

$$\frac{A_{01}}{178}$$

Grazie ai Colleghi di Geometria del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Torino per il loro prezioso contributo. Grazie al Prof. S.M. Salamon per tanti utili suggerimenti e per la realizzazione di molti grafici. Grazie ai Proff. Sergio Console, Federica Galluzzi, Sergio Garbiero e Mario Valenzano per aver letto il manoscritto. Un ringraziamento particolare agli Studenti del Corso di Studi in Fisica dell'Università di Torino, la loro partecipazione attiva e il loro entusiasmo hanno motivato questa esperienza.

Elsa Abbena
Anna Maria Fino
Gian Mario Gianella

Algebra lineare e geometria analitica

Volume I



Copyright © MMXII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/ A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-4628-9

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: marzo 2012

Indice

Prefazione	1
1 Sistemi Lineari	3
1.1 Equazioni lineari	3
1.2 Sistemi lineari	4
1.2.1 Sistemi lineari omogenei	16
2 Matrici e Determinanti	19
2.1 Somma di matrici e prodotto di un numero reale per una matrice	19
2.2 Il prodotto di matrici	23
2.2.1 I sistemi lineari in notazione matriciale	26
2.3 La matrice inversa	26
2.4 La trasposta di una matrice	27
2.5 Matrici quadrate di tipo particolare	28
2.6 Le equazioni matriciali	31
2.6.1 Calcolo della matrice inversa, primo metodo	34
2.7 La traccia di una matrice quadrata	40
2.8 Il determinante	40
2.8.1 I Teoremi di Laplace. Un'altra definizione di rango di una matrice	47
2.8.2 Calcolo della matrice inversa, secondo metodo	50
2.8.3 Il Teorema di Cramer	52
2.9 Per saperne di più	54
3 Calcolo Vettoriale	57
3.1 Definizione di vettore	57
3.2 Somma di vettori	59
3.3 Il prodotto di un numero reale per un vettore	63
3.4 Dipendenza lineare e basi	64
3.5 Il cambiamento di base in V_3	76
3.6 Angolo tra due vettori	79
3.7 Operazioni non lineari tra vettori	80
3.7.1 Il prodotto scalare di due vettori	80

3.7.2	Il prodotto vettoriale di due vettori	90
3.7.3	Il prodotto misto di tre vettori	96
3.8	Cambiamento di basi ortonormali in V_3 e in V_2	99
3.9	Esercizi di riepilogo svolti	104
3.10	Per saperne di più	106
3.10.1	Un'altra definizione di vettore	106
3.10.2	Ulteriori proprietà delle operazioni tra vettori	107
4	Spazi Vettoriali e Sottospazi Vettoriali	111
4.1	Spazi vettoriali	111
4.2	Sottospazi vettoriali	114
4.2.1	Definizione ed esempi	114
4.2.2	Intersezione e somma di sottospazi vettoriali	118
4.3	Generatori, basi e dimensione	123
4.3.1	Base di uno spazio vettoriale	123
4.3.2	Basi e somma diretta	135
4.3.3	Rango di una matrice	139
4.3.4	Il cambiamento di base	147
4.3.5	Iperpiani vettoriali	150
4.4	Esercizi di riepilogo svolti	151
4.5	Per saperne di più	154
4.5.1	Equazioni vettoriali e Teorema del Rango	158
4.5.2	Equivalenza tra due definizioni di rango di una matrice	163
4.5.3	Spazi vettoriali complessi, matrici hermitiane e anti-hermitiane	165
5	Spazi Vettoriali Euclidei	171
5.1	Definizione di prodotto scalare	171
5.2	Norma di un vettore	174
5.3	Basi ortonormali	178
5.4	Il complemento ortogonale	187
5.5	Esercizi di riepilogo svolti	191
5.5.1	Per saperne di più	194
5.5.2	Spazi vettoriali hermitiani	194
6	Applicazioni Lineari	201
6.1	Matrice associata ad un'applicazione lineare. Equazioni di un'applicazione lineare	204
6.2	Cambiamenti di base e applicazioni lineari	211
6.3	Immagine e controimmagine di sottospazi vettoriali	213
6.4	Operazioni tra applicazioni lineari	224
6.5	Sottospazi vettoriali invarianti	228
6.6	Applicazione lineare aggiunta. Endomorfismi autoaggiunti	230
6.7	Esercizi di riepilogo svolti	233

6.8	Per saperne di più	237
6.8.1	Forme lineari - dualità	237
6.8.2	Cambiamento di base in V^*	241
6.8.3	Spazio vettoriale biduale	243
6.8.4	Dualità nel caso degli spazi vettoriali euclidei	246
6.8.5	Trasposta di un'applicazione lineare	247
6.8.6	Endomorfismi autoaggiunti e matrici hermitiane	251
6.8.7	Isometrie, similitudini, trasformazioni unitarie	252
7	Diagonalizzazione	259
7.1	Autovalori e autovettori di un endomorfismo	259
7.2	Determinazione degli autovalori e degli autospazi	263
7.3	Endomorfismi diagonalizzabili. Matrici diagonalizzabili	268
7.4	Il Teorema Spettrale	271
7.5	Esercizi di riepilogo svolti	276
7.6	Per saperne di più	280
7.6.1	Diagonalizzazione simultanea	281
7.6.2	Il Teorema di Cayley–Hamilton	286
7.6.3	Teorema spettrale e endomorfismi autoaggiunti. Caso complesso	288
7.6.4	Autovalori delle isometrie, similitudini, trasformazioni unitarie	292
8	Forme Bilineari e Forme Quadratiche	295
8.1	Forme bilineari simmetriche	295
8.1.1	Matrice associata ad una forma bilineare simmetrica	298
8.2	Forme quadratiche	303
8.3	Nucleo e vettori isotropi	306
8.4	Classificazione di una forma quadratica	316
8.5	Forme canoniche	321
8.6	La segnatura di una forma quadratica	328
8.7	Esercizi di riepilogo svolti	333
8.8	Per saperne di più	340
8.8.1	Forme bilineari simmetriche ed endomorfismi autoaggiunti	340
8.8.2	Forme bilineari simmetriche e spazio vettoriale duale	343
8.8.3	Altri metodi di classificazione di una forma quadratica	343
8.8.4	Il determinante come forma p -lineare	348
9	Geometria Analitica nel Piano	353
9.1	Il riferimento cartesiano, generalità	353
9.1.1	Distanza tra due punti	355
9.1.2	Punto medio di un segmento	356
9.1.3	Baricentro di un triangolo	356
9.2	Luoghi geometrici del piano	356

9.3	Riferimento polare	360
9.4	Traslazione	361
9.5	Simmetrie	364
9.5.1	Curva simmetrica rispetto all'asse delle ordinate	364
9.5.2	Curva simmetrica rispetto all'asse delle ascisse	365
9.5.3	Curva simmetrica rispetto all'origine	365
9.6	Retta nel piano	366
9.6.1	Retta per un punto parallela ad un vettore	367
9.6.2	Retta per un punto ortogonale ad un vettore	369
9.6.3	Retta per due punti distinti	371
9.6.4	Rette particolari	372
9.6.5	Il coefficiente angolare ed il suo legame con a, b, c	373
9.7	Parallelismo, ortogonalità, angoli e distanze	374
9.7.1	Condizione di parallelismo tra rette	374
9.7.2	Condizione di perpendicolarità tra rette	375
9.7.3	Angolo tra due rette	376
9.7.4	Posizione reciproca di due rette nel piano	377
9.7.5	Distanza di un punto da una retta	379
9.8	Fasci di rette	381
9.9	Esercizi di riepilogo svolti	383
9.10	Per saperne di più	385
9.10.1	Rette immaginarie	385
10	Riduzione a Forma Canonica delle Coniche	389
10.1	La circonferenza nel piano	389
10.1.1	Posizione reciproca tra una retta e una circonferenza	391
10.1.2	Retta tangente ad una circonferenza in un suo punto	392
10.1.3	Posizione reciproca di due circonferenze. Circonferenza per tre punti	393
10.1.4	Fasci di circonferenze	395
10.2	Le coniche: definizione e proprietà focali	400
10.2.1	L'ellisse	400
10.2.2	L'iperbole	405
10.2.3	Iperbole equilatera riferita agli asintoti	414
10.2.4	La parabola	416
10.2.5	Coniche e traslazioni	419
10.3	Le coniche: luoghi geometrici di punti	423
10.4	Le coniche: equazioni di secondo grado, riduzione delle coniche in forma canonica	429
10.5	Esercizi di riepilogo svolti	444
10.6	Per saperne di più	447
10.6.1	Potenza di un punto rispetto ad una circonferenza	447
10.6.2	Equazioni parametriche delle coniche	449
10.6.3	Le coniche in forma polare	451

10.6.4	Retta tangente ad una conica in un suo punto	452
11	Geometria Analitica nello Spazio	457
11.1	Il riferimento cartesiano nello spazio	457
11.1.1	Distanza tra due punti	458
11.1.2	Punto medio di un segmento	459
11.1.3	Baricentro di un triangolo e di un tetraedro	459
11.1.4	Area di un triangolo e volume di un tetraedro	459
11.2	Rappresentazione di un piano nello spazio	460
11.2.1	Piano per un punto ortogonale ad un vettore	460
11.2.2	Piano per un punto parallelo a due vettori	462
11.2.3	Piano per tre punti non allineati	464
11.3	Rappresentazione della retta nello spazio	466
11.3.1	Retta per un punto parallela ad un vettore	466
11.3.2	Retta per due punti distinti	470
11.3.3	Posizione reciproca di due piani. Retta come intersezione di due piani	471
11.4	Posizioni reciproche tra rette e piani	473
11.4.1	Posizione reciproca di tre piani	473
11.4.2	Posizione reciproca tra retta e piano	474
11.4.3	Posizione reciproca di due rette nello spazio	477
11.5	Fasci di piani	479
11.6	Distanze e angoli	481
11.6.1	Distanza di un punto da un piano	481
11.6.2	Distanza di un punto da una retta	483
11.6.3	Minima distanza tra due rette sghembe. Perpendicolare comune a due rette sghembe	484
11.6.4	Angolo tra due rette	487
11.6.5	Angolo tra retta e piano	487
11.6.6	Angolo tra due piani	487
11.7	Sfera e posizione reciproca con rette e piani	489
11.7.1	Sfera	489
11.7.2	Posizione reciproca tra piano e sfera	492
11.7.3	Posizione reciproca tra retta e sfera	493
11.8	La circonferenza nello spazio	495
11.9	Posizione reciproca tra due sfere. Fasci di sfere	499
11.10	Coordinate sferiche	506
11.11	Esercizi di riepilogo svolti	509
11.12	Per saperne di più	517
11.12.1	Baricentro geometrico di punti	517
11.12.2	Potenza di un punto rispetto ad una sfera	519
11.12.3	Sfere in dimensione quattro	522

12 Coni, Cilindri, Superfici di Rotazione e Quadriche	525
12.1 Cenni sulla rappresentazione di curve e superfici	525
12.2 Il cono	527
12.2.1 Cono tangente ad una sfera	535
12.2.2 Proiezione di una curva da un punto su un piano	536
12.3 Il cilindro	538
12.3.1 Cilindri con assi paralleli agli assi coordinati	541
12.3.2 Cilindro circoscritto ad una sfera	546
12.3.3 Proiezione di una curva su un piano secondo una direzione assegnata	548
12.3.4 Coordinate cilindriche	550
12.4 Superfici di rotazione	552
12.5 Cenni sulle superfici rigate	562
12.6 Quadriche	564
12.6.1 Quadriche rigate	579
12.7 Esercizi di riepilogo svolti	588
12.8 Per saperne di più	598
12.8.1 Piano tangente ad una quadrica in un suo punto	598
Bibliografia	607
Indice dei simboli	609
Indice Analitico	613

Prefazione

Con l'attivazione delle lauree triennali, i corsi universitari hanno subito una notevole riduzione del numero di ore a disposizione per le lezioni ed esercitazioni. Questo libro, che trae origine dalle lezioni di "Geometria e Algebra Lineare I" che gli Autori hanno tenuto al primo anno del Corso di Laurea in Fisica presso l'Università di Torino, costituisce ora un testo completo che può essere anche utilizzato nelle Facoltà di Ingegneria, come pure nel Corso di Laurea in Matematica per lo studio della Geometria Analitica nel Piano e nello Spazio e per tutte quelle parti di Algebra Lineare di base trattate in campo reale.

Esso si presenta in due volumi di agevole consultazione: il primo dedicato alla parte teorica ed il secondo formato da una raccolta di esercizi, proposti con le relative soluzioni, per lo più tratti dai testi d'esame. La suddivisione in capitoli del secondo volume si riferisce agli argomenti trattati nei corrispondenti capitoli del primo volume.

Il testo è di facile lettura e con spiegazioni chiare e ampiamente dettagliate, un po' diverso per stile ed impostazione dagli usuali testi universitari del settore, al fine di sostenere ed incoraggiare gli Studenti nel delicato passaggio dalla scuola secondaria superiore all'Università.

In quasi tutti i capitoli del primo volume è stato inserito un paragrafo dal titolo "Per saperne di più" non solo per soddisfare la curiosità del Lettore ma con il preciso obiettivo di offrire degli orientamenti verso ulteriori sviluppi della materia che gli Studenti avranno occasione di incontrare sia in altri corsi di base sia nei numerosi corsi a scelta delle Lauree Triennali e Magistrali.

Gli Autori avranno pienamente raggiunto il loro scopo se, attraverso la lettura del libro, saranno riusciti a trasmettere il proprio entusiasmo per lo studio di una materia di base per la maggior parte delle discipline scientifiche, rendendola appassionante.

La figure inserite nel testo sono tutte realizzate con il programma di calcolo simbolico *Mathematica*, versione 7. Alcuni esercizi proposti sono particolarmente adatti ad essere risolti con *Mathematica* o con *Maple*.

Per suggerimenti, osservazioni e chiarimenti si invita a contattare gli Autori agli indirizzi e-mail: elsa.abbena@unito.it, annamaria.fino@unito.it, gianmario.gianella@unito.it.