A13

504

Luca Panaccione

Problemi di microeconomia

Un'applicazione del metodo delle disuguaglianze
alle scelte di consumo e alle scelte di produzione

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-5288-4

I edizione: novembre 2012

A Vera,
per la felicità
che ogni giorno mi dona,
e al mio δαίμων

Indice

Prefazione

Questo lavoro nasce dal desiderio, a lungo coltivato, di trovare un metodo elementare e diretto per risolvere i più comuni problemi di ottimizzazione vincolata utilizzati nella teoria del consumo e della produzione. Nel corso della mia ricerca, mi sono imbattuto in un brano di Courant e Robbins (1971, pagine 532-536) in cui viene considerato il seguente problema: «Tra tutti i rettangoli di perimetro assegnato, trovare quello di area massima». L'analogia fra questo problema e quello di massimizzazione vincolata dell'utilità appare evidente anche grazie alla rappresentazione grafica proposta dagli autori (figura 221, pagina 534), che è riprodotta nella figura 1.

Tuttavia, Courant e Robbins non risolvono il problema descritto in precedenza con tecniche basate sul calcolo differenziale; essi applicano invece un metodo elementare e diretto basato sull'utilizzo della disuguaglianza fra la media aritmetica e la media geometrica. A partire da quell'esempio, mi sono reso conto che il metodo di risoluzione di problemi di ottimizzazione basato sull'utilizzo di disuguaglianze, ampiamente consolidato nella letteratura matematica, può essere utilizzato per risolvere i problemi di massimizzazione e minimizzazione vincolata che si incontrano nello studio della microeco-

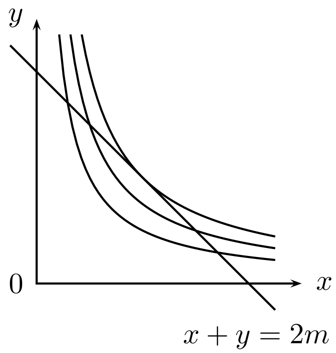

Figura 1: Valore massimo di xy per $x + y$ assegnato

nomia. Nella speranza che questo approccio possa essere utile sia per fini di ricerca sia per fini didattici, ho deciso di raccogliere in questo lavoro i risultati finora ottenuti.

Desidero ringraziare Andrea Attar, Eloisa Campioni, Lorenzo Carbonari, Antonio Cosma, Michele Crescenzi, Marco Dall'Aglio, Carlo Di Giorgio, Leo Ferraris, Liliane Giardino-Karlinger, Paolo Giordani, Fabrizio Mattesini, Loredana Mirra, Salvatore Nisticò, Carmelo Parello, Pietro Reichlin, Yosef Rinott, Enzo Rossi, Marco Scarsini, Yiannis Vailakis e Luca Vitali per aver condiviso, in alcuni casi molto pazientemente, i progressi di questo progetto e per le loro utili osservazioni. L'idea di questo libro è nata in seguito a una conversazione con Massimo Giannini, al quale va, perciò, la mia sincera riconoscenza.

Un ringraziamento particolare spetta ad Alessandro Fedele per aver sperimentato il metodo descritto nel presente lavoro in alcune lezioni.

Sono sinceramente grato a Gaetano Bloise, Daniela Di Cagno e, soprattutto, a Galeazzo Impicciatore, anche per le modifiche che hanno suggerito, permettendomi di migliorare la versione finale del testo. Naturalmente, rimango l'unico responsabile per errori, imperfezioni e omissioni ancora presenti.

Un ringraziamento affettuoso a Maria Luisa, Mara, Angelo, Ruggero e Serena.

Desidero infine ringraziare Andreina, Paolo e Alessandra per il loro costante e amorevole sostegno.

Prologo

1. Strategia

L'analisi dei problemi di scelta nella teoria del consumo e nella teoria della produzione si basa tradizionalmente sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange e sulla generalizzazione fornita dall'approccio di Kuhn-Tucker. Questi metodi consentono di *caratterizzare* e di *calcolare* la soluzione di problemi di ottimizzazione vincolata tramite l'utilizzo di opportune condizioni, a patto che siano soddisfatte una serie di ipotesi riguardanti sia la funzione obiettivo sia i vincoli.[1] L'insieme di queste condizioni, quindi, non solo forniscono una caratterizzazione locale della soluzione, ma consentono anche di individuare il massimo globale vincolato nella maggior parte dei problemi utilizzati come esempi o applicazioni in microeconomia.

Come in altre discipline in cui è frequente l'analisi di problemi di ottimizzazione, anche in microeconomia la ricerca di massimi e minimi è tradizionalmente associata ai metodi appena ricordati, al punto che questi possono sembrare gli *unici* strumenti ai quali si deve ricorrere per risolvere problemi di scelta vincolata.

[1] Per un'esposizione di questi teoremi e delle tecniche di ottimizzazione utilizzate in microeconomia, si vedano, per esempio, Montrucchio (1998) oppure Sundaram (1996).

In realtà, sono disponibili a tali fini varie metodologie; in particolare è possibile individuare un approccio abbastanza elementare che consente di risolvere con immediatezza i più frequenti problemi di ottimizzazione analizzati nella teoria del consumo e nella teoria della produzione. Esso si basa sull'utilizzo di disuguaglianze, quali, per esempio, la disuguaglianza relativa alla media aritmetica e alla media geometrica, che permettono di individuare la soluzione di un problema di ottimizzazione senza ricorrere alle condizioni contenute nei teoremi di Lagrange o Kuhn-Tucker. Si tratta, in effetti, di un metodo di risoluzione di problemi di ottimizzazione in cui il calcolo differenziale gioca un ruolo limitato o nullo, e in ogni caso indiretto, nel senso che può essere utilizzato per dimostrare in modo semplice alcune disuguaglianze, le quali, a loro volta, consentono di individuare direttamente la soluzione del problema di ottimizzazione.

Questo approccio, che si fonda principalmente sulla teoria delle disuguaglianze, è consolidato nella letteratura matematica.[2] Tuttavia, esso non è stato utilizzato in modo sistematico per studiare la soluzione di problemi tipici della teoria microeconomica, quali la massimizzazione dell'utilità e del profitto e la minimizzazione della spesa e del costo di produzione. Scopo del presente lavoro è di illustrare le potenzialità di questo metodo, svolgendo un'analisi dettagliata di numerosi problemi relativi alle scelte di consumo e alle scelte di produzione.

Per fornire una breve illustrazione delle potenzialità di tale procedura, si consideri il seguente problema: $\max_{x_1,x_2}\ x_1^{0.5}x_2^{0.5}$, posto che $w \geqslant 0.5x_1 +$

[2] Si veda, per esempio, Niven (1981).

$0.5x_2$ e $x_1, x_2 \geqslant 0$; questo problema può essere interpretato come un problema di massimizzazione della funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$, a condizione che il valore del paniere prescelto, calcolato in base ai prezzi $p_1 = 0.5$ e $p_2 = 0.5$, non sia superiore al reddito disponibile w.

L'approccio tradizionale per risolvere questo problema di basa sull'uso di una coppia di condizioni − uguaglianza fra saggio marginale di sostituzione e prezzi relativi e uguaglianza fra il valore del paniere e il reddito disponibile − che consentono di calcolare il paniere ottimale. Supponiamo tuttavia che sia possibile mostrare che, per ogni coppia di numeri x_1, x_2 positivi, vale la seguente disuguaglianza

$$x_1^{0.5} x_2^{0.5} \leqslant 0.5x_1 + 0.5x_2\,, \tag{AG}$$

con uguaglianza solo quando $x_1 = x_2$. In questo caso, potremmo risolvere il problema di massimizzazione come segue: selezioniamo un valore $\hat{w} \leqslant w$ e consideriamo tutti di valori positivi di x_1 e x_2 tali che $0.5x_1 + 0.5x_2 = \hat{w}$. In questo caso, (AG) garantisce che $x_1^{0.5} x_2^{0.5} \leqslant \hat{w}$, con uguaglianza quando $x_1 = x_2 = \hat{w}$. Poiché $\hat{w}$ può essere al massimo pari a w, questo è il massimo valore che può raggiungere la funzione obiettivo quando si deve tenere conto del vincolo di bilancio; tale valore è raggiunto scegliendo $x_1 = x_2 = w$. Quindi, se la disuguaglianza (AG) fosse vera, si potrebbe individuare la soluzione di questo problema di massimizzazione vincolata senza l'utilizzo delle tecniche ricordate in precedenza.

Naturalmente, la disuguaglianza (AG) è vera ed è ben nota: essa sancisce che, data una coppia di numeri positivi, la loro media aritmetica è sempre superiore alla loro media geometrica, tranne nel caso in cui i due numeri siano uguali. Nella forma appena introdotta può essere facilmente dimostrata come segue: sappiamo che la disuguaglianza $(x_1^{0.5} - x_2^{0.5})^2 \geqslant 0$ è vera per ogni coppia di numeri x_1, x_2 positivi, con uguaglianza quando $x_1 = x_2$. Quindi, anche la disuguaglianza $x_1 + x_2 - 2x_1^{0.5}x_2^{0.5} \geqslant 0$ è vera nelle stesse condizioni; questa può essere riscritta come $0.5x_1 + 0.5x_2 \geqslant x_1^{0.5}x_2^{0.5}$, che è appunto la disuguaglianza (AG).

Il problema appena considerato consente un'immediata applicazione di tale disuguaglianza poichè il prezzo del bene $i = 1, 2$ è pari al coefficiente dello stesso bene nella funzione di utilità ed entrambi sono pari a 0.5. In verità, se il problema fosse $\max_{x_1,x_2}\ x_1^{a_1}x_2^{a_2}$, a condizione che $w \geqslant p_1x_1 + p_2x_2$ e $x_1, x_2 \geqslant 0$, la disuguaglianza non potrebbe essere applicata direttamente. Tuttavia, quando valgono le condizioni $a_1, a_2 > 0$ e $a_1 + a_2 = 1$, risulta immediatamente la seguente generalizzazione della disuguaglianza (AG):

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2} \leqslant a_1x_1 + a_2x_2\,, \tag{AG'}$$

con uguaglianza quando $x_1 = x_2$.[3] A meno che non sia $a_i = p_i$ per $i = 1, 2$, (AG') non può essere applicata per risolvere il problema nello stesso modo descritto precedentemente; tuttavia il problema di massimizzazione può essere trasformato in un problema equivalente, il quale può essere risolto utilizzando la (AG') come illustrato poc'anzi. A tal fine, è necessario in-

[3]Si veda, per esempio, il teorema 2 presentato nel capitolo 2.

trodurre delle variabili ausiliari per trasformare il problema originario in un problema ausiliare equivalente.[4]

Poniamo, quindi, $x_i = \gamma_i y_i$ per $i = 1, 2$, con y_i che svolge il ruolo di variabile ausiliare; invece γ_i è una costante e il suo valore è scelto in modo tale da rendere il problema ausiliare equivalente a quello iniziale. In particolare, quando $\gamma_i = a_i/p_i$, il problema originario di massimizzazione è equivalente a $\max_{y_1,y_2}\ y_1^{a_1} y_2^{a_2}$, a condizione che $w \geqslant a_1y_1 + a_2y_2$ e $y_1, y_2 \geqslant 0$.[5] Questo problema può essere risolto utilizzando direttamente la (AG') e la sua soluzione è, perciò, $y_1 = y_2 = w$. Per trovare la soluzione del problema iniziale, è sufficiente ricordare che $x_i = \gamma_i y_i$, con $\gamma_i = a_i/p_i$. Possiamo, quindi, concludere che la soluzione del problema originario è $x_1 = a_1w/p_1$ e $x_2 = a_2w/p_2$.

Un ulteriore esempio tratto dalla teoria della produzione può essere utile per mostrare le potenzialità dell'applicazione della teoria delle disuguaglianze ai problemi di ottimizzazione analizzati in microeconomia. Si consideri, in particolare, il seguente problema: $\max_x\ \psi x^r - px$, a condizione che $x \geqslant 0$. Assumiamo per semplicità $0 < r < 1$. Questo problema può essere interpretato come un problema di massimizzazione del profitto, pari alla differenza fra ricavi delle vendite ψx^r e costi di produzione px. In questa formulazione, $\psi > 0$ e $p > 0$ sono, rispettivamente, il prezzo di vendita del bene prodotto e il prezzo del fattore produttivo. La quantità x^r indica infine il prodotto che si ottiene utilizzando l'ammontare x di fattore produttivo.

[4] L'utilizzo di questa metodologia è stato ispirato da Lohwater (1982).

[5] Per lo svolgimento completo, si veda la soluzione del problema 3.6.

Come nel problema precedente, introduciamo una variabile ausiliare; poniamo a tal fine $x = \gamma y$ e osserviamo che $\psi x^r - px = \psi\gamma^r(y^r - \beta y)$, con $\beta = \psi^{-1}\gamma^{1-r}p$. Scegliamo, infine, γ in modo tale che $\beta = r$, cosicché $\gamma = (r\psi/p)^{1/(1-r)}$. In questo caso, il problema ausiliare è $\max_y \ \psi\gamma^r(y^r - ry)$, posto che $y \geqslant 0$. Ora, è possibile mostrare che, quando $0 < r < 1$, per ogni $y > 0$ vale $y^r - ry \leqslant 1 - r$, con uguaglianza quando $y = 1$.[6] Questa disuguaglianza implica che la soluzione del problema ausiliare è $y = 1$ e, quindi, la soluzione del problema originario è $x = \gamma$, ovvero $x = (r\psi/p)^{1/(1-r)}$.

L'approccio basato sulle disuguaglianze può essere utilizzato anche per risolvere problemi di minimizzazione vincolata. Si consideri, per esempio, il classico problema di minimizzazione della spesa: $\min_{x_1,x_2} \ p_1x_1 + p_2x_2$, a condizione che $x_1^{a_1}x_2^{a_2} \geqslant \bar{u}$ e $x_1, x_2 \geqslant 0$. Ponendo $x_i = \gamma_i y_i$, con $\gamma_i = a_i/p_i$, e $\beta = \gamma_1^{a_1}\gamma_2^{a_2}$, è possibile mostrare che il problema di minimizzazione originario è equivalente a $\min_{y_1,y_2} \ a_1y_1 + a_2y_2$, posto che $y_1^{a_1}y_2^{a_2} \geqslant \bar{u}/\beta$.[7] In base alla disuguaglianza (AG'), possiamo immediatamente verificare che la soluzione del problema ausiliare è $y_1 = y_2 = \bar{u}/\beta$. Di conseguenza, la soluzione del problema originario di minimizzazione è $x_1 = \bar{u}\,(a_1/p_1)^{1-a_1}\,(a_2/p_2)^{-a_2}$ e $x_2 = \bar{u}\,(a_2/p_2)^{1-a_2}\,(a_1/p_1)^{-a_1}$.

Nelle pagine che seguono utilizzeremo l'approccio appena descritto per risolvere problemi di scelta vincolata tratti dalla teoria del consumo e dalla teoria della produzione. In ognuno dei casi considerati, si procederà all'introduzione di variabili ausiliari che consentiranno di trasformare il proble-

[6] Si veda, per esempio, il teorema 10 presentato nel capitolo 2.

[7] Per lo svolgimento completo, si veda la soluzione del problema 4.6.

ma originario in un problema equivalente. Questo sarà risolto utilizzando un'appropriata disuguaglianza che consentirà di individuarne la soluzione in modo diretto; ove necessario, si terrà naturalmente conto del fatto che la condizione che impone di considerare valori positivi, o al più nulli, delle variabili di scelta possa essere vincolante. Infine, si utilizzerà la relazione fra variabili ausiliari e variabili originarie ottenere la soluzione del problema iniziale.