

AII



Francesca Boccuni  
**Logicismo plurale**



Copyright © MMXII  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133/ A-B  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-5121-4

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: novembre 2012

# Indice

- 7 *Nota dell'autore*
- 9 **Capitolo I**  
*Il programma logicista di Frege, l'antinomia di Russell e le sue cause*
- 1.1. Il logicismo, 10 – 1.1.1. *Contesto storico e programma logicista*, 10 – 1.1.2. *La problematicità del linguaggio naturale e il rifiuto dello psicologismo*, 13 – 1.1.3. *Funzioni, argomenti e quantificatori*, 16 – 1.1.4. *Senso e denotazione*, 21 – 1.1.5. *I fondamenti dell'aritmetica*, 23 – 1.1.6. *I Principi dell'aritmetica*, 27 – 1.2. *Le cause dell'insorgenza dell'antinomia*, 39 – 1.2.1. *Frege*, 40 – 1.2.2. *Dummett*, 42 – 1.2.3. *Boolos e Cocchiarella*, 47.
- 53 **Capitolo II**  
*Soluzioni*
- 2.1. *Frege*, 53 – 2.2. *Teorie dello zig zag*, 59 – 2.3. *Teorie della limitazione della grandezza*, 62 – 2.4. *Teoria senza classi*, 67 – 2.5. *Teorie dei tipi*, 68 – 2.6. *Teorie predicative*, 71 – 2.7. *Il logicismo plurale*, 79.
- 83 **Capitolo III**  
*Il riferimento plurale*
- 3.1. *Riferimento plurale e quantificazione plurale*, 83 – 3.2. *Il riferimento plurale: critiche*, 90 – 3.3. *La quantificazione plurale: critiche*, 94.
- 103 **Capitolo IV**  
*TIR e ACS*
- 4.1. *TIR*, 103 – 4.2. *ACS*, 113.
- 123 **Capitolo V**  
*La teoria PG*
- 5.1. *Sintassi*, 123 – 5.2. *Assiomi*, 124 – 5.3. *L'aritmetica al secondo ordine*

di Peano, 125 – 5.4. Semantica, 131 – 5.5. Consistenza semantica, 133 – 5.5.1. *Domini per le variabili individuali*, 134 – 5.5.2. *Termini per estensioni che non contengono variabili predicative libere*, 135 – 5.5.3. *Dominio per variabili predicative*, 136 – 5.5.4. *Ogni istanza dell'assioma V è vera in questo modello*, 137 – 5.5.5. *Ogni istanza di PRC è vera in questo modello*, 138 – 5.5.6. *Ogni istanza di PLC è vera in questo modello*, 139.

141    **Capitolo VI**  
*Analisi filosofica*

6.1. *La logica plurale è veramente logica?*, 141 – 6.2. VCP\*, 143 – 6.2.1. *Le restrizioni sui principi di comprensione*, 156 – 6.3. *Esistenza e natura degli individui*, 158 – 6.4. *Il ruolo dei predicati*, 169.

173    *Conclusioni*

179    *Bibliografia*

## Nota dell'autore

Non vi è progresso, non vi è rivoluzione di evi, nella vicenda del sapere, ma al massimo continua e sublime ricapitolazione.

(Umberto Eco)

Il presente lavoro si ripromette di offrire una rivisitazione del programma logicista originario di Frege, che tuttavia non si limiti a essere una mera riproposizione finalizzata all'esclusivo e arido evitamento dell'inconsistenza che tocca l'apparato fregeano.

Nei primi capitoli, offrirò un *excursus* storico e concettuale della produzione fregeana, che si concentrerà eminentemente sul rinvenimento del paradosso nei *Principi dell'aritmetica* e sui conseguenti tentativi teorici di porvi rimedio. Il rinvenimento del paradosso nei *Principi dell'aritmetica* si iscrive nel più esteso panorama della cosiddetta *crisi dei fondamenti* della matematica, iniziata con l'inconsistenza della teoria ingenua degli insiemi di Georg Cantor e culminata con la derivazione dei teoremi di incompletezza di Kurt Goedel. La carrellata di ipotesi di risoluzione dei paradossi offerta nei primi capitoli, quindi, non consta esclusivamente dei tentativi di riviviscenza del programma logicista di Frege. Tali ipotesi, anzi, riguardano più genericamente il tema dei paradossi nei sistemi formali e in teoria degli insiemi<sup>1</sup>. Tuttavia, rinvenendo fra le cause più remote e decisive dei paradossi una forma di eccessiva fiducia nelle capacità di deduzione ed espressione consistenti delle teorie proposte nell'età dell'oro dell'analisi sui fondamenti, possiamo inserire il rinvenimento dell'inconsistenza nei *Principi* in un quadro che maggiormente si addice a una comprensione corretta del fenomeno che essa rappresenta.

1. Ad esempio, la teoria degli insiemi di Zermelo non è specificamente una proposta di risoluzione del paradosso dei *Principi*, ma, nel quadro che intendo offrire, rappresenta l'evoluzione di una proposta russelliana che, in linea del tutto generale, può essere presentata fra le teorie risultanti dalla crisi dei fondamenti.

I capitoli V e VI sono dedicati esplicitamente a un'ampia presentazione e, spero, solida giustificazione dei fondamenti filosofici della proposta di revisione del programma fregeano qui presentata. Tale presentazione metterà in evidenza, da un lato, quale sia l'eredità logicista che la mia proposta accetta di incorporare e, dall'altro, quali siano invece i punti di radicale riforma dello stesso approccio fregeano. In base a tali rinvenimenti, confido sia chiaro che questa proposta, pur inscrivendosi nel solco della tradizione logicista, matura una propria autonomia concettuale rispetto all'originale fregeano.

Attraverso l'uso di alcuni strumenti tecnici, intendo offrire una revisione consistente del sistema fregeano dei *Principi* tale che esso conservi quella potenza deduttiva che Frege auspicava per il proprio progetto. Tali strumenti e l'intero impianto che qui propongo verranno inoltre analizzati e giustificati filosoficamente nel capitolo VI.

La lettura richiede una conoscenza di base della logica del primo e del secondo ordine, di una minima parte di teoria degli insiemi e di una certa familiarità con la logica e la filosofia della matematica fregeane.



## Il programma logicista di Frege, l'antinomia di Russell e le sue cause

Gottlob Frege (Wismar 1848 – Bad Kleinen 1925) è considerato uno dei padri fondatori della filosofia della matematica e, in generale, uno dei precursori della filosofia analitica. Egli fu certamente fra i primi ad avvertire la necessità di rispondere al problema dei fondamenti della matematica: tale atteggiamento gli costò l'indifferenza presso i contemporanei e gli garantì grande considerazione presso la comunità filosofico-analitica attuale. Frege ha esercitato una profonda influenza su alcuni pensatori che hanno poi contribuito allo sviluppo della logica e della filosofia analitica: si pensi a Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein, Alonzo Church e Rudolf Carnap, solo per citarne alcuni. Tuttavia, nonostante l'interesse di diversi studiosi durante la prima metà del Novecento<sup>1</sup>, è soprattutto a partire dall'imprescindibile Dummett [1973] che si dà avvio a una imponente produzione di studi fregeani. Essi spaziano dai fondamenti della matematica alla logica alla filosofia del linguaggio e, in certa misura, alla epistemologia, spesso ponendosi nell'intersezione fra queste diverse discipline che Frege stesso ha inconsapevolmente contribuito a inaugurare. Il richiamo esercitato da Frege sta indubbiamente nel suo lavoro pionieristico. Tuttavia, all'aspetto innovativo del suo lavoro si affiancano la complessità e l'organicità del suo pensiero, paragonabili solo a quelle dei sistemi filosofici dei pensatori classici. Tali aspetti rendono il nucleo del progetto fregeano ben definito e i suoi contorni sufficientemente sfumati per essere già fecondi di ulteriori sviluppi.

1. Cfr. Mariani [2004], pp. 123 e segg.

## 1.1. Il logicismo

L'idea essenziale di Frege è che l'aritmetica deve essere fondata sulla logica, perché il suo rigore scientifico possa essere irrefutabilmente assicurato. Secondo Frege, la logica, in quanto scienza delle leggi generali del pensiero, costituisce il fondamento ultimo su cui l'intero edificio scientifico deve posarsi<sup>2</sup>. Il nucleo fondamentale di questo progetto sta nella riduzione dell'aritmetica dei numeri naturali alla logica. Tale riduzione consta di due passaggi essenziali: innanzitutto, è necessaria una definizione esplicita e rigorosa delle nozioni aritmetiche fondamentali; in seguito, è necessario dimostrare la derivabilità delle verità dell'aritmetica da leggi meramente logiche, attraverso regole di inferenza e in base alle definizioni approntate. Questo tentativo fondazionale – perché, ahimè, rimarrà solo un tentativo – passa sotto il nome di *logicismo*.

### 1.1.1. Contesto storico e programma logicista

Il contesto intellettuale in cui Frege inizia la sua ricerca è estremamente stimolante<sup>3</sup>. All'inizio del XIX secolo, la geometria euclidea, che fino ad allora aveva rappresentato il paradigma di assoluta certezza matematica, perde il proprio status teorico privilegiato a causa dell'invenzione — o, se si preferisce, della scoperta — delle geometrie non euclidee<sup>4</sup>. Durante i primissimi anni di docenza di Frege, a Halle Georg Cantor sviluppa il nucleo fondamentale della teoria degli insiemi. In questo stesso periodo, si inaugura la teoria dei numeri complessi. Tuttavia, a questo straordinario sviluppo, secondo Frege,

2. Da questo punto di vista, è bene precisare che, secondo Frege, i pensieri non sono rappresentazioni mentali più o meno articolate. Essi sono entità astratte espresse da enunciati, indipendenti dalla nostra attività psichica e dunque oggettive, dotate di una struttura logica più o meno complessa e di valore di verità. Secondo Frege, dunque, la logica studia le connessioni logiche fra queste entità.

3. Per una trattazione del quadro storico-teorico in cui si inserisce la ricerca fregeana, cfr. Borga e Palladino [1997], §§ 1-3.

4. Lo stesso Frege, ad esempio, non concederà alla geometria lo statuto di scienza analitica *a priori*, ma, con Kant, la riterrà sintetica *a priori*: cfr. *Fondamenti*, § 13, pp. 240-241 e § 89, p. 330; Mariani [2004], p. 47. Tutte le citazioni dai testi di Frege sono da intendersi relativamente all'edizione italiana citata in bibliografia. Ove ve ne fosse più di una, il riferimento è da intendersi a quella più recente.

non si accompagna l'altrettanto necessaria preoccupazione, di respiro filosofico, di chiarire in modo inequivocabile la natura di quelle entità attorno a cui ruota l'indagine matematica<sup>5</sup>. A questa preoccupazione si connette strettamente quella riguardante la ricezione del tema della natura delle verità matematiche in ambito prettamente filosofico. Nel primo caso, Frege lamenta la mancanza di una definizione esplicita delle nozioni matematiche non solo fondamentali ma, soprattutto, apparentemente più semplici quali quelle di funzione, limite o numero naturale, tale da ovviare alle ambiguità che egli stesso riscontra nel discorso matematico. Se l'indagine matematica stessa manca di fornire una definizione della natura delle nozioni cardine su cui essa si fonda, ecco che l'edificio matematico posa su basi incerte. Primo compito dunque è quello di fondare la matematica su basi sicure, a cominciare dall'aritmetica, in quanto scienza matematica fra le più basilari e semplici, fornendo definizioni esplicite delle nozioni aritmetiche fondamentali. Scrive Kenny [2003]:

Frege si convinse presto che il lussureggiante sviluppo nella matematica del tempo soffriva a monte di una debolezza di impostazione. Tutta quella imponente costruzione poggiava a suo giudizio su fondamenta malferme. I matematici non comprendevano realmente quello che stavano facendo, nemmeno al livello delle nozioni più basilari. Non soltanto ciò mancava una chiara comprensione circa la vera natura dei numeri immaginari come  $\sqrt{-1}$ , o di numeri irrazionali come  $\sqrt{2}$  o  $\pi$  o di numeri frazionari come  $2/3$ , o di numeri interi negativi come  $-1$ ; il difetto di comprensione cominciava già con i numeri naturali, come 1, 2 e 3. I matematici, secondo Frege, non erano in grado di spiegare la natura degli oggetti primari della loro scienza, e dunque le basi stesse della disciplina che insegnavano. Porre rimedio a tale mancanza, esplicitando in modo chiaro e rigoroso i fondamenti logici e filosofici della matematica, fu lo scopo cui consacrò l'esistenza. A questo obiettivo dedicò, tra i trenta e i sessant'anni, una serie di pubblicazioni<sup>6</sup>.

5. Per una trattazione del quadro storico-teorico in cui si inserisce la ricerca fregeana, cfr. Borga e Palladino [1997], §§ 1-3 e Giaquinto [2002], §§ 1-2, Penco [2011].

6. Kenny [2003], p. 5. Cfr. Frege [1919], pp. 25-26: "Frege credeva, e aveva senza dubbio ragione, che i matematici dei suoi giorni fossero in uno stato di totale confusione sulla natura dei numeri e sulla base della conoscenza che di essi abbiamo, e di conseguenza sull'oggetto stesso delle teorie matematiche più importanti. Il suo impegno nell'affrontare questo obiettivo lo condusse ad elaborare, per la prima volta nella storia della logica, un sistema logico adeguato a formalizzare il tipo di ragionamento che ha luogo nelle dimostrazioni matematiche: il sistema, che essenzialmente è la teoria logica diventata standard ai nostri giorni, venne pubblicato nella piccola *Begriffsschrift* del 1879". Per il saggio

In secondo luogo, Frege si dedica ad un confronto con la precedente analisi sulla natura degli enunciati matematici, che aveva trovato terreno fertile in ambito filosofico. Le tradizioni con cui Frege si misura risalgono a Leibniz, Kant e Mill<sup>7</sup>. In particolare, è noto che, secondo Kant, i giudizi aritmetici e geometrici sono verità sintetiche *a priori*: da un lato, hanno valenza informativa, caratteristica riassunta dalla loro sinteticità; dall'altro, in quanto giudizi *a priori*, essi sono totalmente indipendenti dall'esperienza. Secondo Mill, invece, i giudizi aritmetici sono giudizi *a posteriori*, la cui natura è quella di generalizzazioni fondate sull'osservazione di dati empirici<sup>8</sup>. Frege è in disaccordo con entrambe queste tradizioni: ritiene sì, con Kant e *contra* Mill, che i giudizi aritmetici siano *a priori*, ma, *contra* Kant, ritiene che i giudizi aritmetici siano analitici. È interessante notare la differenza netta fra la nozione di analiticità in Kant e quella in Frege, dovuta alla diversa analisi logica degli enunciati. La distinzione tradizionale, infatti, fra soggetto e predicato, ancora utilizzata da Kant nella analisi grammaticale degli enunciati, viene sostituita da Frege con la distinzione fra *funzione* e *argomento*<sup>9</sup>. In Kant, un giudizio è analitico se esso è privo di valore informativo — se il soggetto è “contenuto” nel predicato. Ad esempio, l'enunciato “Ogni corpo ha massa” è privo di valore informativo dato che la nozione di “corpo” è implicita nella nozione di “massa”. Tuttavia, tale considerazione dipende dal fatto che sussiste una certa relazione *semantica* tra soggetto e predicato: per vedere se un giudizio sia analitico o meno, si va a vedere il significato dei termini che lo compongono, secondo la scomposizione grammaticale tradizionale in soggetto e predicato. In Frege, invece, un enunciato è analitico esclusivamente in forza della sua forma logica, la quale non fa alcun riferimento al significato dei termini che compongono l'enunciato. Scrive Mariani:

Frege, da parte sua, ha già mostrato nell'*Ideografia* che costruire i concetti per astrazione è solo uno dei modi, e dei meno fecondi, di fare ciò, e che

di Frege, mi rifaccio alla edizione italiana del 1988, citata in bibliografia.

7. Cfr. Mariani [2004], cap. II, è 1: “Il programma di Frege, tuttavia, appare più vicino al modello leibniziano — anche per Frege, infatti, i giudizi della aritmetica sono analitici e *a priori* —, ma se ne discosta per il diverso significato attribuito all'analiticità”.

8. Cfr. Kenny [2003], pp. 6-7.

9. Cfr. *intra*, Cap. I, § 1.3.

un metodo realmente produttivo è ricavarli dalla scomposizione degli enunciati. Ma questo comporta una revisione della nozione stessa di analiticità. Infatti un concetto ricavato tramite una simile scomposizione è difficilmente riducibile ad un prodotto logico (per dirla in termini di algebra della logica) di note caratteristiche: pertanto, se si vuole mantenere la nozione di analiticità come verità su basi puramente logiche, è inevitabile abbandonare la definizione di giudizio analitico in termini di predicato contenuto nel soggetto (che aveva il suo fondamento nella analisi soggetto-predicato dei giudizi). Per Frege, in fin dei conti, quelli analitici restano sempre i giudizi veri su basi puramente logiche, ma l'accertamento di ciò non passa più attraverso il semplice esame delle note caratteristiche dei concetti occorrenti nel giudizio, richiede piuttosto la dimostrazione che un dato giudizio è una conseguenza delle leggi fondamentali del pensiero<sup>10</sup>.

Le questioni della natura delle entità matematiche e delle verità ad esse relative sono inevitabilmente interrelate. La definizione della natura delle entità matematiche deve avvenire in termini fondazionali, all'interno di un linguaggio prettamente logico. A quello stesso linguaggio è riducibile, nel programma fregeano, il *corpus* delle verità matematiche. Così, se le principali nozioni matematiche sono definite in termini logici, la natura analitica — e necessaria — delle verità matematiche sarà garantita e l'intero edificio matematico poserà su fondamenta solide<sup>11</sup>. Dato, infine, che i numeri naturali sono le entità matematiche più semplici, il nucleo fondamentale di questo approccio sta nella derivazione dell'aritmetica dei numeri naturali — detta *aritmetica di Peano* — su basi strettamente logiche.

### 1.1.2. *La problematicità del linguaggio naturale e il rifiuto dello psicologismo*

Sin dagli inizi della sua riflessione sulla fondazione logicista della matematica, Frege si lamenta della limitatezza degli strumenti offerti dal linguaggio naturale. Nel tentativo di fornire una definizione rigorosa della nozione di numero, Frege scrive:

10. Mariani [2004], p. 46.

11. La fondazione della matematica su basi sicure è realizzata nel sistema logico la cui sistematizzazione iniziale si trova nei *Ideografia* e che viene pienamente espresso nei *Principi dell'aritmetica*. Cfr. Kenny [2003], §§ IV, V, VIII, IX, e Mariani [2004], capp. II, III § 6. Estremamente importanti sono anche i saggi Frege [1891], [1892a], [1892b], in cui Frege specifica o amplia alcune nozioni fondamentali al suo intero impianto filosofico, quali quelle di funzione ed argomento, decorso di valori, senso e denotazione. Per i saggi di Frege sopra citati, ci rifacciamo alla edizione italiana del 1995, citata in bibliografia.

[p]er evitare che [...] si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima lacuna entro la catena deduttiva. Cercando di soddisfare nel modo più rigoroso a questa esigenza, incontrai un ostacolo nella inadeguatezza della lingua: infatti, malgrado la crescente pesantezza d'espressione, la lingua tanto meno mi permetteva di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva, quanto più complesse divenivano le relazioni<sup>12</sup>.

L'accento al rifiuto fregeano di utilizzare elementi intuitivi in ambito logico è importante, perché contribuisce a inquadrare la riconcettualizzazione delle categorie logiche menzionata nel titolo di questa sezione. L'atteggiamento di Frege si contrappone all'orientamento psicologista in voga nel XIX secolo. Secondo lo psicologismo la logica, essendo scienza del ragionamento, va intesa come una branca della psicologia. Secondo Frege, invece, quest'ultima va distinta nettamente dalla logica, poiché, mentre la logica è la scienza della verità e della generalità, la psicologia è studio delle rappresentazioni mentali, che in quanto tali sono solipsistiche e non possono quindi garantire generalità alle verità della logica. Ad esempio, la mia rappresentazione mentale della luna è chiaramente diversa dalla rappresentazione che della luna ha il mio vicino di casa, per il fatto che le nostre rispettive rappresentazioni mentali sono private. Ora, una analisi in termini psicologici delle verità della logica porterebbe a dover rigettare come quanto meno contingenti verità che ci appaiono necessarie. Si consideri, a titolo di esempio, l'enunciato "Luna = Luna".<sup>13</sup> Questa è una istanza della legge di identità " $a=a$ " e, dunque, è necessariamente vera. Tuttavia, sulla scorta dell'analisi psicologista, possiamo affermare che "Luna = Luna" è vero solo se le due occorrenze del termine "Luna" si riferiscono alla medesima rappresentazione mentale. È quindi ovvio che, considerando la mia rappresentazione mentale della Luna e quella del mio vicino di casa, l'enunciato "Luna=Luna" risulti falso, in quanto, poiché ogni rappresentazione pertiene al suo portatore, la mia rappresentazione della Luna è necessariamente diversa dalla rappresentazione che della Luna ha il mio vicino di casa.<sup>14</sup>

12. Frege [1879], p. 104.

13. Sottinteso con "Luna" il satellite del pianeta Terra.

14. Cfr. Frege [1988], p. 59: "Ritorno alla questione: il pensiero è una rappresentazione? Se il pensiero che articolo nel teorema di Pitagora può essere riconosciuto vero tanto

È chiaro, dunque, che, se intende fondare la matematica su basi solide, Frege deve evitare le oscurità del linguaggio naturale e i tranelli dello psicologismo. Dall'inadeguatezza del linguaggio naturale nella corretta analisi delle relazioni logiche che intervengono nelle dimostrazioni matematiche e dalla possibilità che il nostro ragionamento sia inficiato dall'introduzione surrettizia di elementi psicologici, nasce così l'esigenza di costruire un linguaggio formale, privo di ambiguità, e generalissimo,<sup>15</sup> atto cioè a incamerare e tradurre, rendendolo rigoroso, qualsiasi frammento linguistico. Questo è lo scopo della *Ideografia*, un libello di un'ottantina di pagine che, benché accolto nell'indifferenza pressoché generale della comunità scientifica dell'epoca o addirittura nello sfavore di alcuni suoi rappresentanti,<sup>16</sup> sancisce l'atto di nascita della logica contemporanea. In essa, Frege presenta il primo sistema formale della logica dei predicati della storia della logica.<sup>17</sup> La logica proposizionale e la logica dei predicati ottengono nell'*Ideografia* la prima sistematizzazione rigorosa; in essa viene introdotta la teoria della quantificazione così come la conosciamo oggi, benché in una notazione diversa; in essa la tradizionale dicotomia aristotelica soggetto-predicato, ancora standard fra i logici di fine Otto-

dagli altri che da me, non appartiene allora al contenuto della mia coscienza, e quindi non ne sono il portatore: posso tuttavia riconoscerlo come vero. Ma se non fosse proprio per niente lo stesso pensiero quello che viene considerato da me e dagli altri come contenuto nel teorema di Pitagora, non si dovrebbe in senso proprio dire «il teorema di Pitagora» ma «il mio teorema di Pitagora», «il suo teorema di Pitagora», e questi sarebbero differenti (...). Quindi il mio pensiero sarebbe un contenuto della mia coscienza, e il pensiero d'un altro un contenuto della sua. (...) [I]e parole «vero» e «falso», per come le intendo, potrebbero essere applicabili solo nell'ambito della mia coscienza se, invece di concernere qualcosa di cui non sono il portatore, fossero destinate a caratterizzare in qualche modo i contenuti della mia coscienza. E in conseguenza di ciò la verità sarebbe limitata al contenuto della mia coscienza e resterebbe il dubbio se qualcosa di simile si presenti mai nella coscienza degli altri”.

15. In questo senso, Frege riprende l'ideale leibniziano della “characteristica universalis”.

16. Questa fu solo una delle mortificazioni subite da Frege a opera dei suoi contemporanei. Segno dell'amarezza e dell'esasperazione che questo atteggiamento aveva lasciato in Frege è la causticità con cui egli tratta, specialmente nei *Fondamenti dell'aritmetica*, il lavoro altrui da lui giudicato insufficiente.

17. A dire il vero, la notazione ideografica è decisamente poco maneggevole e piuttosto ingombrante, rispetto alle notazioni standard cui siamo ormai abituati. Tuttavia, benché non sia mai stata usata se non da Frege, il linguaggio che essa esprime costituisce un punto di volta teorico estremamente importante, che sarà di grande influenza sugli sviluppi della logica contemporanea.

cento, viene capovolta e ripensata. È un dato di fatto che le innovazioni introdotte dall'*Ideografia* siano epocali.

### 1.1.3. Funzioni, argomenti e quantificatori

L'*Ideografia* fregeana rappresenta un punto di svolta fondamentale nella storia della logica. In essa, infatti, Frege scardina il paradigma logico aristotelico in voga fino alla fine del XIX secolo. Questa rivoluzione concettuale si palesa in alcune innovazioni, come accennavo in conclusione del paragrafo precedente. Esse risolvono alcuni dei difetti fondamentali dell'analisi logica aristotelica.<sup>18</sup> In questa sede, accennerò a tali difetti in relazione alle innovazioni fregeane fondamentali: la dicotomia funzione-argomento e l'introduzione dei quantificatori.

La logica aristotelica ruota attorno all'analisi dei *sillogismi*, cioè delle deduzioni di conclusioni da premesse. Un esempio classico di sillogismo è il seguente:

(**Premessa maggiore**) Tutti gli uomini sono mortali;

(**Premessa minore**) Socrate è un uomo;

(**Conclusione**) Socrate è mortale.

Secondo Aristotele, gli enunciati che compaiono nei sillogismi devono avere tutti la medesima struttura: devono contenere un *soggetto*, rappresentato da un termine particolare, ad esempio "Socrate", o universale, ad esempio "umano", e un *predicato*, che non può che essere un universale. Nella premessa minore, ad esempio, il soggetto è il termine individuale "Socrate", mentre il predicato è "è un uomo". Questa analisi, tuttavia, soffre di alcuni difetti. Innanzitutto, riducendo la forma logica alla forma grammaticale, l'analisi aristotelica induce un appiattimento di quelle che oggi chiameremmo le relazioni logiche sulle relazioni grammaticali fra enunciati. Si considerino i due seguenti enunciati:

(A) Piero ama Maria;

(B) Maria è amata da Piero.

<sup>18</sup>. Per una panoramica generale dei limiti della logica aristotelica in relazione a quella fregeana, cfr. Mariani [2004], p. 3 e segg.



L'analisi aristotelica analizza gli enunciati (A) e (B) come segue: in (A), il soggetto è Piero, mentre il predicato è "ama Maria"; nel caso di (B), invece, il soggetto è Maria, mentre il predicato è "è amata da Piero". In forza del fatto che (A) e (B) hanno, secondo la logica tradizionale, una struttura diversa, essi sono enunciati diversi. Questo è, in un certo senso, evidente. Tuttavia, conseguenza di questo approccio è che (A) e (B) abbiano conseguenze logiche distinte, mentre tutto ciò che segue da (A) segue da (B) e viceversa. In particolare, (A) segue da (B) e viceversa<sup>19</sup>. La distinzione soggetto-predicato, inoltre, non utilizza predicati relazionali. Ad esempio, l'enunciato

(C) 4 è maggiore di 3

in termini aristotelici viene tradotto con " $a$  è  $F$ ", dove " $a$ " sta per il soggetto "4" e " $F$ " sta per il predicato "è maggiore di 3". Un ulteriore difetto dell'analisi aristotelica sta nel fatto che essa non è in grado di rendere conto della funzione logica dei quantificatori, cioè delle espressioni quali "tutti", "qualche" o "nessuno", a meno che non si trovino in posizione di soggetto. Consideriamo l'enunciato

(D) Tutte le ragazze amano qualche marinaio.

L'analisi aristotelica ci costringe a trattare il predicato "amano qualche marinaio" come una unità. In termini aristotelici, (D) viene quindi tradotto "tutte le  $A$  sono  $F$ ", che non sembra essere quello che dice (D).

Tutti questi difetti, secondo Frege, sono imputabili al fatto che la logica tradizionale si fonda sulla dicotomia soggetto-predicato. Il caso degli enunciati (A) e (B) è particolarmente eloquente. Essi, infatti, sembrano esprimere il medesimo stato di cose, palesato dal sentimento di amore che lega Piero a Maria, eppure la logica tradizionale trascura questa identità di contenuto. Allo scopo, quindi, di rendere conto correttamente del contenuto e della struttura logica degli enunciati, Frege propone di sostituire alla dicotomia soggetto-predicato la dicotomia *funzione-argomento*, che egli recupera dalla matematica e amplia. Consideriamo l'enunciato

(I)  $2 + 3 = 5$

19. Oggi si dice che (A) e (B) sono logicamente equivalenti.

e consideriamo innanzitutto l'espressione "2+3". Essa può essere scomposta nella funzione a due argomenti " $( ) + ( )$ ", dove le parentesi tonde segnano posti vuoti che vengono occupati rispettivamente dall'argomento "2" e dall'argomento "3". La funzione "+" applicata a due argomenti arbitrari, dunque, avrà come valore un numero naturale, nel nostro esempio 5. Consideriamo ora l'intero enunciato (1). Esso va letto come l'applicazione di una funzione a tre argomenti, che assume come valore un valore di verità, cioè il Vero o il Falso. (1) viene quindi scomposto nella funzione " $( ) + ( ) = ( )$ ", in cui i posti vuoti siano occupati da termini appropriati. Tale funzione, una volta che i suoi posti vuoti siano occupati da argomenti, Frege direbbe "una volta saturata", assume come valore un valore di verità, ossia il Vero oppure il Falso<sup>20</sup>. Così, se saturiamo la funzione " $( ) + ( ) = ( )$ " con i termini "2", "3" e "5", il valore di questo enunciato sarà il Vero; se, invece, la saturiamo con i termini "2", "3", e "4", il valore che la funzione assume per questi argomenti sarà il Falso. Ora, si applichi il medesimo procedimento all'enunciato

(2) Piero è bello.

Secondo Frege, (2) va scomposto nella funzione " $( )$  è bello", applicata all'argomento "Piero". Anche nel caso di (2), il valore associato all'argomento "Piero" dalla funzione " $( )$  è bello" è un valore di verità. Le funzioni che associano a degli argomenti un valore di verità sono dette da Frege *concetti*. Consideriamo nuovamente l'enunciato

(A) Piero ama Maria.

Secondo la proposta fregeana, (A) può essere analizzato in tre modi diversi:

(A')  $( )$  ama Maria;

(A'') Piero ama  $( )$ ;

(A''')  $( )$  ama  $( )$ .

Nella scomposizione (A''') abbiamo ottenuto il predicato " $( )$  ama  $( )$ " elidendo entrambi gli argomenti "Piero" e "Maria", ottenendo

20. Un argomento, al contrario, è un'entità "satura", auto-sussistente, che non necessita di essere completata in alcun modo.

così un predicato a due posti, ossia un predicato *relazionale*. Grazie all'uso della nozione di relazione, Frege riesce così a ovviare anche al secondo problema della logica aristotelica, quello cioè di non riuscire a rendere conto degli enunciati relazionali<sup>21</sup>.

L'ulteriore innovazione fregeana che intendo esporre sta nell'introduzione dei *quantificatori*. Nella logica aristotelica, i quantificatori come, ad esempio, "tutti", "qualche", "molti" o "nessuno", sono espressioni sincategorematiche che assumono significato solo nel momento in cui sono affiancate a universali, per esempio come nell'espressione "tutti gli uomini". Nell'*Ideografia*, Frege introduce il simbolo " $\forall$ " per il quantificatore universale "tutti"<sup>22</sup>. Consideriamo nuovamente l'enunciato (2). L'analisi fregeana ci dice che questo enunciato va scomposto nel concetto "( ) è bello" e nell'argomento "Piero" e che, assumendo che l'enunciato sia vero, il concetto "( ) è bello" applicato all'argomento "Piero" prende come valore il Vero. La formula

$$(3) (\forall x) (x \text{ è bello})$$

ci dice che, qualsiasi sia l'argomento considerato, il concetto "( ) è bello" assume sempre come valore il Vero, assumendo che (3) sia vero<sup>23</sup>. In Frege, anche i quantificatori sono funzioni. Consideriamo di nuovo l'enunciato (3). Se consideriamo sostituibile il predicato "( ) è bello" secondo il metodo fregeano di scomposizione degli enunciati in funzione e argomento, quello che di (3) rimane è  $(\forall x) (x ( ) )$ , dove le due parentesi a destra della  $x$  segnano, naturalmente, un posto che va saturato. Poiché "( ) è bello" è esso stesso un predicato che denota

21. A onor del vero, una logica delle relazioni fu sistematizzata prima di Frege, da Augustus De Morgan, Charles Sanders Peirce ed Ernst Schröder. Cfr. Kneale & Kneale [1972], cap. 5.

22. Il simbolo " $\exists$ ", corrispondente al quantificatore "qualche", è ottenuto per definizione attraverso il quantificatore universale. Se infatti consideriamo il significato di un enunciato come, ad esempio, "qualche uomo è biondo", notiamo che esso è vero se c'è almeno un uomo biondo. Poiché l'esistenza di almeno un uomo biondo implica che non tutti gli uomini non siano biondi e viceversa, vediamo che l'enunciato in questione equivale a "non tutti gli uomini non sono biondi". Così, il quantificatore esistenziale può essere definito attraverso la negazione "non" e il quantificatore universale "tutti": qualche  $x$  è  $F \leftrightarrow_{\text{def}}$  non tutti gli  $x$  sono  $F$ .

23. Si noti che la proposta fregeana risolve il problema della logica aristotelica di come rendere una quantificazione interna a un predicato.

un concetto, cioè un tipo particolare di funzione,  $(\forall x)(x(\ ))$  sarà una funzione di funzioni.

Le nozioni di funzione e argomento sono introdotte senza ulteriori spiegazioni nell'*Ideografia*, ma sono oggetto di una approfondita analisi nei saggi *Funzione e concetto* e *Concetto e oggetto*. Nel primo di questi scritti, Frege spiega la distinzione fra funzione e concetto. Se da un lato è vero che tutte le funzioni, quindi anche i concetti, sono entità saturabili, dall'altro, mentre i concetti prendono come valore sempre un valore di verità, le funzioni, una volta saturate, possono prendere come valori entità che non sono valori di verità. Non tutte le funzioni, quindi, sono concetti. Ad esempio, la funzione "la capitale della ( )", una volta saturata con un argomento, ad esempio "Svezia", prende come valore Stoccolma. Mentre, inoltre, i concetti prendono come argomenti sempre degli oggetti, le funzioni possono prendere come argomenti delle altre funzioni. È questo il caso, ad esempio, dei quantificatori, che sono definiti da Frege come funzioni di secondo livello, cioè come funzioni di funzioni, che prendono come argomenti funzioni di primo livello, cioè funzioni di argomenti.

La nozione di oggetto e la sua relazione con la nozione di concetto sono analizzate in *Concetto e oggetto*. Tuttavia, la nozione di oggetto è primitiva e come tale non può essere ulteriormente definita. L'unico modo di distinguere fra un concetto e un oggetto sta nella possibile interazione sintattica fra le espressioni che li denotano, rispettivamente un predicato e un termine: un concetto ha sempre necessità di essere saturato opportunamente per produrre un enunciato; un oggetto è un'entità auto-sussistente che satura un concetto per produrre un enunciato. Si noti che Frege intende fornire un'analisi logica del linguaggio quanto più possibile omogenea: gli enunciati stessi sono considerati da Frege come termini, in particolare essi sono nomi di valori di verità. Contrariamente a quanto facciamo oggi grazie alla semantica modellistica per i linguaggi formali secondo cui, semplificando, la verità si *predica* delle formule di tali linguaggi<sup>24</sup>, il Vero e il Falso in Frege sono *oggetti* denotati da enunciati.

La distinzione saturo-insaturo, abbiamo visto, pervade tutta l'analisi fregeana del linguaggio. In sostanza, tutte le espressioni del linguaggio

24. Per una introduzione alla semantica modellistica classica, cfr. Rogers [1978], capp. terzo e quarto.