Aoi

171

Francesco Bigolin
Sonia Mazzucchi

Esercizi di calcolo differenziale e integrale

Volume I
Funzioni di una variabile reale

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–4242-7

I edizione: settembre 2011

Indice

Prefazione

In questo volume presentiamo una ricca raccolta di esercizi ed esempi pensata per gli studenti del corso di Analisi Matematica 1 dei corsi di laurea in Matematica e Fisica. È quindi da considerare il naturale completamento del testo

G. H. Greco, *Calcolo differenziale e integrale, funzioni di una variabile reale* Vol.1, Aracne editrice 2008

che indicheremo quando necessario con [Greco] e a cui facciamo riferimento per tutta la parte teorica, seguendone l'organizzazione e la notazione.

Rispetto a [Greco] abbiamo aggiunto nei capitoli 13 e 14 alcuni esempi di applicazioni delle equazioni differenziali alla fisica; sono in più trattati, soprattutto in forma di esercizio, equazioni differenziali ordinarie non lineari (capitolo 15) e serie di Fourier (capitolo 16). In appendice abbiamo riportato delle note sui numeri di Bernoulli e sulle equivalenze asintotiche di integrali tramite il metodo di Laplace.

Abbiamo contrassegnato con (∗) gli esercizi che contengono di un livello di difficoltà superiore rispetto agli altri presenti nel testo.

Ringraziamo in modo particolarmente sentito il prof. G. H. Greco, responsabile del corso di Analisi Matematica, primo ideatore e vero promotore di questo volume, per la cura e attenzione data a molti esercizi qui proposti e per la disponibilità e il sostegno dimostrato durante lo svolgimento del corso e la stesura di questa raccolta.

Ringraziamo infine Davide Vittone e Elisa Mastrogiacomo, amici che hanno tenuto le esercitazioni negli anni accademici 2007/08 e 2008/09 e che hanno curato a loro volta alcuni esercizi presenti in questo volume.

I diritti d'autore, provenienti dalla vendita di questo testo, saranno devoluti a *Emergency* (Onlus nel 1998 e Ong nel 1999), associazione umanitaria a favore delle vittime delle guerre e della povertà.

Trento, 26 maggio 2011, Francesco Bigolin e Sonia Mazzucchi

Capitolo 1

Linguaggio matematico

1.1 Logica e connettivi logici

Ricordiamo le tabelle di verità dei seguenti connettivi logici, dove P, Q sono delle variabili:

negazione

P	$\neg P$
V	F
F	V

Congiunzione logica

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disgiunzione logica

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicazione logica

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esercizio 1.1. *Si costruiscano "le tabelle di verità" delle seguenti espressioni booleane (si determino cioè, al variare dei valori di verità delle variabili P, Q, R, i valori di verità delle seguenti espressioni booleane).*

$P \wedge \neg P$ (*principio di non contraddizione*) e $P \vee \neg P$ (*principio del terzo escluso*);

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	F	V
F	V	F	V

$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ (*modus ponens*);

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$\neg(P \wedge Q) = (\neg P \vee \neg Q)$ e $\neg(P \vee Q) = (\neg P \wedge \neg Q)$ (*leggi di De Morgan*)

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
V	V	F	F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V

$P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$

P	Q	R	$P \vee Q$	$Q \vee R$	$P \vee (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \vee R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

$\square$

Esercizio 1.2. *1. Si scrivano le negazioni delle seguenti proposizioni*

i. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \exists_{z\in\mathbb{R}}\ (x < y + z)$

ii. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ (\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y = x)\ \vee\ (\forall_{z\in\mathbb{R}}\ z > x)$

iii. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ (\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y > x^2 + 1) \wedge\ (\exists_{z\in\mathbb{R}}\ z = x)$

Soluzione:

i. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ \forall_{z\in\mathbb{R}}\ (x \geq y + z)$

ii. $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ (\forall_{y\in\mathbb{R}}\ y \neq x)\ \wedge\ (\exists_{z\in\mathbb{R}}\ z \leq x)$

iii. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ (\forall_{y\in\mathbb{R}}\ y \leq x^2 + 1) \vee\ (\forall_{z\in\mathbb{R}}\ z \neq x)$

$\square$

Esercizio 1.3. *Si analizzi l'espressione* $\dfrac{\int_1^y t\,\mathrm{d}t}{\cos[x]}$.

Soluzione: L'espressione considerata è composta da 7 simboli semplici:
$\int$ d, 1, y, t,—, cos, x.
1 è una costante,
y, x sono variabili effettive
t è una variabile apparente
cos è un simbolo monovalente
— è un simbolo bivalente
$\int$ d è un simbolo trivalente
$\int_1^y t\,\mathrm{d}t$ e $\cos[x]$ sono espressioni unarie
$\dfrac{\int_1^y t\,dt}{\cos[x]}$ è un'espressione binaria. $\square$

1.2 Elementi di insiemistica

Esercizio 1.4. *Siano A, B, C insiemi. Si dimostrino le seguenti uguaglianze tra insiemi:*

i. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(associatività);*

ii. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(distributività);*

Soluzione di *i*: $y \in A \cup (B \cup C)$ se e solo se
$(y \in A)$ oppure $(y \in (B \cup C))$ se e solo se
$(y \in A)$ oppure $((y \in B)$ oppure $(y \in C))$ se e solo se, per l'esercizio 1.1,
$((y \in A)$ oppure $(y \in B))$ oppure $(y \in C)$,
cioè $y \in (A \cup B)$ oppure $(y \in C)$, da cui $y \in (A \cup B) \cup C$.
Le altre uguaglianze si dimostrano in modo analogo. □

Esercizio 1.5. *Introdotto un insieme X, si definisce come complementare dell'insieme A in X l'insieme $A^c := X \setminus A$. Si dimostrino le seguenti uguaglianze (leggi di De Morgan):*

i. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;

ii. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Soluzione di *i*: $y \in (A \cap B)^c$ se e solo se $\neg(y \in A \cap B)$ se e solo se
$\neg(y \in A$ e $y \in B)$ se e solo se, per l'esercizio 1.1,
$\neg(y \in A)$ oppure $\neg(y \in B)$, cioè
$y \in A^c$ oppure $y \in B^c$, da cui $y \in (A^c \cup B^c)$.
L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo. □

Esercizio 1.6. *Dato un insieme X e una proprietà che dipende da $x \in X$ (vale a dire un predicato a un argomento $P[x]$), si definisca*

$$A[P] := \{x \in X : \ P[x] \ \text{è vera}\}.$$

Siano $P[x], Q[x]$ predicati a un argomento, si verifichino le relazioni

i. $A[P] \cup A[Q] \ = \ A[P \vee Q]$;

ii. $A[P] \cap A[Q] \ = \ A[P \wedge Q]$;

iii. $(\forall_{x \in X} P[x] \Rightarrow Q[x]) \iff A[P] \subset A[Q]$;

iv. $X \setminus A[P] \ = \ A[\neg P]$.

Soluzione di 1:
$x \in (A[P] \cup A[Q])$ se e solo se $(x \in A[P])$ oppure $(x \in A[Q])$ se e solo se
$P[x]$ vera oppure $Q[x]$ vera, cioè $(P \vee Q)[x]$ vera, da cui $x \in A[P \vee Q]$.
Le altre relazioni si dimostrano in modo analogo. □

Capitolo 2

Numeri reali

2.1 Proprietà dei numeri reali

Esercizio 2.1. *Siano* $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. *Si dimostri che* $a + b = \alpha + b$, *qualora* $a = \alpha$.

SOLUZIONE: Sappiamo che

$$a = \alpha. \tag{2.1}$$

Si consideri l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : x + b = a + b\}.$$

Si osservi che questo insieme contiene a, cioè

$$a \in \{x \in \mathbb{R} : x + b = a + b\};$$

perciò, grazie al *principio di Leibniz* sull'uguaglianza (vedi par. 1.4 in [Greco]), conterrà ogni elemento che sia uguale ad a; quindi da (2.1) segue che

$$\alpha \in \{x \in \mathbb{R} : x + b = a + b\};$$

dunque $\alpha + b = a + b$, come volevasi dimostrare. □

Esercizio 2.2. 0 *è l'unico elemento neutro per l'addizione.*

SOLUZIONE: Sia $\underline{0} \in \mathbb{R}$ un altro elemento neutro, cioè tale che

$$x + \underline{0} = x \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Allora abbiamo la seguente catena di uguaglianze

$$\underline{0} = \underline{0} + 0 = 0 + \underline{0} = 0; \tag{2.3}$$

la prima di queste uguaglianze è dovuta al fatto che 0 è elemento neutro (v. proprietà (6§2.1) di [Greco]), la seconda segue dalla commutatività della somma

(5§2.1) di [Greco], infine la terza segue da (2.2). In conclusione da (2.3) si ottiene che

$$\underline{0} = 0$$

grazie alla proprietà transitiva dell'uguaglianza. Quindi 0 è l'unico elemento neutro per l'addizione tra numeri reali □

Esercizio 2.3. *Si dimostri che* $x0 = 0$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Sia $x \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$x0 = x(0 + 0) = x0 + x0 \tag{2.4}$$

dove la prima uguaglianza è dovuta al fatto che 0 è elemento neutro (v. proprietà (6§2.1)) di [Greco], mentre la seconda alla proprietà distributiva (9§2.1) di [Greco]. Quindi, grazie alla transitività dell'uguaglianza da (2.4) segue che

$$x0 = x0 + x0.$$

Ora, aggiungendo $-x0$ ad entrambi i membri di questa uguaglianza, si ottiene che

$$x0 + (-x0) = (x0 + x0) + (-x0) \tag{2.5}$$

A proposito del primo membro di questa uguaglianza, dalla proprietà (7§2.1) di [Greco] sugli elementi opposti abbiamo

$$x0 + (-x0) = 0; \tag{2.6}$$

d'altra parte per quanto riguarda il secondo membro di (2.5) abbiamo

$$(x0 + x0) + (-x0) = x0 + \big(x0 + (-x0)\big) = x0 \tag{2.7}$$

grazie alla proprietà distributiva (9§2.1) di [Greco] e alla proprietà (7§2.1) di [Greco] sugli elementi opposti. In conclusione da (2.5), (2.6) e (2.7) si ottiene quanto richiesto

$$x0 = 0,$$

grazie alla proprietà transitiva dell'uguaglianza. □

Esercizio 2.4. *Verifica dell'unicità dell'opposto.*

Soluzione: Sia a un numero reale. Supponiamo che $\bar{a}$ e $\hat{a}$ siano entrambi opposti di a, cioè

$$a + \bar{a} = 0 \tag{2.8}$$

e

$$a + \hat{a} = 0. \tag{2.9}$$

Da (2.8) abbiamo

$$\hat{a} + (a + \bar{a}) = \hat{a} + 0. \tag{2.10}$$

Per quanto riguarda primo membro (2.10) abbiamo la seguente catena di uguaglianze

$$\hat{a} + (a + \bar{a}) = (\hat{a} + a) + \bar{a} = (a + \hat{a}) + \bar{a} = 0 + \bar{a} = \bar{a} + 0 = \bar{a} \tag{2.11}$$

dovute, rispettivamente, a (4§2.1), (5§2.1), (2.9), (5§2.1), (6§2.1). Quindi, grazie alla proprietà transitiva dell'uguaglianza, da (2.11) si ottiene che

$$\hat{a} + (a + \bar{a}) = \bar{a}. \tag{2.12}$$

D'altra parte per quanto riguarda il secondo membro di (2.10) si ha

$$\hat{a} + 0 = \hat{a}. \tag{2.13}$$

poiché 0 è elemento neutro per la somma. In conclusione, grazie alla proprietà transitiva dell'uguaglianza, da (2.10), (2.12) e (2.13) si ottiene quanto richiesto:

$$\bar{a} = \hat{a}.$$

Quindi l'opposto di un qualsiasi numero reale è unico. □

Esercizio 2.5. *Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$ si ha*

$$-(-x) = x \ \ e \ \ -x = (-1)x.$$

SOLUZIONE: *Verifica di* $:-(-x) = x$.

Si osservi che

$$(-x) + x = x + (-x) = 0 \tag{2.14}$$

dove la prima uguaglianza segue dalla commutatività della somma e la seconda segue dal fatto che $-x$ l'opposto di x. Ora da (2.14) si ha

$$(-x) + x = 0.$$

Perciò, dalla definizione di opposto segue che $x = -(-x)$.

Verifica di $:(-1)x = -x$.

Basta osservare che

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = 0$$

grazie a (6§2.1), (9§2.1), (7§2.1) e (B§2.1). Quindi $x + (-1)x = 0$; perciò, dalla definizione di opposto segue che $(-1)x = -x$ □

Esercizio 2.6. *Siano x, y numeri reali; a partire dagli assiomi che definiscono $\mathbb{R}$ (paragrafo* 2.1 *di [Greco]) si provi che*

i. $(-x)(-y) = xy$;

ii. $(x^{-1})^{-1} = x, \ \forall_{x\in\mathbb{R}} \ x \neq 0$;

iii. $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}, (-x)^{-1} = -(x^{-1}), \ \forall_{x,y\in\mathbb{R}} \ (x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0)$;

iv. $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$;

v. $xy = 0 \iff x = 0 \ \vee \ y = 0$;

vi. $0 < x < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} > 1$.

Esercizio 2.7. *Si dimostrino tutte le proprietà della relazione d'ordine su* $\mathbb{R}$ *elencate nel paragrafo* 2.2 *di [Greco].*

2.2 Principio di induzione

Esercizio 2.8. *(Formula di Archimede) Si utilizzi il principio di induzione per provare che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, si ha*

$$1 + \sum_{i=0}^{n} (p-1)p^i = p^{n+1} \ \textit{per ogni}\ p \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Soluzione: Sia $S := \left\{n \in \mathbb{N} : 1 + \sum_{i=0}^{n}(p-1)p^i = p^{n+1}\right\}$. Vediamo che $S = \mathbb{N}$.
I passo: $0 \in S$ infatti $1 + (p-1)p^0 = p^1$, cioè $p = p$.
II passo: $n \in S \ \Rightarrow (n+1) \in S$, infatti assumiamo che

$$1 + \sum_{i=0}^{n}(p-1)p^i = p^{n+1}, \tag{2.15}$$

allora

$$1 + \sum_{i=0}^{n+1}(p-1)p^i = 1 + \sum_{i=0}^{n}(p-1)p^i + (p-1)p^{n+1} = p^{n+1} + (p-1)p^{n+1} = p^{n+2}$$

dove la seconda uguaglianza viene da (2.15). □

Esercizio 2.9. *Utilizzando la formula di Archimede si dimostri che per* $p \neq 0$ *vale* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{p-1}{p^i} = p - \frac{1}{p^n}$.

Esercizio 2.10. *Si utilizzi il principio di induzione per provare che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, si ha*

$$\sum_{i=0}^{n} p^i = \frac{1-p^{n+1}}{1-p} \ \textit{per ogni}\ p \in \mathbb{R}, p \neq 1$$

Soluzione: Sia $S := \left\{n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} p^i = \dfrac{1-p^{n+1}}{1-p}\right\}$. Vediamo che $S = \mathbb{N}$.
I passo: $0 \in S$ infatti $p^0 = \dfrac{1-p}{1-p}$.
II passo: $(n-1) \in S \ \Rightarrow n \in S$, infatti assumiamo che

$$\sum_{i=0}^{n-1} p^i = \frac{1-p^n}{1-p}, \tag{2.16}$$

allora

$$\sum_{i=0}^{n} p^i = \sum_{i=0}^{n-1} p^i + p^n = \frac{1-p^n}{1-p} + p^n = \frac{1-p^n+p^n-p^{n+1}}{1-p} = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$$

dove la seconda uguaglianza viene da (2.16). □

Esercizio 2.11. *Si utilizzi il principio di induzione per provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha per $a \in \mathbb{R}_{++}$*

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Soluzione: Sia $S := \{n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1+na\}$. Vediamo che $S = \mathbb{N}$.
I passo: $0 \in S$ infatti $(1+a)^0 = 1 \geq 1$.
II passo: $n \in S \Rightarrow (n+1) \in S$, infatti assumiamo che

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \tag{2.17}$$

allora

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)\cdot(1+a)^n \geq (1+a)\cdot(1+na) = 1+na+a+na^2 \geq 1+(n+1)a,$$

dove la prima disuguaglianza viene da (2.17) e la seconda vale perché $na^2 \geq 0$. □

Esercizio 2.12. *Si utilizzi il principio di induzione per provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha*

$$i.\ \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \qquad ii.\ \ 2^n \geq n.$$

Esercizio 2.13 (*). *Con il simbolo $\prod_{i=1}^{n} a_i$ (definibile ricorsivamente) si denota il prodotto dei primi n termini di una successione $\{a_i\}$. Si dimostri che, dato $n \in \mathbb{N}_1$ e $\{a_i\}_{i=1}^n \subset 0 - 1$ vale la disuguaglianza*

$$\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.18}$$

Soluzione: Dimostriamo la disuguaglianza (2.18) per induzione su $n \in \mathbb{N}_1$.

Per $n = 1$ la (2.18) è soddisfatta. La validità del passo induttivo "da n a $n+1$" è data da

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) = (1-a_{n+1})\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq (1-a_{n+1})\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$$
$$= \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - a_{n+1} + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i. \qquad \square$$

2.3 Topologia di $\mathbb{R}$

Teorema 2.1. *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, vale cioè che $\forall_{x,y\in\mathbb{R},\, x<y}\exists_{q\in\mathbb{Q}} x < q < y$.*

DIMOSTRAZIONE: Ricordiamo la proprietà archimedea: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nb > a$.
I passo: dalla proprietà archimedea segue che esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < r < y - x$, infatti è sufficiente prendere $a := 1$, $b := y - x$,$r := \frac{1}{n}$.
II passo: dimostriamo l'esistenza di $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$. Sia $\bar{k} := \max\{k \in \mathbb{Z} : \; kr < x\}$. Per definizione di $\bar{k}$, abbiamo che $(\bar{k} + 1)r > x$. Vediamo che $(\bar{k} + 1)r < y$, da cui la tesi, poiché $(\bar{k} + 1)r \in \mathbb{Q}$. Se per assurdo $(\bar{k} + 1)r \geq y$, allora $\bar{k}r < x < y < (\bar{k}+1)r$, da cui $y - x < r$, che è in contraddizione con il passo I, assurdo. $\square$

Esercizio 2.14 (*). *Trovare l'errore nel ragionamento utilizzato per dimostrare la seguente proposizione:*

Sia $A := \{q \in \mathbb{Q} : \; q^2 \leq 2\}$. Non esiste $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ tale che $\bar{q} = \sup A$.
DIMOSTRAZIONE*: Sia per assurdo $\bar{q} \in \mathbb{Q}$ tale che $\bar{q} = \sup A$. Sicuramente $\bar{q} > 0$ perché $1 \in A$. Definiamo $d := 2 - \bar{q}^2$, $d \in \mathbb{Q}$ perché è differenza di numeri razionali. Osserviamo poi che per la proprietà archimedea esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \frac{8}{d}$. Consideriamo $\left(\bar{q} + \frac{1}{n}\right)$, poiché $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} < \frac{d}{8}$ e $\bar{q} < 2$, abbiamo*

$$\left(\bar{q} + \frac{1}{n}\right)^2 = \bar{q}^2 + \frac{2\bar{q}}{n} + \frac{1}{n^2} < \bar{q}^2 + \frac{2\bar{q}}{n} + \frac{d}{8} <$$

$$< \bar{q}^2 + \frac{d}{2} + \frac{d}{8} < \bar{q}^2 + d = 2.$$

Ne segue che $\left(\bar{q} + \frac{1}{n}\right) \in A$, da cui $\bar{q}$ non è un maggiorante di A, assurdo perché abbiamo assunto $\bar{q} = \sup A$.

SUGGERIMENTO: C'è qualcosa che non va nell'applicazione della proprietà archimedea....

Esercizio 2.15. *Sia $p \in N$ un numero primo. Si dimostri che non esiste $q \in \mathbb{Q}$, tale che $q^2 = p$*

SOLUZIONE: Supponiamo per assurdo che esiste $q \in \mathbb{Q}$, con $q^2 = p$. Scriviamo q come una frazione $q = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{N}$. Senza mancare di generalità possiamo supporre che a e b non siano entrambi multipli di p, altrimenti li semplifichiamo. Si ha che $p = \frac{a^2}{b^2}$, quindi $a^2 = pb^2$. Questo indica che a^2 è divisibile per p e quindi a è divisibile per p. Si ha dunque $a = p\,c$ e quindi $p^2c^2 = pb^2$, da cui $b^2 = pc^2$. Ma allora anche b^2 è divisibile per p e quindi anche b è divisibile per p. Siamo arrivati ad un assurdo, in quanto avevamo supposto che a, b non fossero entrambi multipli di p.

Esercizio 2.16. *Dimostrare che dati $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ e $b > 1$, $\exists_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $b^n > a$.*

Soluzione: Supponiamo per assurdo che $b^n \leq a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme $A := \{b^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ è superiormente limitato ed esiste $x := \sup A$. Poiché $b > 1$ abbiamo $\dfrac{x}{b} < x$. Inoltre x è il minimo dei maggioranti, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{x}{b} < b^n$, da cui $x < b^{n+1}$, ma questo è assurdo perché $x = \sup A$. $\square$

Esercizio 2.17. *Dimostrare che* $2 \ \leq \ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \ \leq \ 3.$

Soluzione: Otteniamo la prima disuguaglianza dall'esercizio 2.11 prendendo $a := \dfrac{1}{n}$. Per la seconda abbiamo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \leq 1 + 2 = 3.$$

$\square$

Esercizio 2.18. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Supposto che $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{x_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_{++}$ siano tali che $a \leq \dfrac{a_1}{x_1} \leq b$, $a \leq \dfrac{a_2}{x_2} \leq b, \ldots,$ $a \leq \dfrac{a_n}{x_n} \leq b$, si dimostri che $a \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \leq b$.*

Soluzione: Sommando le disuguaglianze $x_i a \leq a_i \leq b x_i$ (disuguaglianze vere per ipotesi!), si ha che

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \leq b \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Perciò, dividendo per $\sum_{i=1}^n x_i$, si ha quanto richiesto $a \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \leq b$. $\square$

Esercizio 2.19. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Trovare sup, inf, max, min dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:*

i. $a \relbar b := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$.

ii. $a \vdash b := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$.

iii. $a \dashv b := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$.

iv. $a \vdash\!\dashv b := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$.