$ presente in essa) consente il seguente procedimento, che formalizza la nota "demonstratio per absurdum", per stabilire una $\{\mathcal{P}\}$. Si stabilisce una $\exists \underline{\mathcal{P}}\langle \mathcal{A} \mid \neg \mathcal{P}\rangle$ tale che ne sia evidente la $\{\neg \mathcal{A}\}$. Le $\exists \underline{\mathcal{P}}\langle \mathcal{A} \mid \neg \mathcal{P}\rangle$ e $\text{Æ}\langle \neg \mathcal{P}, \mathcal{A} / \mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B /(1)\rangle$ portano la $\neg \mathcal{A} \underline{\rightarrow} \mathcal{P}$. Questa e la $\{\neg \mathcal{A}\}$ portano la $\{\mathcal{P}\}$.

Un'ipotesi è una proposizione che non può essere stabilita né vera né falsa: sia una proposizione sia un'ipotesi possono essere vera o falsa, ma mentre di una proposizione può o non essere noto se è vera o falsa, invece di un'ipotesi (finché è tale) non è mai noto se è vera o falsa.

2.1.2 *Altre convenzioni simboliche*

Si pongono le $\text{ş}\langle a,b,\ldots,c\rangle \equiv \text{ş}_{a,b,\ldots,c} \equiv \text{ş}_{ab\ldots c}$ $\text{ş}^{a}{}_{b} \equiv \text{ş}_{b}{}^{a} \equiv (\text{ş}\langle b\rangle)^{a}$ $\text{IPM} \equiv \{\text{il primo membro della}\}$.

Una $\{i=A,B\}$, i cui $\{A,B\}$ sono due interi di cui la $A \leq B$, è la successione dei $B-A+1$ interi che cresce ordinatamente da A a B; e quindi si ha la $\{i=A,B\} \equiv \{A,A+1,\ldots,B\}$. Conformemente a ciò si pongono le

$$\{j=A,B\} \equiv \{i=A,B\} \quad \{\text{ş}_i;i=A,B\} \equiv \{\text{ş}_j;j=A,B\} \equiv \{\text{ş}_A,\text{ş}_{A+1},\ldots,\text{ş}_B\} \quad \neg\exists\{\text{ş}_i;i=A,B \mid B<A\}$$

$$\{\text{ş}_i;i\neq i;i=A,B\} \equiv \{\{\text{ş}_i;i=A,i-1\},\{\text{ş}_i;i=i+1,B\}\} \quad \{K;i=A,B\} \equiv \{\text{ş}_i;i=A,B \mid \text{ş}_i \equiv K;i=A,B\} \quad \underline{0}\langle \text{ş}\rangle \equiv \{0;i=1,\text{ş}\}$$

La $\{\text{ş}_i;i=A,B\} \equiv \{\text{ş}_A,\text{ş}_{A+1},\ldots,\text{ş}_B\}$ è generalizzata, intendendo la $\underline{i} \equiv \{i_n;n=\cancel{n},\cancel{n}\}$, dalla

$$\{\text{ş}_{\underline{i}};i_{\cancel{n}}=A_{\cancel{n}},B_{\cancel{n}};i_{\cancel{n}+1}=A_{\cancel{n}+1},B_{\cancel{n}+1};\ldots;i_{\cancel{n}}=A_{\cancel{n}},B_{\cancel{n}}\} \equiv \{\{\ldots\{\{\text{ş}_{\underline{i}};i_{\cancel{n}}=A_{\cancel{n}},B_{\cancel{n}}\};i_{\cancel{n}+1}=A_{\cancel{n}+1},B_{\cancel{n}+1}\};\ldots\};i_{\cancel{n}}=A_{\cancel{n}},B_{\cancel{n}}\} \tag{1}$$

Si pongono le

$$\square_{i=\cancel{i},\cancel{i}}(\text{ş}_{a\langle i\rangle}) \equiv \{\text{ş}_{a\langle \cancel{i}\rangle} \square \text{ş}_{a\langle \cancel{i}+1\rangle} \square \ldots \square \text{ş}_{a\langle \cancel{i}\rangle}\} \equiv \text{ş}_{b\langle \cancel{i}\rangle} \square \{\text{ş}_{b\langle \cancel{i}+1\rangle} \square \{\ldots \square \{\text{ş}_{b\langle \cancel{i}-1\rangle} \square \text{ş}_{b\langle \cancel{i}\rangle}\} \ldots\}\} \equiv \text{ş}_{c\langle \cancel{i}\rangle} \square \{\square_{i=\cancel{i}+1,\cancel{i}}(\text{ş}_{c\langle i\rangle})\} \tag{2}$$

$$\square_{i=\cancel{i},\cancel{i};i\neq i}(\text{ş}_{a\langle i\rangle}) \equiv \square_{i=\cancel{i},i-1}(\text{ş}_{a\langle i\rangle}) \square \square_{i=i+1,\cancel{i}}(\text{ş}_{a\langle i\rangle}) \equiv \square_{j=\cancel{j},\cancel{j}}(\text{ş}_{a\langle j\rangle}) \quad \square_{i=\cancel{i},\cancel{i}}(\text{ş}) \equiv \{\square_{i=\cancel{i},\cancel{i}}(\text{ş}_{a\langle i\rangle}) \mid \{\text{ş}_i \equiv \text{ş};i=\cancel{i},\cancel{i}\}\} \tag{3}$$

dove: $\{\square,_\square\square_\square\}\equiv\{\{\Sigma,+\}_\square\dot\vee_\square\{\Pi,\cdot\}_\square\dot\vee_\square\{\wedge,_\square\wedge_\square\}_\square\dot\vee_\square\{\mathring\vee,_\square\dot\vee_\square\}_\square\dot\vee_\square\{\vee,_\square\vee_\square\}\}$; la disposizione e la numerosità delle parentesi nel terzo membro della (2) è modificabile arbitrariamente a meno dell'uguaglianza tra le numerosità delle destre e sinistre; $\{a_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$ $\{b_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$ e $\{c_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$ sono rispettivamente una qualsiasi tra le $(\text{ɨ̿}-\text{ɨ}+1)!$ permutazioni dei $\{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$; $\{a_j;j=\text{ɟ},\text{ɟ̿}\}$ è una qualsiasi tra le $(\text{ɨ̿}-\text{ɨ})!$ permutazioni dei $\{i;i\neq \mathit{i};i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$.

Un $\delta\langle a,b\rangle$ è il simbolo di Kronecker definito dalle $\{\delta_{ab}=0;\forall a\neq b\}$ $\{\delta_{ab}=1;\forall a=b\}$. Inerentemente una $\Sigma_{i=A,B}(ş_i)$ si ha, essendo j uno dei $\{i=A,B\}$, la

$$\Sigma_{i=A,B}(ş_i)=\Sigma_{i=A,B}(ş_i)+\Sigma_{i=A,B}(\delta_{ji}\cdot ş_i)-\Sigma_{i=A,B}(\delta_{ji}\cdot ş_i)=\Sigma_{i=A,B}((1-\delta_{ji})\cdot ş_i)+ş_j \tag{4}$$

Un $|G|$ è il valore assoluto della grandezza G, è definito dalle

$$\{|G|\equiv G;\forall G\geq 0\}\ \{|G|\equiv -G;\forall G<0\} \tag{5}$$

e se ne pone la $\omega\langle G\rangle\equiv G/|G|=|G|/G$.

Un'approssimazione di una grandezza A con una grandezza B è indicata $A\cong B$, è definita dalla $\{A\cong B\}\equiv\{A=B+\epsilon\,|\,\vee\langle\epsilon=0\rangle\}$, ed è migliore quanto è minore $|\epsilon|$.

Si pongono: la $\text{Б}\langle N,K\rangle\equiv N!/((N-K)!\cdot K!)$ per cui Б_{NK} (che ha il nome di coefficiente binomiale) è il numero di combinazioni (senza ripetizione come si sottintende nel seguito) di classe K di N oggetti; e la $\mathbf{Б}\langle N\rangle\equiv\Sigma_{k=1,N}(\text{Б}\langle N,k\rangle)$.

Un $\underline{n}\langle c,b,a\rangle$ è il a-esimo elemento della b-esima combinazione di classe c dei $\{n=1,N\}$, avendone quindi le $c\in\{n=1,N\}$ $b\in\{b=1,\text{Б}\langle N,c\rangle\}$ e $a\in\{a=1,c\}$. L'ordinamento successivo dei $\{\underline{n}_{cba};a=1,c\}$ è coerente con quello dei $\{n=1,N\}$.

Per i $\{n=1,N\}$ si hanno le

$$\mathcal{N}\langle N,c\rangle=\text{Б}\langle N-1,c-1\rangle\ \mathscr{N}\langle N,c\rangle=\text{Б}\langle N-c+1,1\rangle=N-c+1 \tag{6}$$

dove: $\mathcal{N}_{Nc}$ è il numero di combinazioni di classe c dei $\{n=1,N\}$ nelle quali compare uno stesso elemento; $\mathscr{N}_{Nc}$ è il numero di combinazioni di classe c dei $\{n=1,N\}$ nelle quali compare una stessa combinazione $\{\underline{n}\langle c-1,b,a\rangle;a=1,c-1\}$.

Da: definizione di $\mathcal{N}_{Nc}$; prima delle (6); segue $\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle N,c\rangle}(\Sigma_{a=1,c}(G_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle}))=\mathcal{N}_{Nc}\cdot\Sigma_{n=1,N}(G_n)=\text{Б}_{N-1,c-1}\cdot\Sigma_{n=1,N}(G_n)$.

Si hanno le

$$\{\{-1\leq G_n\leq 1\}_\square\wedge_\square\{G_n\geq \mathit{G}_n\};n=1,N\}\underline{\rightarrow}$$
$$\{\Sigma_{c=1,N}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle N,c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(G_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle})))\geq\Sigma_{c=1,N}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle N,c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(\mathit{G}_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle})))\} \tag{7}$$

$$\{\{0\leq G_n\leq 1;n=1,N\}_\square\wedge_\square\{\{G_n;n=1,N-1\}\equiv\{\mathit{G_n};\mathit{n}=1,\mathit{N}\}\}\}\underline{\rightarrow}$$
$$\{\Sigma_{c=1,N}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle N,c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(G_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle})))\geq\{\Sigma_{c=1,\mathit{N}}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,\text{Б}\langle \mathit{N},c\rangle}(\Pi_{a=1,c}(\mathit{G}_{\underline{\mathit{n}}\langle c,b,a\rangle})))\} \tag{8}$$

2.2 *Nozioni di insiemistica*

Un insieme può essere definito come una successione di elementi (per esempio {1,2,3} indica l'insieme i cui elementi sono i tre numeri 1 2 e 3) oppure come un $\{ş\,/\,\mathcal{P}\}$ in quanto questo è l'insieme di ogni diversa modalità di esistere che ha ş quando è sottoposto alla condizione $\mathcal{P}$.

La numerosità di un insieme $\underline{A}$, cioè il numero degli elementi che costituiscono $\underline{A}$, è indicata $\mathfrak{N}\langle\underline{A}\rangle$ (avendo quindi la $\mathfrak{N}\langle\underline{\emptyset}\rangle=0$). Un insieme è finito o infinito rispettivamente quando la sua numerosità non è o è illimitatamente grande.

Una $\underline{A}=\underline{B}$, i cui $\underline{A}$ e $\underline{B}$ sono due insiemi, afferma che ogni elemento di $\underline{A}$ è anche un elemento di $\underline{B}$ e viceversa (e perciò se ne ha la $\{\underline{A}=\underline{B}\}\underline{\rightarrow}\{\mathfrak{N}_{\underline{A}}=\mathfrak{N}\langle\underline{B}\rangle\}$). Ciò è conforme a quanto in sez. 2.1, giacché si considera che la proprietà principale di un insieme è i suoi elementi e quindi che la conoscenza di un insieme è quella dei suoi elementi.

Una $ş\in\underline{A}$ afferma che ş è elemento dell'insieme $\underline{A}$; e perciò afferma che ş è il generico elemento di $\underline{A}$, se tra gli elementi di $\underline{A}$ non è distinguibile da altri alcun ş. Una $ş\notin\underline{A}$ nega la $ş\in\underline{A}$: $\{ş\notin\underline{A}\}\equiv\neg\{ş\in\underline{A}\}$.

Si pone la $\underline{A}\equiv\{ş_i;i=ɨ,\mathbf{ɨ}\}$. Questa definisce $\underline{A}$ come un insieme il cui i-esimo elemento è $ş_i$ e di cui la $\mathfrak{N}_{\underline{A}}=\mathbf{ɨ}-ɨ+1$. Per un tale $\underline{A}$ valgono la $ş_i\in\underline{A}$ in ogni caso e la $\{ş\in\underline{A}\}\equiv\mathbb{V}_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş\equiv ş_i)$ solo quando in $\underline{A}$ non è distinguibile alcun ş.

I $\mathsf{min}\langle\underline{A}\rangle$ e $\mathsf{max}\langle\underline{A}\rangle$ sono i numeri minimo e massimo tra tutti quelli espressi dagli elementi di $\underline{A}$. Si pongono le

$$\Sigma\langle\underline{A}\rangle\equiv\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_i)\quad\Pi\langle\underline{A}\rangle\equiv\Pi_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_i)\quad \mathsf{m}\langle\underline{A}\rangle\equiv\Sigma_{\underline{A}}/\mathfrak{N}_{\underline{A}}\quad \mathsf{d}^2\langle\underline{A}\rangle\equiv\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}((ş_i-\mathsf{m}_{\underline{A}})^2)\quad \mathsf{v}^2\langle\underline{A}\rangle\equiv \mathsf{d}^2_{\underline{A}}/\mathfrak{N}_{\underline{A}} \tag{1}$$

dalle quali segue $\mathsf{v}^2_{\underline{A}}=\mathsf{m}\langle(ş_i-\mathsf{m}_{\underline{A}})^2;i=ɨ,\mathbf{ɨ}\rangle$.

Da: quarta delle (1); $(a\pm b)^2=a^2\pm2\cdot a\cdot b+b^2$ (intendendo la $\pm\equiv\{+_\circ\mathbb{V}_\circ-\}$) e prima delle (1); terza delle (1); segue $\mathsf{d}^2_{\underline{A}}=\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}((ş_i-\mathsf{m}_{\underline{A}})^2)=\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_i^2)-2\cdot\mathsf{m}_{\underline{A}}\cdot\Sigma_{\underline{A}}+\mathfrak{N}_{\underline{A}}\cdot\mathsf{m}_{\underline{A}}^2=\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_i^2)-\mathfrak{N}_{\underline{A}}\cdot\mathsf{m}_{\underline{A}}^2$ e quindi $\mathsf{m}_{\underline{A}}^2=(\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_i^2)-\mathsf{d}^2_{\underline{A}})/\mathfrak{N}_{\underline{A}}$.

Da: quarta terza e prima delle (1); $ş_i=\Sigma_{\mathit{i}=ɨ,\mathbf{ɨ}}(\delta_{i\mathit{i}}\cdot ş_{\mathit{i}})$; segue

$$\mathsf{d}^2\langle\underline{A}\rangle=\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}((ş_i-\Sigma_{\mathit{i}=ɨ,\mathbf{ɨ}}(ş_{\mathit{i}}/\mathfrak{N}_{\underline{A}}))^2)=\Sigma_{i=ɨ,\mathbf{ɨ}}((\Sigma_{\mathit{i}=ɨ,\mathbf{ɨ}}(\delta_{i\mathit{i}}-1/\mathfrak{N}_{\underline{A}})\cdot ş_{\mathit{i}})^2) \tag{2}$$

Si pongono le $\underline{A}\equiv\{A_h;h=ħ,\mathbf{ħ}\}$ $\underline{B}\equiv\{B_k;k=ꝁ,\mathbf{ꝁ}\}$ $\underline{h}\equiv\{h=ħ,\mathbf{ħ}\}$ $\underline{k}\equiv\{k=ꝁ,\mathbf{ꝁ}\}$, e la $\{\underline{A}=\underline{B}\}\equiv\{A_h=B_{h-ħ+ꝁ};h=ħ,\mathbf{ħ}\}$. Una $\underline{A}\neq\underline{B}$ nega la $\underline{A}=\underline{B}$: $\{\underline{A}\neq\underline{B}\}\equiv\neg\{\underline{A}=\underline{B}\}$.

Una corrispondenza univoca tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$, è un insieme di $\mathfrak{N}\langle\underline{A}\rangle$ coppie indicato $\underline{A}\Rightarrow\underline{B}$ e definito da una

$$\{\underline{A}\Rightarrow\underline{B}\}\equiv\{a\Rightarrow b\}\equiv\{A_h\Rightarrow B_{\mathit{k}\langle h\rangle};h=ħ,\mathbf{ħ}\}\equiv\{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle};h=ħ,\mathbf{ħ}\} \tag{3}$$

di cui le $\mathfrak{N}_{\underline{A}}\geq\mathfrak{N}\langle\underline{B}\rangle$ $a\in\underline{A}$ $b\in\underline{B}$ $\{A_h\Rightarrow B_{\mathit{k}\langle h\rangle}\}\equiv\{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle}\}$ $\{\exists\{\mathit{k}_h=k\mid k\in\underline{k}\};h=ħ,\mathbf{ħ}\}$ $\{\exists\{k=\mathit{k}\mid \mathit{k}\in\underline{\mathit{k}}\};k=ꝁ,\mathbf{ꝁ}\}$ $\underline{\mathit{k}}\equiv\{\mathit{k}_h;h=ħ,\mathbf{ħ}\}$. Dunque una $\underline{A}\Rightarrow\underline{B}$ fa corrispondere a ogni elemento di $\underline{A}$ un solo elemento di $\underline{B}$.

Il limite di A per B che tende a C (indicandosi un tale tendere con la $\mathsf{B}\rightarrow\mathsf{C}$) è l'oggetto cui si avvicina sempre più A quando B si avvicina sempre più a C, è indicato $\mathsf{lim}_{\mathsf{B}\rightarrow\mathsf{C}}(\mathsf{A})$, e è definito in quanto è inerente una $\mathsf{B}\Rightarrow\mathsf{A}$ che fa corrispondere un solo A a ogni B.

Una corrispondenza biunivoca tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$, è un insieme di $\mathfrak{N}_{\underline{A}}$ coppie indicato $\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}$ e definito da una

$$\{\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}\}\equiv\{a\Leftrightarrow b\}\equiv\{A_h\Leftrightarrow B_{\mathit{k}\langle h\rangle};h=ħ,\mathbf{ħ}\}\equiv\{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle};h=ħ,\mathbf{ħ}\} \tag{4}$$

di cui le $\mathfrak{N}_{\underline{A}}=\mathfrak{N}_{\underline{B}}$ $a\in\underline{A}$ $b\in\underline{B}$ $\{A_h\Leftrightarrow B_{\mathit{k}\langle h\rangle}\}\equiv\{A_h,B_{\mathit{k}\langle h\rangle}\}$ $\{\mathit{k}_h;h=ħ,\mathbf{ħ}\}=\underline{k}$. Dunque una $\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}$ fa corrispondere a ogni elemento di $\underline{A}$ un solo elemento di $\underline{B}$ e viceversa.

I $\underline{B}\Leftarrow\underline{A}$ e $\underline{B}\Leftrightarrow\underline{A}$ sono i due insiemi che si ottengono dai rispettivi $\underline{A}\Rightarrow\underline{B}$ e $\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}$ scambiando la posizione tra gli elementi di ogni coppia. Si hanno le

$$\{\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}\}=\{\underline{A}\Rightarrow\underline{B}\mid\{\underline{A}\Rightarrow\underline{B}\}=\{\underline{A}\Leftarrow\underline{B}\}\}\quad\{\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}\}\underline{\leftrightarrow}\{\underline{B}\Leftrightarrow\underline{A}\} \tag{5}$$

Un insieme è detto numerabile o non (ovvero più che numerabile) rispettivamente quando esiste o non una corrispondenza biunivoca tra esso e un insieme di numeri naturali.

L'addizione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}+\underline{B}$ (o $\{\underline{A},\underline{B}\}$) e costituito da tutti gli elementi di $\underline{A}$ e tutti gli elementi di $\underline{B}$. L'intersezione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cap\underline{B}$ e costituito da ogni elemento che appartiene sia a $\underline{A}$ sia a $\underline{B}$. La differenza tra $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}-\underline{B}$ e costituito da ogni elemento di $\underline{A}$ che non appartiene anche a $\underline{B}$, ossia è l'insieme che si ottiene eliminando da $\underline{A}$ ogni elemento di $\underline{A}\cap\underline{B}$. L'unione di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cup\underline{B}$ e costituito da ogni elemento che appartiene almeno a uno tra i $\underline{A}$ e $\underline{B}$, ossia che appartiene a $\underline{A}$ ma non a $\underline{A}\cap\underline{B}$ o a $\underline{B}$ ma non a $\underline{A}\cap\underline{B}$ o a $\underline{A}\cap\underline{B}$. Il prodotto cartesiano di $\underline{A}$ e $\underline{B}$ è l'insieme indicato $\underline{A}\cdot\underline{B}$ e costituito da ogni diversa coppia che può essere costituita scegliendone i due componenti come elementi rispettivamente appartenenti ai $\underline{A}$ e $\underline{B}$. Il complemento di $\underline{A}$ è l'insieme indicato $\neg\underline{A}$ e costituito da ogni elemento che non appartiene a $\underline{A}$, perciò $\neg\underline{\varnothing}$ è l'insieme costituito da ogni elemento.

In relazione ai $\underline{A}$ e $\underline{B}$ sono conoscibili come segue i $\{\mathbf{i}_{ABh};h=ħ,\mathbf{ħ}\}$ e $\{\mathbf{i}_{BAk};k=ꝁ,\mathbf{ꝁ}\}$.

La conoscenza di $\{\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}};\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}$ avviene con il seguente procedimento. Si pongono le $\{\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=0;\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}$. Si effettuano $\mathfrak{N}_{\underline{\mathrm{B}}}$ iterazioni indicate da $\underline{\mathrm{k}}$ nell'ordine della loro esecuzione. L'iterazione k-esima consiste nel cercare una $h\in\underline{\mathrm{h}}$ che verifichi le $\{\mathbf{i}_{\mathrm{AB}h}=0,\mathrm{A}_h\equiv\mathrm{B}_\mathrm{k}\}$ e nel porre $\mathbf{i}_{\mathrm{AB}h}=1$ se si trova una tale $\{h\in\underline{\mathrm{h}}\,|\,\mathbf{i}_{\mathrm{AB}h}=0,\mathrm{A}_h\equiv\mathrm{B}_\mathrm{k}\}$.

La conoscenza di $\{\mathbf{i}_{\mathrm{BAk}};\mathrm{k}=\cancel{\mathrm{k}},\cancel{\mathbf{k}}\}$ avviene (analogamente alla testé detta di $\{\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}};\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}$) con il seguente procedimento. Si pongono le $\{\mathbf{i}_{\mathrm{BAk}}=0;\mathrm{k}=\cancel{\mathrm{k}},\cancel{\mathbf{k}}\}$. Si effettuano $\mathfrak{N}_{\underline{\mathrm{A}}}$ iterazioni indicate da $\underline{\mathrm{h}}$ nell'ordine della loro esecuzione. L'iterazione h-esima consiste nel cercare una $k\in\underline{\mathrm{k}}$ che verifichi le $\{\mathbf{i}_{\mathrm{BA}k}=0,\mathrm{A}_\mathrm{h}\equiv\mathrm{B}_k\}$ e nel porre $\mathbf{i}_{\mathrm{BA}k}=1$ se si trova una tale $\{k\in\underline{\mathrm{k}}\,|\,\mathbf{i}_{\mathrm{BA}k}=0,\mathrm{A}_\mathrm{h}\equiv\mathrm{B}_k\}$.

Le precedenti definizioni dei $\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{B}}$ $\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}$ $\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}$ $\underline{\mathrm{A}}-\underline{\mathrm{B}}$ $\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}}$ $\underline{\mathrm{A}}\cdot\underline{\mathrm{B}}$ e $\neg\underline{\mathrm{A}}$, sono precisate dalle seguenti espressioni

$$\{\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{B}}\}\equiv\{\{\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=1;\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}\,{}_{\square}\wedge{}_{\square}\,\{\mathbf{i}_{\mathrm{BAk}}=1;\mathrm{k}=\cancel{\mathrm{k}},\cancel{\mathbf{k}}\}\}\equiv\{\underline{\mathrm{B}}=\underline{\mathrm{A}}\}$$

$$\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\equiv\{\{\mathrm{A}_\mathrm{h};\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\},\{\mathrm{B}_\mathrm{k};\mathrm{k}=\cancel{\mathrm{k}},\cancel{\mathbf{k}}\}\}=\underline{\mathrm{B}}+\underline{\mathrm{A}} \tag{6}$$

$$\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\equiv\{\{\mathrm{A}_\mathrm{h}\,|\,\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=1\};\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}=\{\mathrm{A}_\mathrm{h}\,/\,\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=1;\mathrm{h}\in\underline{\mathrm{h}}\}=\{\{\mathrm{B}_\mathrm{k}\,|\,\mathbf{i}_{\mathrm{BAk}}=1\};\mathrm{k}=\cancel{\mathrm{k}},\cancel{\mathbf{k}}\}=\{\mathrm{B}_\mathrm{k}\,/\,\mathbf{i}_{\mathrm{BAk}}=1;\mathrm{k}\in\underline{\mathrm{k}}\}=\underline{\mathrm{B}}\cap\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{A}}-\neg\underline{\mathrm{B}} \tag{7}$$

$$\underline{\mathrm{A}}-\underline{\mathrm{B}}\equiv\{\{\mathrm{A}_\mathrm{h}\,|\,\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=0\};\mathrm{h}=\cancel{\mathrm{h}},\cancel{\mathbf{h}}\}=\{\mathrm{A}_\mathrm{h}\,/\,\mathbf{i}_{\mathrm{ABh}}=0;\mathrm{h}\in\underline{\mathrm{h}}\}=\underline{\mathrm{A}}\cap\neg\underline{\mathrm{B}} \tag{8}$$

$$\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}}\equiv\{\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\}-\{\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\}=\underline{\mathrm{B}}\cup\underline{\mathrm{A}} \tag{9}$$

$$\underline{\mathrm{A}}\cdot\underline{\mathrm{B}}\equiv\{\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}}\},\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}+1}\},\ldots,\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathbf{k}}}\},\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}+1},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}}\},\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}+1},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}+1}\},\ldots,\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathrm{h}}+1},\mathrm{B}_{\cancel{\mathbf{k}}}\},\ldots,\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathbf{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}}\},\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathbf{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathrm{k}}+1}\},\ldots,\{\mathrm{A}_{\cancel{\mathbf{h}}},\mathrm{B}_{\cancel{\mathbf{k}}}\}\} \tag{10}$$

$$\neg\neg\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{A}}\quad \underline{\mathrm{A}}\cap\neg\underline{\mathrm{A}}=\underline{\varnothing}\quad \underline{\mathrm{A}}\cup\neg\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{A}}+\neg\underline{\mathrm{A}}\quad \underline{\mathrm{A}}\cdot\underline{\varnothing}=\underline{\varnothing}\cdot\underline{\mathrm{A}}=\underline{\varnothing} \tag{11}$$

Si pongono le

$$\{\underline{\mathrm{A}}\subset\underline{\mathrm{B}}\}\equiv\{\underline{\mathrm{B}}\supset\underline{\mathrm{A}}\}\equiv\{\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}};\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle<\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle\}\equiv\{\underline{\mathrm{B}}=\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}};\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle<\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle\}$$

$$\{\underline{\mathrm{A}}\subseteq\underline{\mathrm{B}}\}\equiv\{\underline{\mathrm{B}}\supseteq\underline{\mathrm{A}}\}\equiv\{\{\underline{\mathrm{A}}\subset\underline{\mathrm{B}}\}\,{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\,\{\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{B}}\}\}\equiv\{\underline{\mathrm{A}}=\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\}\equiv\{\underline{\mathrm{B}}=\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}}\}\quad\{\underline{\mathrm{A}}\not\subset\underline{\mathrm{B}}\}\equiv\neg\{\underline{\mathrm{A}}\subset\underline{\mathrm{B}}\} \tag{12}$$

avendo quindi la $\underline{\varnothing}\subseteq\underline{\mathrm{A}}$. Nel caso della $\underline{\mathrm{A}}\subset\underline{\mathrm{B}}$ si dice che $\underline{\mathrm{A}}$ è un sottoinsieme proprio di $\underline{\mathrm{B}}$ o che $\underline{\mathrm{A}}$ è contenuto propriamente in $\underline{\mathrm{B}}$ o che $\underline{\mathrm{A}}$ appartiene propriamente a $\underline{\mathrm{B}}$. Nel caso della $\underline{\mathrm{A}}\subseteq\underline{\mathrm{B}}$ si dice che $\underline{\mathrm{A}}$ è un sottoinsieme di $\underline{\mathrm{B}}$ o che $\underline{\mathrm{A}}$ è contenuto in $\underline{\mathrm{B}}$ o che $\underline{\mathrm{A}}$ appartiene a $\underline{\mathrm{B}}$. Si ha la $\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\subseteq\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}}\subseteq\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}$.
Un $\underline{\mathrm{A}}^{\{\mathrm{i}\langle p\rangle;p=1,\cancel{p}\}}$ è (essendo $\underline{\mathrm{A}}\equiv\{\text{ş}_\mathrm{i};\mathrm{i}=\cancel{\mathrm{i}},\cancel{\mathbf{i}}\}$ e $\{\mathrm{i}_p;p=1,\cancel{p}\}\subseteq\{\mathrm{i}=\cancel{\mathrm{i}},\cancel{\mathbf{i}}\}$) l'insieme definito dalla $\underline{\mathrm{A}}^{\{\mathrm{i}\langle p\rangle;p=1,\cancel{p}\}}=\underline{\mathrm{A}}-\{\text{ş}_{\mathrm{i}\langle p\rangle};p=1,\cancel{p}\}$ e i cui elementi hanno l'ordinamento successivo conforme a quello di $\underline{\mathrm{A}}$; per esempio si ha la $\underline{\mathrm{A}}^{i}\equiv\{\text{ş}_\mathrm{i};\mathrm{i}\neq i;\mathrm{i}=\cancel{\mathrm{i}},\cancel{\mathbf{i}}\}$.

La (6) porta la

$$\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle+\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle \tag{13}$$

Le (7) e (8) portano la $\mathfrak{N}_{\underline{\mathrm{A}}}=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\rangle+\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}-\underline{\mathrm{B}}\rangle$. Da: questa; $\underline{\mathrm{B}}\subseteq\underline{\mathrm{A}}$, in quanto implica la $\underline{\mathrm{B}}=\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}$ e quindi la $\mathfrak{N}_{\underline{\mathrm{B}}}=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\rangle$; segue IPM

$$\{\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}-\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle-\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle-\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle\}\underline{\leftarrow}\{\underline{\mathrm{B}}\subseteq\underline{\mathrm{A}}\} \tag{14}$$

Da: (9); $\{\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\}\subset\{\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\}$ e Æ$\langle\{\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\},\{\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\}\,/\,\underline{\mathrm{A}},\underline{\mathrm{B}}\,/(14)\rangle$; (13); segue

$$\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cup\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\{\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\}-\{\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}+\underline{\mathrm{B}}\rangle-\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle+\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle-\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cap\underline{\mathrm{B}}\rangle \tag{15}$$

La (10) porta la

$$\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\cdot\underline{\mathrm{B}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{A}}\rangle\cdot\mathfrak{N}\langle\underline{\mathrm{B}}\rangle \tag{16}$$

L'addizione l'intersezione e l'unione di insiemi hanno le proprietà commutativa e associativa. Il prodotto di insiemi ha la proprietà associativa. Perciò si hanno (essendo anche $\underline{\mathrm{C}}$ un insieme) le

$$\underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\Box{}_{\square}\underline{\mathrm{B}}=\underline{\mathrm{B}}{}_{\square}\Box{}_{\square}\underline{\mathrm{A}}\quad \underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\{\underline{\mathrm{B}}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\underline{\mathrm{C}}\}=\{\underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\underline{\mathrm{B}}\}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\underline{\mathrm{C}} \tag{17}$$

di cui le ${}_{\square}\Box{}_{\square}\equiv\{+{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\cap{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\cup\}$ ${}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\equiv\{+{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\cap{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\cup{}_{\square}\dot{\vee}{}_{\square}\cdot\}$.

L'intersezione ha la proprietà distributiva rispetto all'unione, e viceversa. L'addizione ha la proprietà distributiva sia rispetto all'intersezione sia rispetto all'unione. Perciò si ha la

$$\underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\Box{}_{\square}\{\underline{\mathrm{B}}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\underline{\mathrm{C}}\}=\{\underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\Box{}_{\square}\underline{\mathrm{B}}\}{}_{\square}\boxed{}{}_{\square}\{\underline{\mathrm{A}}{}_{\square}\Box{}_{\square}\underline{\mathrm{C}}\} \tag{18}$$

di cui la $\{{}_\square\square_\square,{}_\square\Box_\square\}\equiv\{\{\cap,\cup\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cup,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{+,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{+,\cup\}\}$.

Da: $\text{Æ}\langle\underline{A},\underline{A},\underline{B}\,/\,\underline{A},\underline{B},\underline{C}\,/(18)\rangle$; $\underline{A}\cup\underline{A}=\underline{A}$; $\underline{A}\subseteq\underline{A}\cup\underline{B}$ e $\text{Æ}\langle\underline{A},\underline{A}\cup\underline{B}\,/\,\underline{A},\underline{B}\,/(12)\rangle$; segue $\underline{A}\cup\{\underline{A}\cap\underline{B}\}=\{\underline{A}\cup\underline{A}\}\cap\{\underline{A}\cup\underline{B}\}=\underline{A}\cap\{\underline{A}\cup\underline{B}\}=\underline{A}$.

I $\underline{A}$ e $\underline{B}$ verificano la

$$\neg\{\underline{A}{}_\square\square_\square\underline{B}\}=\neg\underline{A}{}_\square\Box_\square\neg\underline{B} \tag{19}$$

di cui la $\{{}_\square\square_\square,{}_\square\Box_\square\}\equiv\{\{\cup,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cap,\cup\}\}$, e che per $\{{}_\square\square_\square,{}_\square\Box_\square\}\equiv\{\cup,\cap\}$ e $\{{}_\square\square_\square,{}_\square\Box_\square\}\equiv\{\cap,\cup\}$ è nota rispettivamente come la prima e la seconda legge di De Morgan.

Da: seconda delle (11); $\text{Æ}\langle\neg\underline{A}\,/\,\underline{B}\,/(19)\rangle$ e prima delle (11); $\underline{B}\subseteq\neg\underline{\varnothing}$; segue la prima delle

$$\neg\underline{\varnothing}=\neg\{\underline{A}\cap\neg\underline{A}\}=\underline{A}\cup\neg\underline{A}\supseteq\underline{B}\quad\neg\{\underline{A}\cup\neg\underline{A}\}=\underline{\varnothing} \tag{20}$$

Da: $\underline{A}=\underline{A}\cap\underline{A}$ dovuta a $\underline{A}\subseteq\underline{A}$; $\text{Æ}\langle\underline{A},\underline{A},\underline{B}\,/\,\underline{A},\underline{B},\underline{C}\,/(17)\rangle$; $\underline{B}=\underline{B}\cap\underline{B}$ dovuta a $\underline{B}\subseteq\underline{B}$; $\text{Æ}\langle\underline{A},\underline{B},\underline{B}\,/\,\underline{A},\underline{B},\underline{C}\,/(17)\rangle$; $\underline{A}\cap\underline{B}=\underline{\varnothing}$; segue IPM

$$\{\underline{A}\cap\underline{B}=\{\underline{A}\cap\underline{A}\}\cap\underline{B}=\underline{A}\cap\{\underline{A}\cap\underline{B}\}=\underline{A}\cap\{\underline{A}\cap\{\underline{B}\cap\underline{B}\}\}=\underline{A}\cap\{\{\underline{A}\cap\underline{B}\}\cap\underline{B}\}=\underline{A}\cap\{\underline{\varnothing}\cap\underline{B}\}=\underline{A}\cap\underline{\varnothing}=\underline{\varnothing}\}\underline{\leftarrow}$$
$$\{\underline{A}\subseteq\underline{A},\underline{B}\subseteq\underline{B},\underline{A}\cap\underline{B}=\underline{\varnothing}\} \tag{21}$$

Le $\text{Æ}\langle\underline{A}\cap\underline{C},\underline{B}\cap\neg\underline{C},\underline{C},\neg\underline{C}\,/\,\underline{A},\underline{B},\underline{A},\underline{B}\,/(21)\rangle$ e $\{\underline{A}\cap\underline{C}\subseteq\underline{C},\underline{B}\cap\neg\underline{C}\subseteq\neg\underline{C},\underline{C}\cap\neg\underline{C}=\underline{\varnothing}\}$ portano la

$$\{\underline{A}\cap\underline{C}\}\cap\{\underline{B}\cap\neg\underline{C}\}=\underline{\varnothing} \tag{22}$$

Da: $\underline{A}\subseteq\underline{B}\cup\neg\underline{B}$ dovuta a $\text{Æ}\langle\underline{B},\underline{A}\,/\,\underline{A},\underline{B}\,/(20)\rangle$; $\text{Æ}\langle\neg\underline{B}\,/\,\underline{C}\,/(18)\rangle$; $\{\underline{A}\cap\underline{B}\}\cap\{\underline{A}\cap\neg\underline{B}\}=\underline{\varnothing}$ dovuta a $\text{Æ}\langle\underline{A},\underline{A},\underline{B}\,/\,\underline{A},\underline{B},\underline{C}\,/(22)\rangle$; segue

$$\underline{A}=\underline{A}\cap\{\underline{B}\cup\neg\underline{B}\}=\{\underline{A}\cap\underline{B}\}\cup\{\underline{A}\cap\neg\underline{B}\}=\{\underline{A}\cap\underline{B}\}+\{\underline{A}\cap\neg\underline{B}\} \tag{23}$$

Inerentemente le $\underline{A}\equiv\{K;i=1,\mathcal{N}\langle\underline{A}\rangle\}$ e $\underline{B}\equiv\{K;j=1,\mathcal{N}\langle\underline{B}\rangle\}$ si hanno le

$$\{\underline{A}\subseteq\underline{B}\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\underline{B}\subset\underline{A}\}\quad\{\mathcal{N}\langle\underline{A}\rangle\leq\mathcal{N}\langle\underline{B}\rangle\}\underline{\leftrightarrow}\{\underline{A}\subseteq\underline{B}\}\quad\{\mathcal{N}\langle\underline{B}\rangle<\mathcal{N}\langle\underline{A}\rangle\}\underline{\leftrightarrow}\{\underline{B}\subset\underline{A}\} \tag{24}$$

$$\underline{A}\cap\underline{B}=\{K;n=1,\min\langle\mathcal{N}_{\underline{A}},\mathcal{N}_{\underline{B}}\rangle\}=\{\underline{A}{}_\square\dot{\vee}_\square\underline{B}\}\quad\underline{A}\cup\underline{B}=\{K;n=1,\max\langle\mathcal{N}_{\underline{A}},\mathcal{N}_{\underline{B}}\rangle\}=\{\underline{A}{}_\square\dot{\vee}_\square\underline{B}\}\quad\{\underline{A}{}_\square\square_\square\underline{B}=\underline{A}\}\underline{\leftrightarrow}\{\underline{A}{}_\square\Box_\square\underline{B}=\underline{B}\} \tag{25}$$

di cui la $\{{}_\square\square_\square,{}_\square\Box_\square\}\equiv\{\{\cap,\cup\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cup,\cap\}\}$.

Si considerano i $\text{ɨ̿}-\text{ɨ}+1$ insiemi $\{\underline{A}_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$ di cui le $\underline{\mathbf{A}}\equiv\{\underline{A}_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$ $\mathcal{N}\langle\underline{\mathbf{A}}\rangle=\text{ɨ̿}-\text{ɨ}+1$.

L'addizione dei $\underline{\mathbf{A}}$ è l'insieme indicato $\Sigma_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ e costituito da tutti gli elementi di ognuno dei $\underline{\mathbf{A}}$. L'intersezione dei $\underline{\mathbf{A}}$ è l'insieme indicato $\cap_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ e costituito da ogni elemento che appartiene congiuntamente a ognuno dei $\underline{\mathbf{A}}$ cioè sia a $\underline{A}_{\text{ɨ}}$ sia a $\underline{A}_{\text{ɨ}+1}\ldots$sia a $\underline{A}_{\text{ɨ̿}}$. L'unione dei $\underline{\mathbf{A}}$ è l'insieme indicato $\cup_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ e costituito da ogni elemento che appartiene almeno a uno dei $\underline{\mathbf{A}}$. Il prodotto cartesiano dei $\underline{\mathbf{A}}$ è l'insieme indicato $\Pi_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ e costituito da ogni diversa $\mathcal{N}_{\underline{\mathbf{A}}}$-pla che può essere costituita scegliendone i $\mathcal{N}_{\underline{\mathbf{A}}}$ componenti come elementi appartenenti rispettivamente ai $\underline{\mathbf{A}}$, seguendo da ciò la $\Pi_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)\cdot\underline{\varnothing}=\underline{\varnothing}\cdot\Pi_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)=\underline{\varnothing}$.

Tali $\Sigma_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ $\cap_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ $\cup_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ e $\Pi_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)$ sono generalizzazioni dei rispettivi $\underline{A}+\underline{B}$ $\underline{A}\cap\underline{B}$ $\underline{A}\cup\underline{B}$ e $\underline{A}\cdot\underline{B}$, e se ne pone la $\Box_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_i)\equiv\{\underline{A}_{\text{ɨ}}{}_\square\square_\square\underline{A}_{\text{ɨ}+1}{}_\square\square_\square\ldots{}_\square\square_\square\underline{A}_{\text{ɨ̿}}\}$ di cui la $\{\Box,{}_\square\square_\square\}\equiv\{\{\Sigma,+\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cap,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cup,\cup\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\Pi,\cdot\}\}$.

Le commutatività e associatività (affermate dalle (17)) di addizione intersezione e unione di insiemi, portano la $\underline{A}_{a\langle\text{ɨ}\rangle}{}_\square\square_\square\{\underline{A}_{a\langle\text{ɨ}+1\rangle}{}_\square\square_\square\{\ldots{}_\square\square_\square\{\underline{A}_{a\langle\text{ɨ̿}-1\rangle}{}_\square\square_\square\underline{A}_{a\langle\text{ɨ̿}\rangle}\}\ldots\}\}=\underline{A}_{b\langle\text{ɨ}\rangle}{}_\square\square_\square\{\underline{A}_{b\langle\text{ɨ}+1\rangle}{}_\square\square_\square\{\ldots{}_\square\square_\square\{\underline{A}_{b\langle\text{ɨ̿}-1\rangle}{}_\square\square_\square\underline{A}_{b\langle\text{ɨ̿}\rangle}\}\ldots\}\}$ di cui le ${}_\square\square_\square\equiv\{+{}_\square\dot{\vee}_\square\cap{}_\square\dot{\vee}_\square\cup\}$ $\{a_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{b_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$, e quindi danno luogo alla

$$\text{Æ}\langle\underline{A},\{\{\Sigma,+\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cap,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cup,\cup\}\}\,/\,\text{ş},\{\Box,{}_\square\square_\square\}\,/(2.1.2.2),(2.1.2.3)\rangle \tag{26}$$

L'associatività (affermata dalla seconda delle (17)) del prodotto di insiemi, porta la

$$\text{Æ}\langle\underline{A},\{\Pi,\cdot\}\,/\,\text{ş},\{\Box,{}_\square\square_\square\}\,/(2.1.2.2),(2.1.2.3)\,\big|\,\{a_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{b_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{c_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\},\{a_j;j=\text{ɉ},\text{ɉ̿}\}=\{i;i\neq i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}\rangle \tag{27}$$

Le (26) e (18) portano la

$$\underline{C}{}_\square\square_\square\Box_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{A}_{a\langle i\rangle})=\Box_{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}}(\underline{C}{}_\square\square_\square\underline{A}_{b\langle i\rangle}) \tag{28}$$

di cui le $\{{}_\square\square_\square,\Box\}\equiv\{\{\cap,\cup\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{\cup,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{+,\cap\}{}_\square\dot{\vee}_\square\{+,\cup\}\}$ $\{a_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{b_i;i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}=\{i=\text{ɨ},\text{ɨ̿}\}$.

Le (26) e (27) rendono possibile conoscere il $\Box_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_i)$ con un procedimento iterativo quale il seguente. Si conosce $\mathscr{A}_0$ per mezzo della $\mathscr{A}_0=\underline{A}_{ɨ}$. Si effettuano le $ɨ-ɨ$ iterazioni indicate dal $\{i=1,ɨ-ɨ\}$. Nella i-esima iterazione si conosce l'inerente $\mathscr{A}_i$ usando la $\mathscr{A}_i=\underline{A}_{ɨ-i}\Box\mathscr{A}_{i-1}$. Si pone $\Box_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_i)=\mathscr{A}_{ɨ-ɨ}$.

Le (26) (27) (13) e (16) portano la

$$\mathfrak{N}\langle\Box_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_i)\rangle=\Box_{i=ɨ,ɨ}(\mathfrak{N}\langle\underline{A}_i\rangle) \tag{29}$$

di cui la $\Box\equiv\{\Sigma\text{∘}\forall\text{∘}\Pi\}$; e che nel caso $\Box\equiv\Pi$ è conforme al considerare che il i-esimo elemento, di una $\mathfrak{N}_{\underline{A}}$-pla elemento di $\Pi_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_i)$, può essere scelto in $\mathfrak{N}\langle\underline{A}_i\rangle$ modi diversi.

Inerentemente i $(ɨ-ɨ+1)\cdot(ɉ-ɉ+1)$ insiemi $\{\underline{A}_{ij};i=ɨ,ɨ;j=ɉ,ɉ\}$ si hanno le

$$\Pi_{j=ɉ,ɉ}(\cap_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_{ij}))\subseteq\cap_{i=ɨ,ɨ}(\Pi_{j=ɉ,ɉ}(\underline{A}_{ij}))$$

$$\neg\exists\{\{ş\,/\,ş\equiv\varsigma;ş\in\underline{A}_{ac}\}\neq\{ş\,/\,ş\equiv\varsigma;ş\in\underline{A}_{bc}\};\varsigma\in\underline{A}_{ac};\varsigma\in\underline{A}_{bc};\{a,b\}\subseteq\{i=ɨ,ɨ\};c\in\{j=ɉ,ɉ\}\}\underline{\rightarrow}$$

$$\{\cap_{i=ɨ,ɨ}(\Pi_{j=ɉ,ɉ}(\underline{A}_{ij}))=\Pi_{j=ɉ,ɉ}(\cap_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_{ij}))\} \tag{30}$$

Inerentemente la $Æ\langle\underline{A}_n;n=1,ꞥ\,/\,\underline{A}_i;i=ɨ,ɨ\rangle$ si hanno (con riferimento alla simbologia di analisi combinatoria posta in sez. 2.1.2) le

$$\cup_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)=\underline{D}_{\mathcal{A}}-\underline{P}_{\mathcal{A}} \tag{31}$$

$$\underline{D}_{\mathcal{A}}\equiv\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\underline{D}_{\mathcal{A}c})\quad \underline{D}_{\mathcal{A}c}\equiv\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,\check{s}\langle c\rangle\rangle}(\cap_{a=1,\check{s}\langle c\rangle}(\underline{A}_{\underline{n}\langle\check{s}\langle c\rangle,b,a\rangle})) \tag{32}$$

$$\underline{P}_{\mathcal{A}}\equiv\Sigma_{c=1,NP\langle ꞥ\rangle}(\underline{P}_{\mathcal{A}c})\quad \underline{P}_{\mathcal{A}c}\equiv\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,\hat{s}\langle c\rangle\rangle}(\cap_{a=1,\hat{s}\langle c\rangle}(\underline{A}_{\underline{n}\langle\hat{s}\langle c\rangle,b,a\rangle})) \tag{33}$$

di cui la $\underline{P}_{\mathcal{A}}\subset\underline{D}_{\mathcal{A}}$, e le cui $\{\check{s}_c;c=1,ND_{ꞥ}\}$ e $\{\hat{s}_c;c=1,NP_{ꞥ}\}$ sono rispettivamente la successione dei numeri dispari e pari presenti tra i $\{n=1,ꞥ\}$.

Da: prima delle (32); $Æ\langle\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\underline{D}_{\mathcal{A}c})\,/\,\Sigma_{i=ɨ,ɨ}(\underline{A}_i)\,/\,(29)\rangle$; seconda delle (32); (29); segue

$$\mathfrak{N}\langle\underline{D}_{\mathcal{A}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\underline{D}_{\mathcal{A}c})\rangle=\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\mathfrak{N}\langle\underline{D}_{\mathcal{A}c}\rangle)=\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\mathfrak{N}\langle\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,\check{s}\langle c\rangle\rangle}(\cap_{a=1,\check{s}\langle c\rangle}(\underline{A}_{\underline{n}\langle\check{s}\langle c\rangle,b,a\rangle}))\rangle)=$$
$$\Sigma_{c=1,ND\langle ꞥ\rangle}(\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,\check{s}\langle c\rangle\rangle}(\mathfrak{N}\langle\cap_{a=1,\check{s}\langle c\rangle}(\underline{A}_{\underline{n}\langle\check{s}\langle c\rangle,b,a\rangle})\rangle)) \tag{34}$$

Analogamente a come dalle (32) e (29) è stata dedotta la (34), dalle (33) e (29) si deduce la

$$\mathfrak{N}\langle\underline{P}_{\mathcal{A}}\rangle=\Sigma_{c=1,NP\langle ꞥ\rangle}(\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,\hat{s}\langle c\rangle\rangle}(\mathfrak{N}\langle\cap_{a=1,\hat{s}\langle c\rangle}(\underline{A}_{\underline{n}\langle\hat{s}\langle c\rangle,b,a\rangle})\rangle)) \tag{35}$$

Da: (31); $\underline{P}_{\mathcal{A}}\subset\underline{D}_{\mathcal{A}}$ e $Æ\langle\underline{D}_{\mathcal{A}},\underline{P}_{\mathcal{A}}\,/\,\underline{A},\underline{B}\,/\,(14)\rangle$; (34) e (35); segue

$$\mathfrak{N}\langle\cup_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{D}_{\mathcal{A}}-\underline{P}_{\mathcal{A}}\rangle=\mathfrak{N}\langle\underline{D}_{\mathcal{A}}\rangle-\mathfrak{N}\langle\underline{P}_{\mathcal{A}}\rangle=\Sigma_{c=1,ꞥ}((-1)^{c+1}\cdot\Sigma_{b=1,Б\langle ꞥ,c\rangle}(\mathfrak{N}\langle\cap_{a=1,c}(\underline{A}_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle})\rangle)) \tag{36}$$

La $\{\underline{A}_a\cap\underline{A}_b=\varnothing;\forall\{a,b\}\subseteq\{n=1,ꞥ\}\}$ porta la $\{\cap_{a=1,c}(\underline{A}_{\underline{n}\langle c,b,a\rangle})=\varnothing;b=1,Б\langle ꞥ,c\rangle;c=2,ꞥ\}$. Questa e le $\{(32),(33)\}$ portano le $\underline{D}_{\mathcal{A}}\equiv\Sigma_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)$ $\underline{P}_{\mathcal{A}}\equiv\varnothing$ che introdotte nella (31) danno luogo a IPM

$$\{\cup_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)=\Sigma_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)\}\underline{\leftarrow}\{\underline{A}_a\cap\underline{A}_b=\varnothing;\forall\{a,b\}\subseteq\{n=1,ꞥ\}\} \tag{37}$$

Una suddivisione di un insieme $\underline{A}$ è un insieme $\underline{B}$ di cui le $\underline{B}\equiv\{\underline{B}_d;d=1,ꟈ\}$ $\underline{A}=\cup_{d=1,ꟈ}(\underline{B}_d)$ $\{\underline{B}_a\cap\underline{B}_b=\varnothing;\forall\{a,b\}\subseteq\{d=1,ꟈ\}\}$. Queste e la $Æ\langle\cup_{d=1,ꟈ}(\underline{B}_d)\,/\,\cup_{n=1,ꞥ}(\underline{A}_n)\,/\,(37)\rangle$ portano la $\underline{B}=\underline{A}$.

Si pongono le

$$\mathbb{d}^2\langle\underline{A},\kappa\rangle\equiv\mathfrak{N}\langle\underline{A}\rangle\cdot(\mathsf{m}\langle\underline{A}\rangle-\kappa)^2\quad \mathbf{D}^2\langle\underline{A},\underline{B}\rangle\equiv\Sigma_{d=1,ꟈ}(\mathsf{d}^2\langle\underline{B}_d\rangle)\quad \mathbb{D}^2\langle\underline{A},\underline{B}\rangle\equiv\Sigma_{d=1,ꟈ}(\mathbb{d}^2\langle\underline{B}_d,\mathsf{m}\langle\underline{A}\rangle\rangle) \tag{38}$$

Si pongono le $\underline{x}\equiv\{x_n;n=1,ꞥ\}$ e $x\equiv\{\underline{x}\,|\,ꞥ=1\}$. Da: þ; $(a\pm b)^2=a^2\pm2\cdot a\cdot b+b^2$, quarta delle (1), prima delle (38); $\Sigma_{n=1,ꞥ}(x_n-\mathsf{m}\langle\underline{x}\rangle)=\Sigma\langle\underline{x}\rangle-ꞥ\cdot\mathsf{m}_{\underline{x}}=0$ (conforme alla $\mathsf{m}_{\underline{x}}\equiv ꞥ^{-1}\cdot\Sigma_{\underline{x}}$); segue

$$\Sigma_{n=1,ꞥ}((x_n-\kappa)^2)=\Sigma_{n=1,ꞥ}((x_n-\mathsf{m}\langle\underline{x}\rangle+\mathsf{m}_{\underline{x}}-\kappa)^2)=\mathsf{d}^2\langle\underline{x}\rangle+\mathbb{d}^2\langle\underline{x},\kappa\rangle+2\cdot(\mathsf{m}_{\underline{x}}-\kappa)\cdot\Sigma_{n=1,ꞥ}(x_n-\mathsf{m}_{\underline{x}})=\mathsf{d}^2\langle\underline{x}\rangle+\mathbb{d}^2\langle\underline{x},\kappa\rangle \tag{39}$$

Si stabilisce una $\{n_{hk};k=1,ꝁ_h;h=1,ꜧ\}=\{n=1,ꞥ\}$. Questa porta che il $\underline{X}$ (di cui le $\underline{X}\equiv\{\underline{X}_h;h=1,ꜧ\}$ $\underline{X}_h\equiv\{x_{n\langle h,k\rangle};k=1,ꝁ_h\}$) è una suddivisione di $\underline{x}$ e quindi la $Æ\langle\underline{x},\underline{X}\,/\,\underline{A},\underline{B}\,/\,\underline{B}=\underline{A}\rangle$ che dà luogo alla $\underline{X}=\underline{x}$.

Da: þ; $\underline{X}=\underline{x}$; segue $\mathsf{m}_{\underline{x}}\equiv ꞥ^{-1}\cdot\Sigma\langle\underline{x}\rangle=ꞥ^{-1}\cdot\Sigma_{h=1,ꜧ}(\Sigma_{k=1,ꝁ\langle h\rangle}(x_{n\langle h,k\rangle}))=ꞥ^{-1}\cdot\Sigma_{h=1,ꜧ}(\Sigma\langle\underline{X}_h\rangle)=ꞥ^{-1}\cdot\Sigma_{h=1,ꜧ}(ꝁ_h\cdot\mathsf{m}\langle\underline{X}_h\rangle)$.

Da: þ; $\underline{X}=\underline{x}$; $Æ\langle\underline{X}_h,\mathsf{m}_{\underline{x}}\,/\,\underline{x},\kappa\,/\,(39)\rangle$; seconda e terza delle (38); segue

$$\mathsf{d}^2\langle\underline{x}\rangle\equiv\Sigma_{n=1,ꞥ}((x_n-\mathsf{m}_{\underline{x}})^2)=\Sigma_{h=1,ꜧ}(\Sigma_{k=1,ꝁ\langle h\rangle}((x_{n\langle h,k\rangle}-\mathsf{m}_{\underline{x}})^2)=\Sigma_{h=1,ꜧ}(\mathsf{d}^2\langle\underline{X}_h\rangle)+\Sigma_{h=1,ꜧ}(\mathbb{d}^2\langle\underline{X}_h,\mathsf{m}_{\underline{x}}\rangle)=$$

$\mathsf{D}^2\langle \underline{x},\underline{X}\rangle + \mathbb{D}^2\langle \underline{x},\underline{X}\rangle$ (40)

2.3 *Nozioni di algebra lineare*

I simboli $\{=,+,-,\cdot\}$ della consueta notazione matriciale sono sostituiti dai rispettivi $\{=,+,-,\circ\}$. Le parentesi $[\![\,]\!]$ delimitano una proposizione che definisce una matrice. Una $[\![ş_{ab};a=1,\cancel{a};b=1,\cancel{b}]\!]$ è la matrice che ha $ş_{ab}$ come elemento della a-esima riga e b-esima colonna.

Si pongono le $\underline{\underline{A}}\equiv[\![A_{mn};m=1,\cancel{m};n=1,\cancel{n}]\!]$ $\{m=1,\cancel{m}\}=\{\mu_m;m=1,\cancel{m}\}$ e $\{n=1,\cancel{n}\}=\{\nu_n;n=1,\cancel{n}\}$. La $\underline{\underline{A}}$ è una matrice quadrata se $\cancel{m}=\cancel{n}$. La $\underline{\underline{A}}^T$ è la trasposta di $\underline{\underline{A}}$, ossia è la matrice che si ottiene da $\underline{\underline{A}}$ scambiandone le righe con le colonne nel senso della $\underline{\underline{A}}^T\equiv[\![A_{Tnm};n=1,\cancel{n};m=1,\cancel{m}]\!]$ di cui la $A_{Tnm}\equiv A_{mn}$. Il $\mathsf{det}\langle\underline{\underline{A}}\rangle$ è il determinante di $\underline{\underline{A}}$, è definito se $\underline{\underline{A}}$ è quadrata, e se ne ha la $\{\mathsf{det}_{\underline{\underline{A}}}=A_{11};\forall\cancel{m}=1\}$. La $\underline{\underline{A}}^{-1}$ è la matrice inversa di $\underline{\underline{A}}$ e esiste se $\mathsf{det}_{\underline{\underline{A}}}\neq 0$. La $\underline{\underline{A}}_{mn}$ è la matrice di $\cancel{m}-1$ righe e $\cancel{n}-1$ colonne che si ottiene eliminando da $\underline{\underline{A}}$ la riga m-esima e la colonna n-esima. Il $Я\langle\underline{\underline{A}}\rangle$ è il rango di $\underline{\underline{A}}$ e è definito dalla $Я_{\underline{\underline{A}}}\equiv\mathsf{max}\langle p\,/\,\mathsf{det}\langle A_{\mu\langle m\rangle,\nu\langle n\rangle};m=1,p;n=1,p\rangle\neq 0\rangle$. Il $\mathsf{agg}\langle A_{mn}\rangle$ è l'aggiunto di A_{mn} e è definito dalla $\mathsf{agg}\langle A_{mn}\rangle\equiv(-1)^{m+n}\cdot\mathsf{det}\langle\underline{\underline{A}}_{mn}\rangle$. La $\underline{\underline{A}}$ è simmetrica se $\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{A}}$.

La $[\![\underline{\underline{A}}^{-1}]\!]^T=[\![\underline{\underline{A}}^T]\!]^{-1}$ (di cui in [12]) e l'essere la $\underline{\underline{A}}$ simmetrica portano IPM

$\{[\![\underline{\underline{A}}^{-1}]\!]^T=\underline{\underline{A}}^{-1}\}\underline{\leftarrow}\{\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{A}}\}$ (1)

Inerentemente le $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ si ha la

$\{\Sigma_{n=1,\cancel{m}}(\mathcal{A}_{an}\cdot A_{nb})=\delta_{ab}\,|\,\underline{\underline{A}}^{-1}\equiv[\![\mathcal{A}_{mn};m=1,\cancel{m};n=1,\cancel{m}]\!]\}$ (2)

Il primo teorema di Laplace (di cui in [17]) porta la

$\{\mathsf{det}\langle\underline{\underline{A}}\rangle=\Sigma_{n=1,\cancel{m}}(A_{mn}\cdot\mathsf{agg}\langle A_{mn}\rangle)=\Sigma_{m=1,\cancel{m}}(A_{mn}\cdot\mathsf{agg}\langle A_{mn}\rangle);m=1,\cancel{m};n=1,\cancel{m}\}$ (3)

Un sistema lineare di $\cancel{m}$ equazioni nelle $\cancel{n}$ incognite $\underline{x}$, è indicato $\underline{\underline{A}}\circ\underline{x}=\underline{B}$ essendo: $\underline{\underline{A}}$ la matrice dei coefficienti, $\underline{x}$ la colonna delle incognite, e $\underline{B}$ (di cui la $\underline{B}\equiv\{B_m;m=1,\cancel{m}\}$) la colonna dei termini noti.

Un $\underline{\underline{A}}\circ\underline{x}=\underline{B}$ è compatibile se ammette almeno una soluzione $\underline{x}$ ossia se esiste almeno un $\underline{x}$ che lo rende vero. Per un $\underline{\underline{A}}\circ\underline{x}=\underline{B}$ compatibile vale la

$\big\{\mathsf{det}\langle A_{\mu\langle m\rangle,\nu\langle n\rangle};m=1,Я_{\underline{\underline{A}}};n=1,Я_{\underline{\underline{A}}}\rangle\neq 0\big\}\leftrightarrow$
$\big\{\{x_{\nu\langle n\rangle};n=1,Я_{\underline{\underline{A}}}\}=[\![A_{\mu\langle m\rangle,\nu\langle n\rangle};m=1,Я_{\underline{\underline{A}}};n=1,Я_{\underline{\underline{A}}}]\!]^{-1}\circ\{B_{\mu\langle m\rangle}-\Sigma_{n=Я\langle\underline{\underline{A}}\rangle+1,\cancel{n}}(A_{\mu\langle m\rangle,\nu\langle n\rangle}\cdot x_{\nu\langle n\rangle});m=1,Я_{\underline{\underline{A}}}\}\big\}$ (4)

la cui sommatoria è considerata nulla se $Я_{\underline{\underline{A}}}>\cancel{n}-1$.

I $\mathsf{det}_{\underline{\underline{A}}}$ $Я_{\underline{\underline{A}}}$ e $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sono calcolabili con i noti metodi numerici quali quelli esposti nei [4] e [12].

2.4 *Nozioni di analisi matematica*

2.4.1 *Gli insiemi di numeri reali e lo spazio euclideo multidimensionale*

Il $\mathfrak{R}^1$ è l'insieme costituito da tutti i diversi numeri reali. I $[a,b]$ (a,b) $(a,b]$ e $[a,b)$, di cui le $[a,b]\equiv\{c\,/\,a\leq c\leq b;c\in\mathfrak{R}^1\}$ $(a,b)\equiv\{c\,/\,a<c<b;c\in\mathfrak{R}^1\}$ $(a,b]\equiv\{c\,/\,a<c\leq b;c\in\mathfrak{R}^1\}$ $[a,b)\equiv\{c\,/\,a\leq c<b;c\in\mathfrak{R}^1\}$, sono (sottintendendone la $a\leq b$) gli intervalli di $\mathfrak{R}^1$ rispettivamente chiuso, aperto, aperto a sinistra e chiuso a destra, chiuso a sinistra e aperto a destra; e se ne hanno le $[a,b]=(a,b)+\{a,b\}$ $(a,b)=[a,b]-\{a,b\}$ $(a,b]=(a,b)+\{b\}$ $(a,b)=(a,b]-\{b\}$ (e così via). Il ∞ è un numero positivo illimitatamente grande; per cui si ha la $\mathfrak{R}^1\equiv(-\infty,\infty)$, e un numero x è limitato o illimitato se ne vale la $|x|\neq\infty$ o la $|x|=\infty$.

Si pongono le $\{[a,|\,a\equiv-\infty\}\equiv\{(a,\}$ $\{,b]\,|\,b\equiv\infty\}\equiv\{,b)\}$, e le $\mathfrak{R}^{\cancel{n}}\equiv\Pi_{n=1,\cancel{n}}(\mathfrak{R}^1)$ $\mathfrak{R}_+^{\cancel{n}}\equiv\Pi_{n=1,\cancel{n}}([0,\infty))$.

Lo spazio percepito dai sensi umani è detto euclideo. Il concetto di spazio euclideo è generalizzato da quello di uno spazio euclideo a $\cancel{n}$ dimensioni che si chiama $\mathbb{S}^{\cancel{n}}$: un punto è un $\mathbb{S}^0$, una retta è un $\mathbb{S}^1$, un piano è un $\mathbb{S}^2$, lo spazio euclideo dell'esperienza sensoriale umana è un $\mathbb{S}^3$, per

$\not{n}>3$ un $\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$ non può essere immaginato dalla mente umana.

Una consueta rappresentazione cartesiana, ossia una corrispondenza biunivoca tra un insieme di coppie di numeri reali e un insieme di punti di un piano (che è detta piano cartesiano), è generalizzata da una $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$ tale che la lunghezza di un qualunque segmento rettilineo, che ha come punti estremi i $\{P_{\underline{a}},P_{\underline{b}}\}$ di cui le $P_{\underline{a}}\in\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$ e $P_{\underline{b}}\in\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$, è uguale alla $Đ\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$ di cui le $\underline{a}\equiv\{a_n;n=1,\not{n}\}$ $\underline{b}\equiv\{b_n;n=1,\not{n}\}$ $Đ\langle\underline{a},\underline{b}\rangle\equiv\left|(\Sigma_{n=1,\not{n}}((b_n-a_n)^2))^{0.5}\right|=Đ\langle\underline{b},\underline{a}\rangle$ $\{\underline{a},P_{\underline{a}}\}\in\{\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}\}$ $\{\underline{b},P_{\underline{b}}\}\in\{\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}\}$.

Una $\underline{A}\Leftrightarrow\underline{B}$ può indurre la semplificazione del sottintenderla nell'identificare $\underline{A}$ come $\underline{B}$ e quindi gli elementi di $\underline{A}$ come quelli di $\underline{B}$. Pertanto un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è identificato come un $\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$ e gli elementi di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ sono identificati come i punti di $\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$, in quanto è sottintesa la $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathbb{S}}^{\not{n}}$.

Uno spazio euclideo $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è detto multidimensionale (o pluridimensionale) nel senso della $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\Pi_{n=1,\not{n}}(\underline{\mathscr{R}}_n)$ di cui la $\underline{\mathscr{R}}_n=\underline{\mathfrak{R}}^1$ e il cui $\underline{\mathscr{R}}_n$ è detto la n-esima dimensione di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$. Conformemente con ciò si pongono anche le $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\equiv\Pi_{n=1,\not{n}}(\underline{\mathscr{R}}_n)$ $\underline{\mathscr{R}}_n=\underline{\mathfrak{R}}^1$). Inoltre si pone la $\neg^{\not{n}}\underline{A}\equiv\neg\underline{A}\cap\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Si considera un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ di cui la $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\subseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$. Conformemente alle Æ$\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}},\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}/\underline{A},\underline{B}/(2.2.8)\rangle$ $\{$Æ$\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}},\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}/\underline{A},\underline{B}/(2.2.12)\rangle$,Æ$\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}},\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}/\underline{A},\underline{B}/(2.2.7)\rangle\}$ Æ$\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}/\underline{A}/(2.2.11),(2.2.20)\rangle$ e Æ$\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}},\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}/\underline{A},\underline{B}/(2.2.23)\rangle$ si hanno le rispettive

$$\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}-\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}} \qquad \underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cap\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}-\neg\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}-\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}} \qquad \underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cap\neg\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cap\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\neg\{\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cup\neg\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}=\varnothing$$
$$\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cup\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}+\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}} \tag{1}$$

La $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$ è la misura di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ in $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$. Il $D\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$, di cui la $D\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle\equiv\mathsf{max}\langle Đ\langle\underline{a},\underline{b}\rangle/\{\underline{a}\in\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}\wedge\{\underline{b}\in\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}\rangle$, è il diametro di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Un $\underline{D}\langle\underline{C},\rho\rangle$, di cui le $\underline{D}_{C\rho}\equiv\{\underline{c}/Đ\langle\underline{c},\underline{C}\rangle\leq\rho;\underline{c}\in\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}$ e $\underline{C}\equiv\{C_n;n=1,\not{n}\}$, è un dominio circolare di centro $\underline{C}$ e raggio ρ.

Un $\underline{\mathfrak{I}}\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$, di cui le $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}\equiv\{\underline{c}/\{a_n\leq c_n\leq b_n;n=1,\not{n}\};\underline{c}\in\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}=\Pi_{n=1,\not{n}}([a_n,b_n])$ $\underline{c}\equiv\{c_n;n=1,\not{n}\}$ e $\{a_n\leq b_n;n=1,\not{n}\}$, è un intervallo chiuso (o dominio rettangolare) di punti estremi $\underline{a}$ e $\underline{b}$. La $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}\rangle$, di cui la $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}\rangle\equiv\Pi_{n=1,\not{n}}(b_n-a_n)$, è la misura di $\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}$ in $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Un punto $\underline{c}$ è, per un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$, interno o esterno o di frontiera nei rispettivi casi $\exists\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle\subseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ o $\exists\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle\subseteq\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ o $\{\neg\exists\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle\subseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}\wedge\{\neg\exists\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle\subseteq\neg^{\not{n}}\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}$ dei quali la $\rho>0$. La frontiera di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è l'insieme indicato $\partial\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ e costituito da tutti i punti che sono di frontiera per $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è chiuso o aperto rispettivamente se $\partial\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\subseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ o $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cap\partial\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\varnothing$. Un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ aperto è un campo. Un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è un dominio se $\exists\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\underline{\wp}^{\not{n}}\cup\partial\underline{\wp}^{\not{n}}$ il cui $\underline{\wp}^{\not{n}}$ è un campo. Un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è limitato o illimitato rispettivamente se vale o non la $\exists\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\subset\underline{\mathfrak{I}}\langle\underline{a},\underline{b}\rangle$ di cui la $\{|a_n|\neq\infty\neq|b_n|;n=1,\not{n}\}$.

Un $\underline{c}$ è un punto di accumulazione di un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$, se $\{\exists\{\underline{x}\in\{\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle\cap\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\}|\underline{x}\neq\underline{c}\};\forall\{\underline{D}\langle\underline{c},\rho\rangle|\rho>0\}\}$. Un punto di accumulazione è detto anche non isolato (e viceversa). L'insieme di tutti i punti di accumulazione di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$, è il suo insieme derivato e è indicato $\partial\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Una decomposizione di un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è un insieme $\{\underline{\mathfrak{R}}_d;d=1,\not{d}\}$ di cui le $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}=\cup_{d=1,\not{d}}(\underline{\mathfrak{R}}_d)$ e $\{\{\underline{\mathfrak{R}}_a-\partial\underline{\mathfrak{R}}_a\}\cap\{\underline{\mathfrak{R}}_b-\partial\underline{\mathfrak{R}}_b\}=\varnothing;\forall\{a,b\}\subseteq\{d=1,\not{d}\}\}$.

Inerentemente un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ limitato, si considera: un intervallo chiuso $\underline{\mathfrak{I}}$ di cui la $\underline{\mathfrak{I}}\supseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$; una decomposizione di $\underline{\mathfrak{I}}$ che si chiama $\underline{\mathfrak{D}}$ e è detta coordinata in quanto ogni suo elemento è un intervallo chiuso; le $\{\underline{\mathfrak{I}}_{Ea};a=1,\not{a}\}\equiv\{\underline{\mathfrak{I}}/\underline{\mathfrak{I}}\cap\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\neq\varnothing;\underline{\mathfrak{I}}\in\underline{\mathfrak{D}}\}$ $\{\underline{\mathfrak{I}}_{Ib};b=1,\not{b}\}\equiv\{\underline{\mathfrak{I}}/\underline{\mathfrak{I}}\subset\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}};\underline{\mathfrak{I}}\in\underline{\mathfrak{D}}\}$; la $Đ_{\mathfrak{D}}\equiv\mathsf{max}\langle D\langle\underline{\mathfrak{I}}\rangle/\underline{\mathfrak{I}}\in\underline{\mathfrak{D}}\rangle$ la cui $Đ_{\mathfrak{D}}$ è la norma di $\underline{\mathfrak{D}}$; le $\mathsf{mis}_E\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle\equiv\mathsf{lim}_{Đ\langle\mathfrak{D}\rangle\to0}(\Sigma_{a=1,\not{a}}(\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{I}}_{Ea}\rangle))$ e $\mathsf{mis}_I\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle\equiv\mathsf{lim}_{Đ\langle\mathfrak{D}\rangle\to0}(\Sigma_{b=1,\not{b}}(\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{I}}_{Ib}\rangle))$ le cui $\mathsf{mis}_E\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$ e $\mathsf{mis}_I\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle\}$ sono le misure esterna e interna di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$. Un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ è misurabile se ne vale la $\mathsf{mis}_I\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle=\mathsf{mis}_E\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$ per cui se ne ha la $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle=\mathsf{mis}_I\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$ con la $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle$ che è la misura di $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$.

Si hanno la $\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\rangle=\mathsf{max}\langle\mathsf{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}\cap\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}\rangle/\forall\underline{\mathfrak{I}}_{\underline{a},\underline{b}}\rangle$ per cui anche un $\underline{\mathfrak{R}}^{\not{n}}$ illimitato può essere misurabile con misura limitata o illimitata, e la

$$\{\mathrm{mis}\langle\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}}\rangle=0\}\underline{\leftrightarrow}\exists\{\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}-k};\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}-k}\subseteq\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}-k};1\leq k\leq\cancel{n}\} \quad (2)$$

la cui $\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}}\Leftrightarrow\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}-k}$ è intesa a prescindere dal noto paradosso per cui un insieme infinito può essere posto in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

2.4.2 *Le funzioni analitiche*

Un $\mathfrak{R}\langle G\rangle$ è l'insieme dei valori che possono essere assunti dalla grandezza G, avendone le $\mathfrak{R}_G\subseteq\mathfrak{R}^1$ e $\{G\in\mathfrak{R}^1\}\underline{\leftrightarrow}\{G\in\mathfrak{R}_G\}$. Una tale G è specificamente una costante o una variabile, rispettivamente se il suo $\mathfrak{R}_G$ è costituito da un unico numero o da molteplici numeri. L'essere una G un elemento di un certo insieme, implica in ogni caso anche l'essere un elemento dell'intersezione di tale insieme e il $\mathfrak{R}_G$. Una proprietà di una G vale nell'intero $\mathfrak{R}_G$ a meno di diversa indicazione specifica. Una variabile G è chiamata occasionalmente parametro analitico quando è considerata come una costante di valore uguale a uno di quelli che ne costituiscono il $\mathfrak{R}_G$.

A un insieme di grandezze $\underline{G}$ (di cui la $\underline{G}\equiv\{G_a;a=1,\cancel{a}\}$) è associato il $\mathfrak{R}\langle\underline{G}\rangle$ (di cui la $\mathfrak{R}_{\underline{G}}\subseteq\mathfrak{R}^{\cancel{a}}$) come l'insieme di ogni $\cancel{a}$-pla di valori che può essere assunta dalle $\underline{G}$, avendone le Æ$\langle\mathfrak{R}_{\underline{G}},\mathfrak{R}^{\cancel{a}}/\underline{\mathfrak{R}}^{\cancel{n}},\mathfrak{R}^{\cancel{n}}/(2.4.1.1)\rangle$ e

$$\{\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}\}\underline{\leftrightarrow}\{\underline{G}\in\mathfrak{R}_{\underline{G}}\}\underline{\leftrightarrow}\bigwedge_{a=1,\cancel{a}}(G_a\in\mathfrak{R}\langle G_a\rangle) \quad (1)$$

la cui $\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}$ consiste nel considerare tutte le $\underline{G}$ in uno stesso $\mathfrak{R}^{\cancel{a}}$.

Una G è indipendente dalle $\underline{G}$ e si indica ciò con la $\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle$, se nessuna $\cancel{a}$-pla di valori delle $\underline{G}$ pone alcun vincolo ai valori di G. Una G è una costante rispetto le variabili $\underline{G}$, quando se ne ha la $\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle$ e se ne considera un solo valore. Delle $\underline{G}$ sono tra loro indipendenti (dicendo equivalentemente anche che sono indipendenti) e si indica ciò con la $\ddot{\mathbb{I}}\langle\underline{G}\rangle$, se ogni G_a è indipendente dalle rispettive $\underline{G}^a$: $\ddot{\mathbb{I}}_{\underline{G}}\equiv\{\ddot{I}\langle G_a|\underline{G}^a\rangle;a=1,\cancel{a}\}$.

Sono sottintese: prive di significato sia una $\ddot{\mathbb{I}}_{\underline{G}}$ di cui la $\mathcal{N}\langle\underline{G}\rangle=1$ sia una $\{\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle\,|\,G\in\underline{G}\}$; le $\{\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle;\forall\{G,\underline{G}\}\}$ e $\{\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle;\forall\underline{G}\}\equiv\{\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle;\forall\{\underline{G}\,|\,G\notin\underline{G}\}\}$.

Si hanno le $\{\ddot{I}\langle G|\underline{G}\rangle;\forall\mathcal{N}\langle\mathfrak{R}_G\rangle=1\}$ $\{\ddot{\mathbb{I}}_{\underline{G}};\forall\{\mathcal{N}\langle\mathfrak{R}\langle G_a\rangle\rangle=1;a=1,\cancel{a}\}\}$ e, intendendo la $\{a_p;p=1,\cancel{p}\}\subset\{a=1,\cancel{a}\}$, le

$$\mathfrak{R}\langle\underline{G}\rangle\subseteq\Pi_{a=1,\cancel{a}}(\mathfrak{R}\langle G_a\rangle)\subseteq\mathfrak{R}^{\cancel{a}} \qquad \ddot{\mathbb{I}}\langle\underline{G}\rangle\underline{\leftrightarrow}\{\mathfrak{R}\langle\underline{G}\rangle=\Pi_{a=1,\cancel{a}}(\mathfrak{R}\langle G_a\rangle)\} \qquad \ddot{I}\langle G_1|\underline{G}^1\rangle\underline{\leftrightarrow}\{\mathfrak{R}\langle\underline{G}\rangle=\mathfrak{R}\langle G_1\rangle\cdot\mathfrak{R}\langle\underline{G}^1\rangle\}$$
$$\{\underline{G}\in\mathfrak{R}\langle\underline{G}\rangle\}\underline{\rightarrow}\{\underline{G}^{\{a\langle p\rangle;p=1,\cancel{p}\}}\in\mathfrak{R}\langle\underline{G}^{\{a\langle p\rangle;p=1,\cancel{p}\}}\rangle\} \quad (2)$$

La $\underline{G}^a\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}-1}$ (dovuta all'ultima delle (2) e a $\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}$) e la Æ$\langle G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle},\underline{G}^a\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}-1}/\mathcal{P}_A,\mathcal{P}_B/(2.1.1.7)\rangle$ portano IPM $\{\{G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle}\}\underline{\rightarrow}\{\underline{G}^a\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}-1}\}\}\underline{\leftarrow}\{\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}\}$. Da: questa, $\{\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}\}$, e Æ$\langle G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle},\underline{G}^a\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}-1}/\mathcal{P}_A,\mathcal{P}_B/(2.1.1.3)\rangle$; Æ$\langle\underline{G}^a/\underline{G}/(1)\rangle$; segue IPM

$$\{\{G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle}\}\underline{\leftrightarrow}\{\{G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle}\}\wedge\{\underline{G}^a\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}-1}\}\}\underline{\leftrightarrow}\{\{G_a\in\underline{\mathfrak{R}}_{G\langle a\rangle}\}\wedge\{\underline{G}^a\in\mathfrak{R}\langle\underline{G}^a\rangle\}\}\}\underline{\leftarrow}\{\underline{G}\in\mathfrak{R}^{\cancel{a}}\} \quad (3)$$

Un $f(\underline{x})$ è il nome di una funzione analitica delle variabili $\underline{x}$ cioè di un'espressione matematica dove sono presenti tali variabili e dove ogni altra grandezza è una costante rispetto a esse. Una $f(\underline{x})$ ha come principale la proprietà numero (avendo perciò $f(\underline{x})$ anche l'identità di grandezza) i cui valori possono essere calcolati come risultato delle operazioni da essa indicate. Il $\mathfrak{R}\langle\underline{x}\rangle$ è l'insieme di definizione di $f(\underline{x})$ nel senso che il ruolo di $\underline{x}$ in $f(\underline{x})$ può essere assunto solo da un elemento di $\mathfrak{R}_{\underline{x}}$, e in conformità a ciò è sottinteso che ogni proprietà di una $f(\underline{x})$ vale per ogni elemento di $\mathfrak{R}_{\underline{x}}$. Una $f(\underline{x})$ è monodroma o polidroma rispettivamente se, per ogni $\cancel{n}$-pla di valori che vi assumono le $\underline{x}$, esprime un solo valore o più valori. Ogni $f(\underline{x})$ è sottintesa monodroma. Una $y=f(\underline{x})$ definisce y come la grandezza espressa dal valore di $f(\underline{x})$, e perciò si dice che la y è una funzione delle $\underline{x}$. In relazione a una $f(\underline{x})$ si sottintende: le $f=f(\underline{x})$ e $f^{\$}(\underline{x})\equiv(f(\underline{x}))^{\$}$, e che una $f(\underline{\mathrm{x}})$ (di cui la $\underline{\mathrm{x}}\equiv\{\mathrm{x}_n;n=1,\cancel{n}\}$) è la $f(\underline{x})$ dove ognuna delle $\underline{x}$ è sostituita dalla rispettiva delle $\underline{\mathrm{x}}$. In relazione a una grandezza f è sottintesa una $f=f(\underline{x})$ quando l'inerente $f(\underline{x})$ è definita da precedenti posizioni dell'attuale contesto. Conformemente a quanto testé è sottintesa anche la $\{f_A\equiv f_B\}\underline{\leftrightarrow}\{f_A(\underline{x})\equiv f_B(\underline{x})\}$.

Anche f esprime lo stesso valore numerico di $f(\underline{x})$. Tuttavia, mentre per il $\mathbb{R}\langle f\rangle$ si hanno le $\{\underline{x},f\}\in\{\mathbb{R}_{x}\Rightarrow\mathbb{R}_{f}\}$ $\underline{x}\in\mathbb{R}_{x}$ $f\in\mathbb{R}_{f}$ $f=f(\underline{x})$, invece per l'insieme $E_{f(x)}$ (costituito da ogni $f(\underline{x})$ ottenibile specificandone il $\underline{x}$ con un diverso elemento di $\mathbb{R}_{x}$) si ha la $\mathbb{R}_{x}\Leftrightarrow E_{f(x)}$ il cui generico elemento è una coppia costituita da un $\underline{x}$ (di cui la $\underline{x}\in\mathbb{R}_{x}$) e l'inerente espressione $f(\underline{x})$.

Una $\underline{y}=\underline{f}(\underline{x})$ (di cui le $\underline{y}\equiv\{y_m;m=1,m\}$ $\underline{f}(\underline{x})\equiv\{f_m(\underline{x});m=1,m\}$) formula una $\mathbb{R}_{x}\Rightarrow\mathbb{R}\langle\underline{y}\rangle$ di cui le $\{\mathbb{R}_{x}\Rightarrow\mathbb{R}\langle\underline{y}\rangle\}=\{\underline{x},\underline{y}\,/\,\underline{y}=\underline{f}(\underline{x});\underline{x}\in\mathbb{R}_{x}\}$ e $Æ\langle\underline{y},\mathbb{R}_{y}\,/\,\underline{G},\mathbb{R}_{G}\,/\,\mathbb{R}_{G}\subseteq\mathbb{R}^{m}\rangle$, e ciò è indicato con la

$$\{\underline{y}=\underline{f}(\underline{x})\}\leftrightarrow\{\mathbb{R}\langle\underline{x}\rangle\Rightarrow\mathbb{R}\langle\underline{y}\rangle\} \tag{4}$$

Per ogni $f(\underline{x})$ di cui la $\underline{x}\subseteq\underline{x}$, può essere stabilita una $f(\underline{x})=f(\underline{x})$ la cui $f(\underline{x})$ è arbitraria a meno del dovere verificare tale uguaglianza. Da ciò segue in particolare che, nel caso di una $Ï\langle y\,|\,\underline{x}\rangle$, è possibile porre una $y=f(\underline{x})$ la cui $f(\underline{x})$ è tale che assume lo stesso valore y in corrispondenza di ogni n-pla di valori che possono essere assunti dalle $\underline{x}$. Conformemente con ciò si hanno le

$$Ï\langle y\,|\,\underline{x}\rangle\rightarrow\{y=f(\underline{x})\equiv y+F(\underline{x})\,|\,F(\underline{x})=0\}\quad\{y=\{f(\underline{x})\,|\,\underline{x}\subseteq\underline{x}\}\}\rightarrow\{y=f(\underline{x})\equiv f(\underline{x})+F(\underline{x})\,|\,F(\underline{x})=0\} \tag{5}$$

e si intende che un'espressione di una grandezza è una funzione analitica di certe variabili se vi è considerata tale ogni grandezza presente nella detta espressione.

Si pone la $\underline{x}\equiv\{x_n;n=1,n\}$. In relazione ai limiti di una $f(\underline{x})$ (e coerentemente con quanto in sez. 2.2 riguardo un $\lim_{B\to C}(A)$), si pone la $f(\pm\infty)\equiv\lim_{x\to\infty}(f(\pm x))$ e si hanno le

$$\begin{aligned}
&\{\lim_{\underline{x}\to\underline{\infty}}(f(\underline{x}))=f_l\}\leftrightarrow\{\exists\{\sigma_\varepsilon\,|\,\{Đ\langle\underline{x},\underline{0}_{n}\rangle>\sigma_\varepsilon\}\rightarrow\mathcal{L}\langle\underline{x},\varepsilon\rangle\};\forall\varepsilon\}\\
&\{\lim_{\underline{x}\to\underline{x}}(f(\underline{x}))=f_l\}\leftrightarrow\{\exists\{\sigma_\varepsilon\,|\,\{Đ\langle\underline{x},\underline{x}\rangle\le\sigma_\varepsilon\}\rightarrow\mathcal{L}\langle\underline{x},\varepsilon\rangle\};\forall\varepsilon\}\\
&\{\lim_{x\to\infty}(f(x))=f_l\}\leftrightarrow\{\exists\{\sigma_\varepsilon\,|\,\{x>\sigma_\varepsilon\}\rightarrow\mathcal{L}\langle x,\varepsilon\rangle\};\forall\varepsilon\}\\
&\{\lim_{x\to-\infty}(f(x))=f_l\}\leftrightarrow\{\exists\{\sigma_\varepsilon\,|\,\{x<\sigma_\varepsilon\}\rightarrow\mathcal{L}\langle x,\varepsilon\rangle\};\forall\varepsilon\}
\end{aligned} \tag{6}$$

di cui le $\{f_l,\mathcal{L}\langle ş,\varepsilon\rangle\}\equiv\{\{L,|f(ş)-L|<\varepsilon\}\,\mathbb{V}\,\{\infty,f(ş)>\varepsilon\}\,\mathbb{V}\,\{-\infty,f(ş)<-\varepsilon\}\}$ $\varepsilon>0$ $|L|\neq\infty$, e l'essere $\underline{x}$ un punto non isolato di $\mathbb{R}_{x}$.

Inoltre si hanno, intendendo le $\{\pi_n;n=1,n\}=\{n=1,n\}$ e $\underline{\Delta}\equiv\{\Delta_n;n=1,n\}$, le

$$Ï\langle\underline{x}\rangle\rightarrow\{\lim_{\underline{x}\to\underline{x}}(f(\underline{x},\underline{t}))=\lim_{x\langle\pi\langle1\rangle\rangle\to x\langle\pi\langle1\rangle\rangle}(\lim_{x\langle\pi\langle2\rangle\rangle\to x\langle\pi\langle2\rangle\rangle}(\ldots\lim_{x\langle\pi\langle n\rangle\rangle\to x\langle\pi\langle n\rangle\rangle}(f(\underline{x},\underline{t}))\ldots))\} \tag{7}$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}}(f(\underline{x},\underline{t}))=\lim_{\underline{\Delta}\to\underline{0}\langle n\rangle}(f(\underline{x}+\underline{\Delta},\underline{t}))$$

dove $\{\underline{t}=\varnothing\}\,\mathbb{V}\,\{\underline{t}\neq\varnothing\}$, la cui seconda è ottenibile introducendo la $\underline{x}=\underline{x}+\underline{\Delta}$ nel suo primo membro, e dalle quali segue la

$$Ï\langle\underline{x}\rangle\rightarrow\{\lim_{\underline{\Delta}\to\underline{0}\langle n\rangle}(f(\underline{x}+\underline{\Delta},\underline{t}))=\lim_{\Delta\langle\pi\langle1\rangle\rangle\to0}(\lim_{\Delta\langle\pi\langle2\rangle\rangle\to0}(\ldots\lim_{\Delta\langle\pi\langle n\rangle\rangle\to0}(f(\underline{x}+\underline{\Delta},\underline{t}))\ldots))\} \tag{8}$$

Si pone la $L\equiv\lim_{x\to x}(|f(x)/g(x)|)$ di cui la $\{|x|\neq\infty\}\,\mathbb{V}\,\{x\equiv\pm\infty\}$. Una $f(x)$ è un infinitesimo o un infinito per $x\to x$, nei rispettivi casi $\lim_{x\to x}(f(x))=0$ e $\lim_{x\to x}(f(x))=\pm\infty$. Se le $f(x)$ e $g(x)$ sono ambedue un infinitesimo per $x\to x$; la $f(x)$ è, per $x\to x$ e rispetto a $g(x)$, un infinitesimo di ordine superiore o uguale o inferiore, rispettivamente nei tre casi $L=0$ o $0<L<\infty$ o $L=\infty$. Se le $f(x)$ e $g(x)$ sono ambedue un infinito per $x\to x$; la $f(x)$ è, per $x\to x$ e rispetto a $g(x)$, un infinito di ordine inferiore o uguale o superiore, rispettivamente nei tre casi $L=0$ o $0<L<\infty$ o $L=\infty$.

Le $f(\underline{x})\in C^0(\underline{x})$ e $f(\underline{x})\in C^0(\mathfrak{R}_{x})$ (di cui la $\mathfrak{R}_{x}\subseteq\mathbb{R}_{x}$) affermano rispettivamente che $f(\underline{x})$ è continua in $\underline{x}$ e $\mathfrak{R}_{x}$, avendo a questo riguardo la $\{f(\underline{x})\in C^0(\underline{x})\}\leftrightarrow\{\lim_{\underline{x}\to\underline{x}}(f(\underline{x}))=f(\underline{x})\neq\pm\infty\}$, e la $\{f(\underline{x})\in C^0(\mathfrak{R}_{x})\}\leftrightarrow\{f(\underline{x})\in C^0(\underline{x});\forall\underline{x}\}$ dove $\underline{x}$ è un punto di accumulazione di $\mathfrak{R}_{x}$. Inoltre in particolare si ha la

$$\{f(x)\in C^0(x)\}\leftrightarrow\{\lim_{x\to x}(f(x))=\lim_{\Delta\to0}(f(x+\Delta))=f(x)\neq\pm\infty\} \tag{9}$$

di cui la $\{\lim_{x\to x}(f(x))=L\}\leftrightarrow\{\lim_{x\to x^-}(f(x))=\lim_{x\to x^+}(f(x))=L\}$ dove le $x\to x^-$ e $x\to x^+$ designano rispettivamente il limite a sinistra (cioè per $x<x$) e a destra (cioè per $x>x$).

Un punto $\underline{x}$ è singolare per una $f(\underline{x})$ nei seguenti due casi: $\underline{x}\in\{\mathbb{R}_{x}\cap\partial\mathbb{R}_{x}\}$ e la $f(\underline{x})$ non è continua in $\underline{x}$; $\underline{x}\in\{\partial\mathbb{R}_{x}-\mathbb{R}_{x}\}$. In entrambi questi casi lo scopo di eliminare la singolarità della $f(\underline{x})$ può essere perseguito utilizzando la