

**BmPa**

Supplemento al  
**Bollettino di Matematica pura e applicata**

**Numero I – 2010**

The *Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici* of the Università di Palermo is operative from 01.01.2005. It was created thanks to the will of the all the professors of the mathematical area of the Facoltà di Ingegneria. Both the scientific and didactic activity of the *Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici* can be found in the web-site [www.dmmm.unipa.it](http://www.dmmm.unipa.it). From its constitution it has been involved in many collaborations with Italian and foreign researchers. The aim of this Bollettino, with annual periodicity, is that of covering the areas of mathematics existing at the *Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici*. The papers emphasize the advances of knowledge in mathematics problems and new applications. The *Bollettino di Matematica pura e applicata* comprehend the following sectors: Analysis, Geometry, Mathematical Physics, Probability... and it is also open to the contribution of the other Italian or stranger researchers.

Editors Tommaso Brugarino, Maria Stella Mongiovì.

Editorial Committee

Pietro Aiena (Palermo)  
S. Twareque Ali (Montreal)  
Maria Letizia Bertotti (Bolzano)  
Luis Funar (Grenoble)  
Renata Grimaldi (Palermo)  
David Jou (Barcelona)  
Valentin Poenaru (Paris-Sud)  
Karl Strambach (Erlangen)

Supplemento al

# Bollettino di Matematica pura e applicata

Numero I – 2010

Convegno internazionale di Geometria  
in onore del 60° compleanno della prof.ssa Renata Grimaldi  
Palermo, 15–16 giugno 2010

Editors  
Tommaso Brugarino  
Maria Stella Mongiovì



Copyright © MMXI  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracneeditrice.it](http://www.aracneeditrice.it)  
[info@aracneeditrice.it](mailto:info@aracneeditrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133/A-B  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-3832-1

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: febbraio 2011

## Indice

<i>Prefazione</i> .....	i
Intervento del prof. Tommaso Brugarino, Direttore del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici .....	ii
Intervento del prof. Francesco Paolo La Mantia, Preside della Facoltà di Ingegneria .....	iii
Intervento del prof. Vincenzo Ancona, Presidente Istituto Nazionale di Alta Matematica .....	iv
Valentin Poénaru <i>Renata Grimaldi: trenta anni di Matematica fra Palermo e Parigi</i> .....	1
Pierre Pansu <i>Renata Grimaldi et son activité scientifique en Géométrie Riemannienne</i> .....	7
Vincenzo Ancona, Bernard Gaveau <i>Some properties of holomorphic cohomology groups on complex spaces</i> .....	13
Sylvestre (Sylvain) Gallot <i>Margulis Lemmas without curvature</i> .....	27
Giorgio Patrizio, Andrea Spiro <i>Modular Data for Stein Manifolds with Special Monge-Ampère Exhaustions</i> .....	39
Daniele Ettore Otera <i>La propriété de Tucker pour les groupes et les variétés: un survol</i> .....	53
Stefano Nardulli <i>Generalized existence results for the isoperimetric problem in Riemannian manifolds</i> .....	63
Emilio Musso <i>Linear Control Systems and Invariant Variational Problems</i> .....	69
G. Besson, L. Bessières and S. Maillot <i>Ricci flow on open 3-manifolds and positive scalar curvature</i> .....	87
Alessandro Silva <i>Problemi di Analisi sulle Correnti e Applicazioni Geometriche</i> .....	95

## PREFAZIONE

L'idea di organizzare un Convegno Internazionale di Geometria dedicato a Renata Grimaldi per il suo 60° compleanno, dovuta a V. Poénaru dell'Université de Paris-Sud, è stata accolta con entusiasmo dai colleghi T. Brugarino, S. Nardulli e C. Tanasi.

Illustri matematici italiani e francesi hanno accettato molto volentieri l'invito ad esporre al Convegno i risultati recenti delle loro ricerche: tutti hanno preso parte al Convegno.

I lavori iniziavano la mattina del 15 giugno 2010 nell'elegante *Aula del Consiglio di Facoltà di Ingegneria*. Nella Seduta inaugurale, (con più di 60 partecipanti) il Direttore del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici, Tommaso Brugarino, dava il benvenuto ai presenti, il Preside della Facoltà di Ingegneria, Francesco Paolo La Mantia, indirizzava ai Convegnisti parole di auguri a nome del Magnifico Rettore e, infine, il Presidente dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica di Roma, Vincenzo Ancona, portava il saluto dell'INDAM e teneva un breve discorso sulle donne in Matematica. I lavori si concludevano il 16 giugno.

Un vivo ringraziamento alla Presidenza della Facoltà di Ingegneria per avere ospitato i lavori del Convegno e all'Università degli Studi di Palermo per il contributo finanziario.

Il ringraziamento va esteso anche all'Università dell'Aquila, all'Université di Grenoble e all'Université de Paris-Sud che pure hanno contribuito alla manifestazione. Particolare gratitudine va agli insigni conferenzieri e a tutti i colleghi matematici, fisici e ingegneri che con la loro presenza hanno contribuito alla riuscita del Convegno per il 60° compleanno di Renata Grimaldi.

Ringraziamenti pure all'Editorial Board del Bollettino di Matematica pura e applicata per avere deciso di pubblicare gli Atti del Convegno.

Il Comitato Organizzatore

V. Poénaru (Chairman), T. Brugarino, S. Nardulli, C. Tanasi

Cari amici, cari colleghi,  
quando qualche mese fa il prof. Poénaru mi telefonò per chiedermi la disponibilità del Dipartimento a ch  si organizzasse un convegno internazionale in onore della collega prof. Renata Grimaldi, diedi immediatamente la disponibilit ; tuttavia, per , dopo esserci salutati un leggero sgomento mi prese. Pensavo, infatti, come si poteva, con le note ristrettezze con cui siamo costretti ad operare, organizzare un convegno di respiro veramente internazionale? Sgomento che   venuto meno quando, incominciando, si   passati alla fase operativa. In breve tempo abbiamo avuto, infatti, la pi  ampia disponibilit  di colleghi e strutture per la buona riuscita del Convegno, in particolare: la collaborazione della Facolt , che nella persona del Preside ha concesso l'uso dell'aula del Consiglio, l'Ateneo che ha voluto sostenere finanziariamente il Convegno nell'ambito delle attivit  culturali, ma soprattutto, la disponibilit , raccolta grazie al prof. Poénaru, a partecipare dei prestigiosi conferenzieri che con la loro presenza sicuramente garantiranno una caratura di tutto rilievo al Convegno e per ultimo ma non ultimo l'impegno del dott. Nardulli che si   occupato degli aspetti pi  pratici, ma non meno importanti, per la riuscita del Convegno. A tutti loro va il mio pi  vivo ringraziamento.

Anche se altri metteranno a fuoco alcuni punti della personalit  didattica e scientifica della collega Renata, qui mi piace ricordare che la prof.ssa Grimaldi fa parte del gruppo di matematici che svolge la sua attivit  in Facolt  di Ingegneria da circa venti anni e che in questi anni si   distinta sia per la sua capacit  di iniziare alla ricerca scientifica i giovani sia per l'ottimo rapporto che ha saputo instaurare con gli allievi ingegneri.

Nell'augurare, a nome del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici e mio personale, a tutti voi che il soggiorno a Palermo risulti piacevole, mi auguro un felice svolgimento del Convegno e che, fra dieci, venti, trenta anni, ... ci si possa nuovamente incontrare per festeggiare i settanta, gli ottanta, i novanta anni, ... della nostra collega Renata Grimaldi.

Direttore del Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici  
prof. Tommaso Brugarino



Signore e Signori,  
è per me motivo di viva soddisfazione poter dare, a nome del Magnifico Rettore dell'Università degli Studi di Palermo, impossibilitato a intervenire, e di tutta la Facoltà di Ingegneria, il benvenuto ai partecipanti al Convegno Internazionale di Geometria dedicato alla nostra collega Renata Grimaldi in onore del suo 60° compleanno.

Gli ospiti presenti sono studiosi di una disciplina, la *Matematica*, che ha dato notevoli e fondamentali contributi al progresso dell'Ingegneria.

L'insegnamento della Matematica nella Facoltà di Ingegneria ha una importanza strategica per lo sviluppo del pensiero creativo degli allievi ingegneri ed è importante sottolineare qui che la professoressa Grimaldi, nelle schede di valutazione della didattica da parte degli studenti, ha sempre ottenuto valutazioni molto positive.

Per concludere, nella speranza che il soggiorno a Palermo sia gradevole, auguro a tutti il più felice svolgimento dei lavori del Convegno.

Preside della Facoltà di Ingegneria  
prof. Francesco Paolo La Mantia

Partecipo a questa conferenza in onore di Renata principalmente come amico di antica data, suo e della sua famiglia, e soprattutto come estimatore, anzi ammiratore. Ho ammirato la sua determinazione, il suo impegno, la sua voglia di migliorarsi sempre e comunque. È noto che il *glass ceiling*, il tetto di cristallo, che impedisce alle donne di affermarsi pienamente specie nei piani più alti della loro carriera, appare in maniera non trascurabile nel mondo accademico italiano e anche nella matematica. Mentre a livello di ricercatori e associati di materie matematiche la presenza femminile corrisponde a circa la metà, fra i professori ordinari la percentuale scende a meno del diciassette per cento. Le difficoltà, le incomprensioni che Renata ha dovuto superare nella sua carriera con fatica doppia, nascono dal suo personale tetto di cristallo. Ma la rottura di questo personale tetto le ha dato, paradossalmente, una carica di entusiasmo, di vitalità, di voglia di lavorare che la mantiene giovanissima e attivissima.

Tanti auguri Renata!

Presidente INDAM (Istituto Nazionale di Alta Matematica)  
Prof. Vincenzo Ancona

# Renata Grimaldi: trenta anni di Matematica fra Palermo e Parigi

Valentin Poénaru

Professeur Émerite - Université Paris-Sud 11 (France)  
E-mail: valpoe@hotmail.com

Mon intervention sera en italien, en espérant que mes collègues et amis français ici présents n'auront pas trop de mal à me comprendre.

È un grande piacere per me essere qui con voi, in qualità di Chairman di questo Convegno Internazionale di Geometria che, tra oggi e domani, si svolge a Palermo, dedicato a Renata Grimaldi in onore del suo 60° compleanno.

Gli amici matematici italiani e stranieri presenti, che hanno aderito immediatamente e volentieri alla nostra iniziativa, hanno sempre apprezzato, di Renata, il grande entusiasmo, la notevole passione e l'impegno costante per la ricerca matematica che coinvolge e appassiona tutti noi.

Nata a Termini Imerese (Palermo) nel 1950, si laurea in Matematica con Lode, a Palermo nel 1972. Già destinataria di borsa di studio del CNR da laureanda, dopo la laurea rimane all'Università di Palermo con un contratto ministeriale e assegnata alla Cattedra di Analisi Matematica.

Il grande interesse suscitato in lei dall'attività di ricerca internazionale di Claudio Buzzanca con André Avez e André Lichnerowicz a Parigi, la stimola a dedicarsi con intensità sempre maggiore allo studio dei fondamenti della Geometria Differenziale, sotto la direzione di Buzzanca e coadiuvata dal collega Giancarlo Passante.

Così, nel 1981, frequenta il mio Corso di *Topologia Differenziale e Teoria delle Foliazioni* tenuto all'Università di Palermo per un mese, essendo io, già da qualche anno, invitato regolarmente come "Visiting Professor" da Corrado Tanasi, e comincia a dedicarsi, assieme a Passante, ai problemi di ricerca da me proposti e ad effettuare soggiorni di studio e ricerca all'Université de Paris-Sud.

Non vorrei dimenticare qui di parlare di Valeria Grimaldi, prematuramente scomparsa, giovane e promettente matematica a Palermo, moglie di Corrado Tanasi e cugina di Renata, che ci ha presentati.

Da subito osservai in Renata il matematico molto dotato che poteva bene inserirsi nel mio ambito di ricerca, la Topologia Differenziale, a quel tempo, a Palermo, quasi sconosciuto. La velocità con la quale Renata impara le moderne tecniche di ricerca matematica avanzata e i ritmi di lavoro intensi la portano a produrre un numero di pubblicazioni scientifiche di qualità molto elevata e di alta competitività a livello internazionale. I colloqui di lavoro tra noi si intensificano non solo per le mie visite annuali a Palermo ma anche per i soggiorni di ricerca a Parigi che Renata effettuerà tutti gli anni e fino ad oggi.

L'attività di ricerca ma soprattutto la vivace curiosità scientifica non disgiunta dalla sua naturale DOTE di stringere e coltivare amicizie, la inducono a varie frequentazioni in qualificati e prestigiosi centri di ricerca parigini quali il *Collège de France*, l'*École Polytechnique*, l'*IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques)* dove incontra spesso grandissimi matematici come André Lichnerowicz, già conosciuto a Palermo, Marcel Berger e Misha Gromov con i quali intavola conversazioni scientifiche sui possibili sviluppi delle ricerche in corso, instaurando anche con loro cordiali e amichevoli rapporti.

Di fondamentale importanza nello sviluppo dell'attività scientifica di Renata in Francia saranno, da allora in avanti, la fiducia e l'incoraggiamento che l'anziano e compianto Professore Lichnerowicz non le faceva mai mancare. Non meno incisiva era l'affabile e signorile accoglienza che la di lui moglie, la gentile Signora Susa, riservava a Renata e famiglia ad ogni loro incontro.

Intanto è proprio Marcel Berger, allora Direttore dell'IHES, a indirizzare Renata, ponendole nuovi problemi di ricerca, verso un giovanissimo e brillante allievo di Gromov, Pierre Pansu: inizia così una proficua collaborazione scientifica, che dura ancora oggi, su importanti temi di Geometria Riemanniana, di cui parlerà dopo lo stesso Pansu.

Nel 1984 Renata diventa Ricercatrice alla Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali di Palermo, nel 1992 vince il Concorso di Professore Associato di Geometria presso la Facoltà di Ingegneria di Palermo, e dal 2001 è Professore Ordinario presso la stessa Facoltà.

Ai soggiorni parigini aggiunge, naturalmente, la partecipazione a importanti Convegni Internazionali, oltre che in Italia, a Marsiglia, Strasburgo, Grenoble e nella stessa Parigi, e poi anche in Germania, Romania etc.

Una delle caratteristiche della personalità matematica di Renata è stata la sua capacità di interagire con altri matematici e di riuscire a creare una rete importante di collaborazioni e amicizie matematiche, in Italia e all'estero. Un certo numero di matematici con i quali Renata ha interagito sono già stati nominati nel mio breve discorso; di certo non posso fare qui l'elenco di tutti gli altri. A parte i conferenzieri presenti a questo Colloquio, vorrei citare ancora una volta André Lichnerowicz, Marcel Berger, Misha Gromov, Jean-Pierre Bourguignon, Edoardo Vesentini e François Labourie, ma ve ne sono ancora molti altri... Più recente è la collaborazione con l'Université de Grenoble, in particolare con Louis Funar, ora "Directeur de Recherche" al CNRS, e anche con Gérard Besson e Sylvain Gallot, qui presenti.

Per molti anni Renata ha fatto parte del “Progetto Nazionale di Geometria Complessa e Differenziale” coordinato da Vincenzo Ancona di Firenze, partecipando sempre alle riunioni dei Coordinatori Locali, e del G.N.S.A.G.A. (*Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e le loro Applicazioni*) diretto da Giorgio Patrizio di Firenze.

Renata è stata organizzatrice, a Palermo, con la collaborazione attiva del collega Michele de Franchis, amico, consigliere e sostenitore, di diversi Convegni Internazionali il primo dei quali, con circa 120 partecipanti da tutto il mondo, dedicato alla memoria di Franco Tricerri.

È stata pure Coordinatore Scientifico di vari Progetti Italo-Francesi, ha fatto parte, di recente, del Collegio dei Docenti del Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Automazione, ed è membro del Comitato di Redazione del BOLLETTINO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Accenno ora, sinteticamente, all'opera scientifica giovanile di Renata riguardante la *Teoria Geometrica delle Foliazioni*. Molti di questi risultati sono pubblicati sui *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, sul *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, che è la rivista del Collège de France, e sui *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* di Roma.

Innanzitutto voglio fare alcuni richiami sulle foliazioni e, per non complicare troppo le cose, vorrei limitarmi al caso importante delle foliazioni  $\mathcal{F}$  di codimensione uno. Si tratta di un tipo speciale di atlanti su una varietà differenziabile  $V^n$ . Le carte di questo atlante sono parametrizzate da  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , unione di placche  $y \times \mathbb{R}^{n-1}$ , per diversi valori di  $y \in \mathbb{R}$ . Le trasformazioni di coordinate locali sono soggette alla condizione di conservare le placche. Con questa struttura,  $V^n$  si spezza in una decomposizione disgiunta di foglie  $L^{n-1}$  contenute in  $V^n$ , unioni massimali connesse di placche.

Dal punto di vista astratto, una foglia  $L^{n-1}$  è una varietà differenziale di dimensione  $n - 1$ , forse aperta (cioè non-compatta) ma l'inclusione della foglia nella varietà non è necessariamente propria.

Questo tipo di strutture sono una generalizzazione naturale dei sistemi dinamici che sono, essenzialmente (più o meno), delle foliazioni di dimensione uno (ma ricordatevi che io parlo qui di quelle di codimensione uno, e lasciatemi anche non discutere il mio “più o meno”).

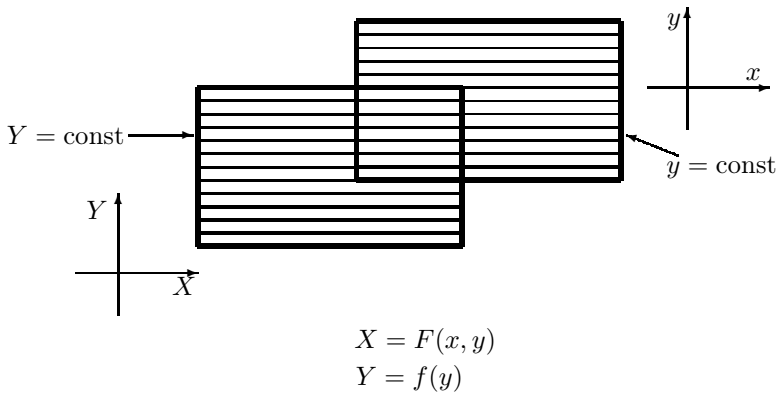


FIGURA 1: L'atlante di  $(V^n, \mathcal{F})$

Le foliazioni, la cui struttura globale può essere molto complicata, sono già implicate nei lavori di Frobenius e di Elie Cartan, ma è solamente alla fine degli anni quaranta che Charles Ehresmann e Georges Reeb le tirano veramente fuori alla luce del giorno.

Il discorso fatto fino a questo momento ha riguardato esclusivamente la topologia differenziale. Poi, nel 1980, Dennis Sullivan e Anthony Phillips osservano che qui si nasconde anche un discorso riemanniano.

Fissiamo una varietà compatta  $V^n$ , e sia  $g$  una qualsiasi metrica riemanniana definita su di essa. Ogni foglia  $L^{n-1}$  eredita naturalmente, a partire dalla metrica  $g$ , una metrica riemanniana completa, che, modulo quasi-isometrie, dipende solamente dalla varietà  $V^n$  e dalla foliazione  $\mathcal{F}$  e NON dalla metrica  $g$ . Quando  $L^{n-1}$  stessa è non-compatta, questa geometria (detta *asintotica*) è un qualcosa di certamente non banale: questo è stato il soggetto dei lavori di Renata, nella prima parte della sua carriera scientifica.

Voglio fare a questo punto una panoramica certamente schematica e non completa dei risultati da lei ottenuti.

In un primo tempo, si è trattato di individuare dei casi importanti di geometria asintotica corrispondenti alla tricotomia classica della curvatura sezionale: uguale a zero, strettamente maggiore di zero, minore o uguale a zero ( $K=0$ ,  $K>0$ ,  $K\leq 0$ ).

Per le foglie di una foliazione lineare irrazionale del toro  $T^n$ , la geometria asintotica è sempre quella di  $\mathbb{R}^{n-1}$  euclideo, dunque con  $K = 0$ . Successivamente, in alcuni lavori a doppio nome, Renata e Giancarlo Passante hanno provato i seguenti risultati:

1. Per la famosa foliazione di Reeb della sfera  $S^3$ , una foglia  $L^{n-1}$  non-compatta non è mai quasi-isometrica ad un  $(\mathbb{R}^2, \delta)$  con  $K(\delta) \leq 0$  dappertutto (ovvero  $K > 0$  deve essere presente in qualche punto). È interessante osservare che, per mostrare questo risultato, dei risultati di Osserman sulle disuguaglianze isoperimetriche sono necessari.

2. Se  $V^3$  è il fibrato unitario tangente di una superficie iperbolica chiusa, e  $\mathcal{F}$  è una delle due corrispondenti foliazioni di Anosov, allora, almeno genericamente, la foglia  $L^{n-1}$  ha la geometria del piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$ . Renata e Passante hanno studiato anche il caso non-generico (*eccezionale*), dove trovano il cilindro non-euclideo.

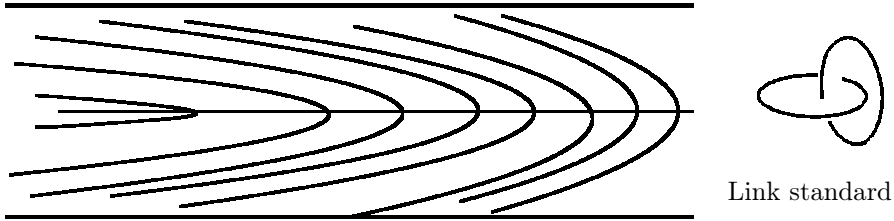


FIGURA 2: Sezione di una foliazione di  $\mathbb{R} \times D^2$ . La **foliazione di Reeb** si ottiene considerando la sfera  $S^3$  come unione di due tori solidi incollati lungo un toro  $T^2$ . I due tori solidi sono, come in figura, fogliettati internamente, in codimensione 1, mentre il toro  $T^2$  forma una foglia ulteriore. Incollando, secondo il link standard, due esemplari del toro quoziente  $(\mathbb{R} \times D^2)/\mathbb{Z}$ , si ottiene la sfera  $(S^3, \mathcal{F})$  di Reeb.

In altri lavori successivi Renata ha mostrato la non esistenza di *cusps* per la geometria asintotica delle foglie, ha studiato il caso dei *nodì fibrati* (un soggetto proposto a lei da Bruce Reinhart), e le foliazioni associate ad un fibrato con gruppo strutturale discreto.

Si tratta qui di un insieme di lavori molto interessanti, su un soggetto a cavallo fra la topologia differenziale e la geometria riemanniana.

In maniera molto naturale, da qui, gli interessi di Renata si sono spostati verso la geometria riemanniana globale, la crescita delle metriche ed altri soggetti analoghi. Ma qui lascio la parola a Pierre Pansu.

Vorrei, infine, terminare con considerazioni di carattere personale ma che rappresentano, sono sicuro, il pensiero di tutti i colleghi matematici che hanno avuto il privilegio di essere invitati a Palermo: la affettuosa accoglienza e la perfetta ospitalità di Renata Grimaldi e della sua famiglia sono sempre state ben lontane dal comune e apprezzate da tutti.

Mi faccio portavoce di noi tutti qui presenti per augurare a Renata molti anni di attività professionale e molti futuri successi.

Grazie Renata, MERCI BEAUCOUP!

## Riferimenti bibliografici

- [1] R. Grimaldi, *The asymptotic geometry of the leaves of a foliation*. (Italian) Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 32 (1983), no. 2, 199–207.

- [2] R. Grimaldi and G. Passante, *The asymptotic geometry of the leaves of a foliation.* II. (Italian) Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 118 (1984), no. 1-2, 97–100.
- [3] R. Grimaldi and G. Passante, *La géométrie asymptotique pour les feuilletages d'Anosov.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 300 (1985), no. 9, 275–276.
- [4] R. Grimaldi and G. Passante, *The asymptotic geometry of Anosov foliations.* (Italian) Boll. U.M.I. Sez. A (6) 5 (1986), no. 3, 321–329.
- [5] R. Grimaldi, *Non-existence of cusps in the asymptotic geometry of leaves.* (Italian) Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 80 (1986), no. 5, 292–297.
- [6] R. Grimaldi and G. Passante, *La géométrie asymptotique des feuilles “exceptionnelles” des feuilletages d'Anosov.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305 (1987), no. 3, 85–87.
- [7] R. Grimaldi and G. Passante, *The asymptotic geometry of the “exceptional” leaves of Anosov foliations.* (Italian) Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1988), 345–358.
- [8] R. Grimaldi, *Géométrie asymptotique et noeuds fibrés.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 309 (1989), no. 17, 933–936.
- [9] R. Grimaldi, *Géométrie asymptotique et fibrés à groupe structural discret.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 311 (1990), no. 6, 347–349.
- [10] R. Grimaldi, *Noeuds et links fibrés et géométrie asymptotique de feuilles.* Riv. Mat. Univ. Parma (4) 17 (1991), 149–158.
- [11] R. Grimaldi, *Fibrés à groupe structural discret, revêtements et géométrie asymptotique de feuilles.* Rev. Roum. Math. Pures Appl. 38 (1993), no. 3, 267–273.



# Renata Grimaldi et son activité scientifique en Géométrie Riemannienne

Pierre Pansu

École Normale Supérieure,  
DMA-ENS 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France  
E-mail : pansu@dma.ens.fr

## Résumé

On présente le programme développé par Renata Grimaldi en géométrie riemannienne et quelques résultats obtenus.

---

AMS MSC 53C20

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Motivation</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Croissance</b>	<b>8</b>
3.1	Croissance dans une classe conforme . . . . .	9
3.2	Croissance linéaire et géométrie bornée . . . . .	9
3.3	Types de croissance géométriquement bornés . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Isopérimétrie</b>	<b>10</b>
4.1	Profils dans une classe conforme . . . . .	11
4.2	Profils lisses et à géométrie bornée . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>12</b>
	<b>Références</b>	<b>12</b>

## 1 Introduction

Le premier article de Renata Grimaldi,

*Ricci curvature and spectral properties of the tangent sphere bundle of surfaces.*  
 Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **40** (1982),  
 porte sur la géométrie riemannienne.

Depuis, tous ses travaux comportent une composante riemannienne. Ils se divisent grossièrement en trois parties,

- Géométrie des feuilles des feuilletages (1983 à 1993) ;
- Sous-variétés des variétés complexes (1989 à 1995) ;
- Croissance et isopérimétrie (1988 à aujourd’hui).

Je n’évoquerai que la troisième partie.

## 2 Motivation

Les feuilles des feuilletages des variétés compactes héritent de métriques riemanniennes induites par la variété ambiante. Ces métriques

- sont à géométrie bornée ;
- sont deux à deux quasi-isométriques.

**Définition 1.** *Une variété riemannienne  $M$  est à géométrie bornée s’il existe des constantes  $r > 0$  et  $L$  et pour tout  $x \in M$ , un difféomorphisme  $L$ -bilipschitzien de la boule  $B^M(x, r)$  sur la boule euclidienne  $B^e(0, r)$ .*

*Deux variétés riemanniennes  $M$  et  $M'$  sont quasiisométriques s’il existe des constantes  $C$  et  $L$  et des applications  $f : M \rightarrow M'$  et  $f' : M' \rightarrow M$  telles que, pour tous  $x, y \in M$ ,  $x', y' \in M'$ ,*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq L d(x, y) + C, & d(f'(x'), f'(y')) &\leq L d(x', y') + C, \\ d(f' \circ f(x), x) &\leq C, & d(f \circ f'(x'), x') &\leq C. \end{aligned}$$

Cela conduit Renata Grimaldi à

- étudier des invariants de quasiisométrie des variétés riemanniennes ;
- se demander quelles valeurs ils peuvent prendre ;
- se demander quelles valeurs ils peuvent prendre parmi les métriques à géométrie bornée.

## 3 Croissance

La *croissance* d’une variété riemannienne connexe  $M$  en un point  $x$ , c’est le volume des boules,  $vol(B^M(x, r))$ , vu comme une fonction  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Seul son *type de croissance* est un invariant de quasiisométrie (et est indépendant de  $x$ ).

**Définition 2.** *Deux fonctions  $u$  et  $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ont même type de croissance s’il existe une constante  $A$  telle que pour tout  $r > 0$ ,*

$$v(r) \leq Au(Ar + A) + A, \quad u(r) \leq Av(Ar + A) + A.$$