A01

182

Francesco Bigolin

Teoria geometrica della misura

Un'introduzione ad alcuni argomenti in $\mathbb{R}^n$ e in spazi di Carnot-Carathèodory

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–4875–7

I edizione: giugno 2012

A mamma e papà

Indice

Introduzione **9**

Notazioni **19**

1 Richiami di Teoria della Misura **23**

1.1 Richiami di base 23
1.2 Richiami alla misura di Lebesgue 26
1.3 Classificazione di misure 27
1.4 Supporto e restrizione di una misura 31
1.5 Risultati di approsimazione 33
1.6 Richiami a spazi $L^p(M, d\mu)$ 39
1.7 Teorema di Rappresentazione di Riesz 43
1.8 Decomposizione di Lebesgue 51

2 Differenziazione in spazi omogenei **55**

2.1 Misure Doubling 55
2.2 Ricoprimento di Vitali 58
2.3 Ricoprimento in misura 65
2.4 Derivata di misure 71
2.5 Teorema di differenziazione 78
2.6 Un'applicazione 81

3 Differenziazione di misure di Radon **85**

3.1 Teorema di Besicovitch 85
3.2 Ricoprimenti in spazi metrici e differenziazione 93
3.3 Controesempi 103
3.3.1 Il gruppo di Heisenberg 103
3.3.2 Spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita . 107
3.4 μ-relazione di Vitali 107

4 Misure di Hausdorff **113**
4.1 Costruzione di Carathèodory 113
4.2 Proprietà di $\mathcal{H}^s$ 115
4.3 Relazione con $\mathcal{L}^n$ 119
4.4 Densità sferica 122

5 Spazi $Lip(\Omega)$,$W^{k,p}(\Omega)$ e $BV(\Omega)$ **127**
5.1 Funzioni lipschitziane 127
5.2 Spazi di Sobolev 135
5.2.1 Definizione 135
5.2.2 $W^{k,p}([a,b])$ 137
5.2.3 Approssimazione 139
5.2.4 Disuguaglianze di Sobolev 144
5.2.5 Compattezza 152
5.3 Gli spazi di Sobolev tra spazi metrici 156
5.3.1 Definizione 156
5.3.2 Funzione massimale 157
5.3.3 Equivalenza con la nozione classica di spazio di Sobolev 159
5.4 Funzioni a variazione limitata 163

6 Spazi di Carnot-Carathèodory **169**
6.1 Metrica di Carnot-Carathèodory 169
6.2 Teorema di Chow 177
6.3 Aspetti topologici 183
6.4 Geodetiche e teorema di Hopf-Rinow 187
6.4.1 In spazi metrici generici 187
6.4.2 In spazi di Carnot-Carathèodory 194
6.5 Gruppi di Carnot 199
6.5.1 Definizioni 199
6.5.2 Dilatazioni 201
6.5.3 Coordinate 202
6.6 I gruppi di Carnot come spazi CC 206
6.7 Teorema di Pansu 208

7 Superfici $\mathbb{H}$-regolari intrinseche in $\mathbb{H}^n$ **217**
7.1 Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ 217
7.2 Ipersuperfici $\mathbb{H}$-regolari intrinseche 219
7.3 Parametrizzazione hölderiane di superfici $\mathbb{H}$-regolari 224

Introduzione

Questo testo, che è nato come miglioramento e revisione della tesi di laurea dell'autore [8], è consigliato a chi, per motivi di studio o di ricerca, vuole approfondire le sue conoscenze di analisi funzionale e teoria della misura in $\mathbb{R}^n$ e in spazi metrici più generali, anche non euclidei, in particolare nei gruppi di Carnot.
Sviluppiamo infatti in una prima parte alcuni argomenti di Teoria Geometrica della Misura e di Analisi Funzionale in uno spazio metrico (M, d) munito di una misura μ. In una seconda parte si applicano questi argomenti ad una particolare classe di spazi metrici, chiamati spazi di Carnot-Carathèodory, ed in particolare al gruppo di Heisenberg, che costituisce il più semplice esempio di questa classe.
Il nostro scopo è stato quello di cercare di trattare gli argomenti studiati (ad esempio i teoremi di ricoprimento alla Besicovitch-Federer e in misura, la differenziazione di misure, la misura di Hausdorff) in spazi metrici generali, utilizzando anche esempi e controesempi, segnalando problemi aperti e cercando, se possibile, di fare il punto su alcuni argomenti di ricerca attuale (quali gli spazi di Sobolev su spazi metrici e la parametrizzazione di ipersuperfici in gruppi di Carnot).
I testi a cui più abbiamo fatto più riferimento per la parte di teoria geometrica della misura e analisi funzionale sono Ambrosio e Tilli [4], Federer [19], Mattila [33] e Evans e Gariepy [18]. Nei capitoli 6 e 7 abbiamo fatto riferimento prevalentemente alla tesi di dottorato di Roberto Monti [35] e, per quanto riguarda le problematiche di ricerca, come il teorema delle funzioni implicite e la parametrizzazione di ipersuperfici nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, agli articoli di Ambrosio, Serra Cassano e Vittone [3], Franchi, Serapioni e Serra Cassano [20], Bigolin e Serra Cassano [9, 10] e di Kirchheim e Serra Cassano [30].

Nel capitolo 1 abbiamo riportato un compendio abbastanza completo di

richiami di Teoria della Misura classica. Pur essendo una parte tradizionalmente conosciuta, abbiamo pensato di presentarla in maniera sintetica e ordinata, in modo da rendere il lavoro più completo e di più facile consultazione.
Oltre agli scontati concetti di misura, misura di Lebesgue e alcuni teoremi ben conosciuti, abbiamo riportato una classificazione di misure (misure regolari, localmente finite, σ-finite, di Borel, di Borel regolari e di Radon) e i concetti di supporto e restrizione di misura.
Abbiamo riportato alcuni risultati di approssimazione (ad esempio i teoremi di Lusin e di Severini-Egoroff, teoremi 1.5.3 e 1.5.5), dedicato una sezione agli spazi $L^p(\Omega, d\mu)$ con $\Omega \subset M$ e dato infine particolare risalto a due teoremi, particolarmente importanti: il teorema di rappresentazione di Riesz (teorema 1.7.4) e il teorema di decomposizione di Lebesgue (teorema 1.8.2).
Nei capitoli 2 e 3 abbiamo affrontato la differenziazione di misure in spazi metrici. Dato uno spazio metrico (M, d) e due misure di Borel localmente finite μ e ν, definiamo per $x \in M$ (definizione 2.4.1)

$$\overline{D}_\nu\mu(x) := \begin{cases} \limsup_{r\to 0^+} \dfrac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))} & \text{se } \forall\, r > 0 \ \nu(B(x,r)) > 0 \\ +\infty & \text{se } \exists\, r > 0 \ \nu(B(x,r)) = 0 \end{cases}.$$

Analogamente

$$\underline{D}_\nu\mu(x) := \begin{cases} \liminf_{r\to 0^+} \dfrac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))} & \text{se } \forall\, r > 0 \ \nu(B(x,r)) > 0 \\ +\infty & \text{se } \exists\, r > 0 \ \nu(B(x,r)) = 0 \end{cases}.$$

Se per $x \in M$ vale $\overline{D}_\nu\mu(x) = \underline{D}_\nu\mu(x) =: D_\nu\mu(x) < \infty$ si dice che esiste la derivata di μ rispetto ν nel punto x.
L'obbiettivo che ci siamo posti è quello di dimostrare il teorema di esistenza della derivata $D_\nu\mu(x)$ ν-q.o. $x \in M$ per μ e ν misure di Radon (teoremi 2.4.3 e 3.2.11), una sua caratterizzazione data in termine del teorema di decomposizione di Lebesgue (teoremi 2.4.5 e 3.2.12) e il teorema di differenziazione di Lebesgue (teoremi 2.5.2 e 3.2.13), per cui se $f \in L^1_{loc}(M, d\nu)$, allora

$$\exists \lim_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} f(y)d\nu(y) = f(x) \qquad \nu\text{−q.o.}\, x \in M.$$

dove con $B(x,r)$ indichiamo la palla chiusa di centro x e raggio $r > 0$ in (M,d) e con

$$\fint_{B(x,r)} f(y)d\nu(y) := \begin{cases} \dfrac{1}{\nu(B(x,r))} \displaystyle\int_{B(x,r)} f(y)d\nu(y) & \text{se } x \in \operatorname{spt}(\nu) \\ 0 & \text{se } x \notin \operatorname{spt}(\nu) \end{cases}$$

la media di $f \in L^1_{loc}(M, d\nu)$ su $B(x,r)$.
Sottolineiamo in particolare l'importanza del teorema di differenziazione di Lebesgue, dimostrato per la prima volta da H. Lebesgue nel 1910 nel caso $M = \mathbb{R}^n$ $d =| \cdot |$ e $\nu = \mathcal{L}^n$.
Per ottenere questi risultati sono sufficienti teoremi di ricoprimento e ricoprimento in misura. In $\mathbb{R}^n$ si dimostrano i teoremi 2.2.3 e 3.1.3 di Vitali e di Besicovitch, da cui segue il teorema 3.1.4 di ricoprimento in misure di Radon su $\mathbb{R}^n$.
Cercando di generalizzare questi teoremi in uno spazio metrico (M,d), abbiamo visto quali condizioni di tipo geometrico sulla metrica d sono sufficienti per trovare che un ricoprimento $\mathcal{F}$ fine di $A \subset M$ ricopra A nel senso di Vitali (vedi definizione 2.3.1), cioè sia tale che $\forall\, V \subset M$ aperto $\exists \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ sottofamiglia disgiunta al più numerabile tale che

$$\mu\left(V \cap A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B\right) = 0.$$

Abbiamo ottenuto il risultato voluto in due tipi di spazi: gli spazi metrici di tipo omogeneo (M,d,μ), cioè spazi metrici dotati di una misura doubling (capitolo 2) e spazi metrici tali che d sia direzionalmente (ξ,η,ζ)-limitata in $A \subset M$ (capitolo 3).

Nel capitolo 2 abbiamo studiato la geometria di uno spazio metrico di tipo omogeneo, ricordiamo che una misura si dice doubling (definizione 2.1.5) se $\exists\, C_d > 0$ tale che $\forall\, x \in M\, \forall\, r > 0$

$$\mu\left(B(x,2r)\right) \leq C_d\, \mu\left(B(x,r)\right).$$

Per questi spazi è valido il teorema 2.2.4 di ricoprimento di Vitali, per cui se (M,d) è uno spazio limitatamente compatto (ogni chiuso e limitato è compatto) e se $\mathcal{F}$ è una famiglia di palle chiuse tali che $D := \sup\{\operatorname{diam}(B) : B \in \mathcal{F}\} < \infty$, allora esiste una sottofamiglia al più numerabile $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ di palle a due a due disgiunte tali che

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B.$$

Seguendo quanto fatto da Federer [19], il punto essenziale del lavoro è stato applicare il teorema 2.3.3, introducendo il concetto di τ-allargamento si $S \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ricoprimento di $A \subset M$ (definizione 2.3.2)

$$\hat{S} := \bigcup \{T : T \in \mathcal{A},\, T \cap S \neq \emptyset,\, \operatorname{diam}(T) \leq \tau \operatorname{diam}(S)\}.$$

Visto che $\mu(\hat{S}) \leq \lambda\mu(S)$ (lemma 2.3.6) abbiamo ottenuto il teorema 2.3.7 di ricoprimento in misure doubling.

Nel capitolo 3 abbiamo esposto una generalizzazione del teorema di Besicovitch in spazi metrici per cui la metrica d sia direzionalmente (ξ, η, ζ)-limitata in $A \subset M$, cioè tale che per $\xi > 0$, $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$, $\zeta \in \mathbb{N}$ vale la seguente condizione (definizione 3.2.1):
siano $a \in A$ e $B \subset A \cap U(a, \xi) \setminus \{a\}$. Se $\dfrac{d(x,c)}{d(a,c)} \geq \eta$ ogni volta che $b, c \in B$ e $x \in M$ con $b \neq c$, $d(a,b) \geq d(a,c)$ e

$$d(a,x) = d(a,c), \qquad d(x,b) = d(a,b) - d(a,c),$$

allora $\operatorname{card} B \leq \zeta$. Vale allora il seguente teorema di ricoprimento

Teorema 3.2.8 (Federer, Generalizzazione di Besicovitch)
Sia (M, d) uno spazio metrico. Sia d direzionalmente (ξ, η, ζ)-limitata in $A \subset M$, $0 < \rho < \frac{\xi}{2}$ e sia $\mathcal{F} := \{B(a, r) : r < \rho\}$ tale che $\forall\, a \in A\, \exists\, B(a, r) \in \mathcal{F}$. Allora

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{2\zeta+1} \bigcup_{B\in\mathcal{G}_i} B \quad \textit{con } \mathcal{G}_i \subset \mathcal{F} \textit{ sottofamiglie disgiunte.}$$

La dimostrazione è abbastanza tecnica e elaborata, necessita l'introduzione della definizione di insieme τ-controllato (definizione 3.2.2) e si poggia sostanzialmente sul teorema 3.2.4. Abbiamo qiundi potuto dimostrare un nuovo teorema di ricoprimento in misura e ottenere quindi la differenziazione di misure di Radon, applicando i nuovi risultati di ricoprimento per misure di Radon non necessariamente doubling.

La generalizzazione di questi teoremi non vale in uno spazio metrico qualunque. Due controesempi sono introdotti nel capitolo 3 attraverso il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ munito di un'opportuna distanza $d_{\mathbb{H}^1}$ ed uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. In particolare questi due spazi metrici non sono direzionalmente limitati e quindi non è possibile utilizzare i teoremi 3.2.11, 3.2.12 e 3.2.13 di differenziazione per misure μ, ν di Radon. Sono invece validi i teoremi 2.4.3, 2.4.5 e 2.5.2 di differenziazione se la misura ν rispetto a cui si deriva la misura di Radon μ è doubling. $(\mathbb{H}^1, d_{\mathbb{H}^1}, \nu)$ è infatti in questo caso uno spazio metrico di tipo omogeneo.
Per raffinare ulteriromente lo studio della differenziazione di misure in spazi metrici utilizzando famiglie di sottoinsiemi più generali di quelle di palle chiuse utilizzate in precedenza, abbiamo introdotto il concetto di μ-relazione di Vitali $\mathcal{V}$ e riportato alcuni teoremi che la caratterizzano.

Nel capitolo 4 abbiamo esposto la costruzione e le caratterizzazioni della misura di Hausdorff $\mathcal{H}^s$. La misura di Hausdorff è adatta a misurare le sottovarietà in spazi metrici, quindi ad estendere e generalizzare il classico concetto di lunghezza di una curva, area di una superficie o volume di un solido. Seguendo la costruzione di Carathèodory (esposta prima in generale per una premisura ψ_δ e una misura ψ) abbiamo definito in generale la premisura di Hausdorff s-dimensionale (definizione 4.2.1) per $0 \leq \delta \leq +\infty$ e $A \subset M$ $\mathcal{H}^s_\delta : \mathcal{P}(M) \to [0, +\infty]$:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \frac{\omega_s}{2^s} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s : \ A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i, \ \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta \right\}$$

e la misura di Hausdorff s-dimensionale (definizione 4.2.2) $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(M) \to [0, +\infty]$ per $A \subset M$ ([1]):

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

$\dfrac{\omega_s}{2^s}$ è un fattore di normalizzazione tale che $\mathcal{H}^n_\delta(B(0,1)) = \mathcal{L}^n(B(0,1))$ nel caso in cui $M = \mathbb{R}^n$ e $d = \mid \cdot \mid$. Abbiamo esposto le proprietà della misura di Hausdorff, introducendo in particolare la definizione di dimensione di Hausdorff. Sono state poi considerate le relazioni tra la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^s$ e quella di Lebesgue $\mathcal{L}^n_E$ in uno spazio di Banach finito dimensionale

[1] $\mathcal{P}(M)$ denota l'insieme delle parti di M.

$(E, \| \cdot \|_E)$. Uno dei risultati principali è la disuguaglianza isodiametrica (teorema 4.3.3)

$$\mathcal{L}^n_E(A) \leq \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^n$$

Il capitolo 5 è dedicato invece allo studio di alcuni spazi funzionali. Abbiamo studiato in particolare gli spazi di funzioni lipschitziane $Lip(\Omega)$ ([2]), α-hölderiane $C^{0,\alpha}(\Omega)$, gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ e le funzioni a variazione limitata $BV(\Omega)$.
Per quanto riguarda le funzioni lipschitziane, oltre ai ben conosciuti lemma di estensione di Mc Shane (teorema 5.1.5) e teorema di differenziabilità quasi ovunque di Rademacher (teorema 5.1.6) e generalizzazioni, abbiamo dedicato spazio a interessanti collegamenti fra queste funzioni e la misura di Hausdorff, in particolare il teorema 5.1.9 degli insiemi di livello lipschitziani, da cui deriva anche la formula di coarea.
Un'ampia sezione è dedicata agli spazi di Sobolev trattati sia da un punto di vista classico (su un aperto Ω tramite le derivate distribuzionali) e sia da un punto di vista più recente, dovuto a P.Hajlasz (vedi [23]), che permette anche di definire spazi di Sobolev tra spazi metrici.
La prima sezione è dedicata alle particolari proprietà degli spazi di Sobolev $W^{k,p}([a,b])$, le cui funzioni sono definite su un dominio unidimensionale. Abbiamo poi esaminato gli spazi di Sobolev le cui funzioni sono definite su domini di $\mathbb{R}^n$. Abbiamo visto prima di tutto risultati di approssimazione, in particolare il teorema 5.2.14 di Meyers-Serrin (approssimazione di $f \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\{f_k\}_k \subset C^\infty(\Omega)$) tramite l'introduzione del prodotto di convoluzione $f * g$ (definizione 5.2.10) e dei mollificatori di Friedrichs (definizione 5.2.12). Abbiamo infine osservato che sotto l'ipotesi che Ω sia un dominio estendibile (definizione 5.2.4) $W^{1,\infty}(\Omega)$ e $Lip(\Omega)$ coincidono.
La sezione seguente è dedicata alle disuguaglianze di Sobolev-Poincarè e ai risultati si immersione conseguenti, che possiamo riassumere nei teoremi 5.2.18 e 5.2.26. Abbiamo concluso il nostro studio degli spazi di Sobolev classici con risultati di compattezza, in particolare il teorema 5.2.30 di Rellich.
Segue la trattazione degli spazi di Sobolev tra spazi metrici, seguendo quanto fatto da Hajlasz [23] (si veda in particolare Ambrosio-Tilli [4]). Abbiamo poi utilizzato questa nozione per dare una risposta parziale al problema aperto proposto nell'articolo di Kirchheim e Serra Cassano [30], remark 4.3,

[2]Con Ω indichiamo un aperto di $\mathbb{R}^n$

come spiegato in seguito. Sia quindi

Definizione 5.3.1 *Siano* $(M, d_M), (N, d_N)$ *spazi metrici e sia* μ *una misura di Borel finita sugli insiemi limitati di* M*. Sia poi* $p \in [1, +\infty]$*. Chiamiamo* **spazi di Sobolev metrici** $W_m^{1,p}(M, \mu, N)$ *lo spazio delle funzioni* $u : M \to N$ *(con la solita identificazione* $u \equiv v$ *se* $u = v$ μ*-q.o.) con la seguente proprietà:*
$\exists\, g \in L^p(M, d\mu)$ $\exists\, E \subset M$ *tali che* $g \geq 0$, $\mu(E) = 0$ *e*

$$d_N(u(x), u(y)) \leq d_M(x, y)(g(x) + g(y)) \quad \forall\, x, y \in M \setminus E.$$

Abbiamo quindi dimostrato l'equivalenza tra gli spazi $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_m^{k,p}(\Omega, \mathcal{L}^n, \mathbb{R})$. Si può dimostrare abbastanza facilmente l'inclusione $W_m^{k,p}(\Omega, \mathcal{L}^n, \mathbb{R}) \subset W^{k,p}(\Omega)$ (teorema 5.3.7), mentre per l'altra inclusione, valida solo per domini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ estendibili, è necessaria l'introduzione della funzione massimale, definita per $f \in L^1_{loc}(M, d\mu)$ da $\mathcal{M}(f) : M \to \mathbb{R}$ (definizione 5.3.5)

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} \mid f(y) \mid \; d\mu(y).$$

Il capitolo 5 è concluso dallo studio di funzioni di fondamentale importanza nel calcolo delle variazioni, le funzioni a variazione limitata $BV(\Omega)$ (definizione 5.4.1), cioè le $u \in L^1(\Omega)$ tali che $|Du|(\Omega) :=$

$$\sup\left\{\int_\Omega u(x)\,\mathrm{div}\varphi(x)\,d\mathcal{L}^n(x) :\ \varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n),\ |\varphi(x)| \leq 1\,\forall\, x \in \Omega\right\} < +\infty.$$

Abbiamo riportato risultati di semicontinuità inferiore, approssimazione, compattezza e in particolare il teorema 5.4.4 di struttura delle funzioni $BV(\Omega)$.
I concetti di variazione limitata e in particolare di insieme di perimetro finito sono stati ripresi anche nel capitolo 7.

Nel capitolo 6 ci siamo occupati di uno speciale tipo si spazi metrici, molto studiati recentemente in analisi e in geometria: gli spazi di Carnot-Carathèodory.
Sia infatti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $X = (X_1, ..., X_m)$ una famiglia di campi vettoriali X_j su Ω tali che, per $a_{ij} \in Lip(\Omega)$

$$X_j(x) := \sum_{i=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \mathrm{per} j = 1, ..., m.$$

Diciamo che una curva $\gamma : [0,T] \to \Omega$ è X-ammissibile (definizione 6.1.1) se $\exists\, h := (h_1, ..., h_m)$ vettore di funzioni misurabili $h_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ tale che

$$| h(t) | := \sqrt{\sum_{j=1}^{m} h_j^2(t)} \in L^\infty([0,T]), \quad \dot{\gamma}\,(t) = \sum_{j=1}^{m} h_j(t) X_j(\gamma(t))$$

$\mathcal{L}^1 -$ q.o. $t \in [0,T]$. Chiamiamo poi distanza di Carnot-Carathèodory (definizione 6.1.4) la funzione $d_C : \Omega \times \Omega \to [0,+\infty]$ tale che $d_C(x,y) :=$

$$\inf\{T \geq 0 : \exists \gamma : [0,T] \to \Omega\ X - \text{subunitaria tale che}\, \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\}.$$

Se l'insieme è vuoto definiamo $d_C(x,y) = +\infty$.
(Ω, d_C) è uno spazio metrico, detto spazio di Carnot-Carathèodory, se $\forall\, x,y \in \Omega\ d_C(x,y) < +\infty$ (teorema 6.1.7). Abbiamo cercato di studiare questi spazi da un punto di vista sia metrico (sezione 6.1) che topologico (sezione 6.3), confrontando d_C con la distanza euclidea $| \cdot |$, facendo osservazioni sull'applicazione $id : (\Omega, d_C) \to (\Omega, | \cdot |)$ (l'inversa non è sempre continua) e sulla compattezza delle palle chiuse (lemma 6.3.5).
Importante è stata l'introduzione dei commutatori di campi vettoriali $X, Y \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (definizioni 6.2.1 e 6.2.4), la formula di Campbell-Hausdorff (teorema 6.2.8) e la condizione di Chow-Hörmander (equazione 6.11), per cui il rango dell'algebra di Lie generata dai campi $X_1, ..., X_m$ è massimo.
La condizione di Chow-Hörmander è una ipotesi sufficiente per la validità del teorema 6.2.12 di Chow, che assicura l'esistenza di curve X-ammissibili, o equivalentemente che $d_C(x,y) < +\infty\ \forall\, x,y \in \Omega$.
Il secondo risultato fondamentale trattato è stato il teorema di Hopf-Rinow di esistenza delle geodetiche, dimostrato sia per spazi metrici di lunghezza (definizione 6.4.10) sia per spazi di Carnot-Carathèodory.
Il teorema 6.4.13 di Hopf-Rinow dice che se (M,d) è uno spazio di lunghezza completo e localmente compatto, allora

i le palle chiuse sono compatte,

ii $\forall\, x,y \in M\ \exists\, \gamma[0,T] \to M$ geodetica tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(T) = y$.

Abbiamo quindi applicato questo risultato agli spazi di Carnot-Carathèodory.
Di seguito abbiamo studiato particolari ma significativi spazi di Carnot-Carathèodory: i gruppi di Carnot. Un gruppo di Carnot è un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^n, \cdot)$ connesso, semplicemente connesso, nilpotente e stratificato (definizioni 6.5.1, 6.5.5 e 6.5.8).

Su $\mathbb{G}$ gruppo di Carnot abbiamo definito le traslazioni sinistre τ_g e dei particolari automorfismi ad un parametro, le dilatazioni $\delta_\lambda : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$.
Abbiamo quindi studiato i loro rapporti con la distanza di Carnot-Carathèodory d_C, considerando $(\mathbb{R}^n, d_C)$ come gruppo di Carnot. In particolare, $\forall\, x, y, g \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda > 0$, valgono le proprietà di omogeneità e di invarianza (teorema 6.6.1):

$$d_C(\delta_\lambda(x), \delta_\lambda(y)) = \lambda d_C(x, y),$$

$$d_C(x, y) = d_C(\tau_g(x), \tau_g(y)).$$

Abbiamo concluso il capitolo 6 studiando la Pansu-differenziabilità di funzioni $f : \mathbb{G} \to \overline{\mathbb{G}}$. In particolare un risulatato fondamentale in questo ambito, dovuto a Pansu, è l'estensione del teorema di Rademacher sulla differenziabilità delle funzioni lipschitziane (teorema 6.7.7).

Nel capitolo 7 applichiamo alcuni dei risultati introdotti nei capitoli 5 e 6 al più semplice gruppo di Carnot, il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ e riportiamo i risultati principali contenuti in alcuni articoli di Ambrosio, Franchi, Serapioni Serra Cassano, Kircheim, Vittone e Bigolin [3], [9], [10], [11], [20], [30] e le tesi di dottorato di Bigolin [6] e Vittone [43]. Più precisamente nel contesto del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ introduciamo e studiamo la nozione di ipersuperficie $\mathbb{H}$-regolare intrinseca (vedi definizione 7.2.8). Infatti è stato provato da Ambrosio e Kirchheim (vedi [2]) che la nozione di superficie regolare euclidea non è idonea nel contesto della Teoria Geometrica della Misura, in quanto rispetto a questa nozione il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ risulterebbe puramente non rettificabile. Vi è allora la necessità di introdurre una nozione di superficie regolare intrinseca ad $\mathbb{H}^n$ che sia compatibile con la nuova geometria di $\mathbb{R}^{2n+1}$ visto come gruppo di Carnot di passo 2.
Ricordiamo che $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, \cdot, \delta_\lambda, H\mathbb{H}^n, d_C)$ è il gruppo di Carnot il cui spazio ambiente è lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{2n+1}$, munito della legge di gruppo

$$p \cdot q := \left(z + \zeta, t + \tau - \frac{1}{2} \Im m(z \cdot \bar{\zeta}) \right)$$

se $p = (z, t) = (x_1, \ldots, y_n, t)$, $q = (\zeta, \tau) = (\xi_1, \ldots, \eta_n, \tau) \in \mathbb{H}^n$, rispetto a cui $(\mathbb{R}^{2n+1}, \cdot)$ è un gruppo di Lie. Inoltre vi è una famiglia naturale di dilatazioni $\delta_\lambda : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$, definite per $\lambda > 0$ da

$$\delta_\lambda(z, t) := (\lambda z, \lambda^2 t)$$

che sono anche automorfismi del gruppo.
L'algebra di Lie $\mathtt{h}_n$ associata a $(\mathbb{R}^{2n+1},\cdot)$ è generata dai campi vettoriali

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}, \qquad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \dots n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}$$

con commutatori

$$[X_j, T] = 0, \qquad [Y_j, T] = 0 \qquad [X_j, Y_i] = \delta_{ij} T.$$

Il fibrato orizzontale $H\mathbb{H}^n$ è definito al variare di $p \in \mathbb{H}^n$ da

$$H\mathbb{H}^n_p := \operatorname{span}\{X_1(p), \dots, Y_n(p)\} \subset T\mathbb{H}^n_p.$$

d_C è la metrica di Carnot associata al fibrato $H\mathbb{H}^n$, secondo la definizione 6.1.4. Si chiama allora superficie $\mathbb{H}$-regolare $\mathtt{S} \subset \mathbb{H}^n$ un luogo di zeri non critico, cioè un insieme tale che $\forall\, p \in \mathtt{S}\ \exists \mathcal{U}$ intorno di p in $\mathbb{H}^n$ e $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ tale che

i $\mathtt{S} \cap \mathcal{U} = \{q \in \mathcal{U} :\ f(q) = 0\}$

ii $\nabla_{\mathbb{H}} f(q) := (X_1 f(q), \dots, Y_n f(q)) \neq 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{U}$

dove $f \in C^1_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ se e solo se $f \in C^0(\mathcal{U})$ ed esistono $X_j f, Y_j f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ in senso distribuzionale.
Attraverso un risultato tipo teorema della funzioni implicite (teorema 7.2.10) se $\mathtt{S} \subset \mathbb{H}^n$ è $\mathbb{H}$-regolare, allora esiste localmente una parametrizzazione continua

iii $\Phi : I \subset (\mathbb{R}^{2n}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^{2n+1}, d)$

se $I = [-\delta, \delta] \times [-\delta^2, \delta^2]$, cioè Φ è continua, iniettiva e $\Phi(I) = \mathtt{S}$ quando si consideri su $\mathbb{R}^3$ la metrica euclidea $d =|\cdot|$. Inoltre è noto che la mappa Φ non può essere lipschitziana nè rispetto alla metrica euclidea nè rispetto a quella di Carnot-Carathèodory $d = d_C$ (vedi teorema 7.3.2). È stato provato invece, da Kirchheim e Serra Cassano [30], che Φ è $\frac{1}{2}$-hölderiano quando si considera su $\mathbb{R}^3$ $d = d_C$ (vedi teorema 7.3.2).

Ringraziamenti: Un ringraziamento particolare va al professor Francesco Serra Cassano, per i consigli e l'aiuto dato durante la stesura di questo testo.