A02

61

Armando Tivelli

ARGOMENTI DI RELATIVITÀ

TEORIA E ESERCIZI

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–3727–0

I edizione: dicembre 2010

Indice

Cap.4 – Relatività e elettromagnetismo

Cap.5 – Aspetti di Relatività Generale

Cap.6 – Approfondimenti

Cap.7 – Soluzione degli esercizi proposti

Presentazione

I testi che trattano la Teoria della Relatività, a causa della sua complessità anche formale, sono in genere di livello decisamente specialistico o propongono sintesi di livello sostanzialmente divulgativo.

In queste pagine ho tentato un (non semplice) approccio "intermedio", realizzando un libro che auspico possa essere fruibile in buona parte anche da studenti dell'ultimo anno delle scuole secondarie superiori (di norma, con l'eccezione di parte del capitolo dedicato agli approfondimenti) oltre che costituire un utile strumento di supporto per i docenti di Fisica delle medesime scuole.

Dunque, attingendo liberamente e ampiamente alle fonti citate nelle referenze, cui si rimandano comunque i lettori che volessero approfondire o completare quanto qui trattato, ho cercato di sviluppare in modo organico gli argomenti e di esporli graduando le difficoltà, utilizzando strumenti matematici che consentissero di coniugare in modo abbastanza equilibrato il rigore formale con la fruibilità del testo. Per far ciò ho anche esplicitamente rappresentato, in misura che ritengo adeguata, la formalizzazione matematica (cioè i "passaggi" necessari per ricavare determinate formule). In ogni caso, poichè nella trattazione sono utilizzati aspetti del calcolo vettoriale e del calcolo differenziale, è auspicabile che il lettore possegga almeno competenze di base sulle operazioni con i vettori e sul calcolo delle derivate.

Ritengo opportuno ribadire che, essendo la Teoria della Relatività una teoria ormai ben consolidata, questo scritto non ha particolari pretese di originalità. Anche gli esercizi, cui è dedicata una parte rilevante dell'opera, sono in parte ormai "tipici" e/o presenti anche in altri testi: tuttavia in questo tutti gli esercizi che ho proposto sono discussi e risolti, nell'auspicio che ciò faciliti nel lettore la riflessione e la comprensione dei concetti trattati.

L'opera è strutturata in quattro parti:

− la Relatività Ristretta, trattata in modo abbastanza ampio e dettagliato: la trattazione teorica è sempre accompagnata da alcuni esercizi risolti e da un certo numero di esercizi proposti al lettore;

− una panoramica molto sintetica su alcuni aspetti significativi della Relatività Generale;

− alcuni approfondimenti (questo capitolo presenta le maggiori difficoltà dal punto di vista matematico, ed è stato redatto per agevolare – almeno in parte – il lettore desideroso di approfondire immediatamente alcuni aspetti dei concetti affrontati);

− le soluzioni di tutti gli esercizi proposti.

Per concludere, spero che questo scritto, pur con le sue inevitabili imprecisioni od errori, possa comunque contribuire ad accrescere nel lettore il gusto della conoscenza.

\- - - - - - - - - - - - - - - -

Cap. 1 – Le trasformazioni di Galilei e la fisica classica

1.1 – **Sistemi di riferimento**

E' certamente noto a tutti, anche per esperienza comune, che quando si parla di movimento di un punto materiale o di un corpo rigido bisogna – per poter interpretare correttamente quello che sta avvenendo – stabilire in anticipo "rispetto" a che cosa il corpo si sta muovendo. Ciò significa individuare un "riferimento" rispetto cui studiare i fenomeni fisici che ci interessano.
Per tale motivo in tutti i testi di Fisica si introduce il concetto di "sistema di riferimento", intendendo con ciò individuare un sistema di tre assi cartesiani, che noi prenderemo sempre ortogonali, ed un insieme di orologi sincronizzati atti a determinare le coordinate spaziali e temporale di ogni evento fisico. Il sistema di riferimento è poi definito "inerziale" se in esso vale il principio di inerzia, ossia se rispetto ad esso il moto libero dei corpi (cioè di corpi non soggetti ad interazioni o soggetti ad interazioni con risultante nulla) avviene a velocità costante. Si stabilisce che siano inerziali quei sistemi di riferimento S° che si ottengono ponendo l'origine in una stella fissa con gli assi orientati verso altre stelle fisse.

Poiché lo spazio fisico viene assunto omogeneo[1] ed isotropo[2] ed il tempo omogeneo, le leggi della meccanica sono indipendenti sia da traslazioni nello spazio e nel tempo che da rotazioni nello spazio del sistema di riferimento: di conseguenza il sistema di riferimento può essere collocato ed orientato in modo arbitrario e l'orologio può essere azzerato in un qualsiasi istante. Quindi, dato un sistema inerziale S°, sono pure inerziali sia tutti gli altri possibili sistemi ottenuti da S° per traslazione nello spazio e nel tempo o per rotazione nello spazio, sia tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. Non sono invece inerziali, cioè in essi non vale il principio di inerzia, tutti i sistemi di riferimento in moto accelerato rispetto al sistema inerziale S° (per brevità d'ora in poi il termine "sistema di riferimento inerziale" sarà indicato anche con l'acronimo SRI).

In genere prenderemo in considerazione due terne di assi cartesiani ortogonali, una di origine O (Oxyz), che può essere ipotizzata fissa, e una di origine O' (O'x'y'z') in

[1] OMOGENEITA' dello spazio/tempo : significa che tutti i punti dello spazio o tutti gli istanti di tempo sono equivalenti (ciò implica anche che lo stesso esperimento effettuato in posti o in tempi diversi fornisca lo stesso risultato, nel limite degli errori di misura).

[2] ISOTROPIA dello spazio : cioè indipendenza dalla direzione. Significa che non ci sono direzioni privilegiate nello spazio.

moto con velocità[3] **u** rispetto al sistema di riferimento fisso: si definisce "moto di trascinamento" il moto della terna mobile O'x'y'z' rispetto a quella fissa Oxyz (in seguito indicheremo i sistemi di riferimento anche semplicemente con l'origine della terna di assi cartesiani).
Quello che abbiamo appena detto ci consente di definire efficacemente cosa si intende per "evento fisico": si tratta di un fatto specifico che viene individuato tramite l'assegnazione di una posizione nello spazio e nel tempo, rispetto ad un determinato sistema di riferimento. Ogni evento fisico può quindi essere rappresentato con una quaterna di coordinate, di cui tre spaziali[4] ed una temporale: (x,y,z,t).

►►*APPROFONDIMENTO*

Tenendo conto della definizione appena data di sistema di riferimento, ci chiediamo se la Terra rappresenti un sistema di riferimento inerziale.

Poiché la Terra compie un moto di rivoluzione attorno al Sole e un moto di rotazione attorno al proprio asse, si deduce subito che un sistema solidale con la Terra si muove accelerando rispetto alle stelle fisse, e pertanto **non è inerziale**.
Ricordiamo che il moto di rotazione è il movimento che la Terra compie attorno al proprio asse, ruotando da Ovest ad Est. Per misurare il tempo di rotazione "vero" bisogna considerare il giorno sidereo, cioè il tempo intercorso tra due passaggi consecutivi di una stella fissa su un determinato meridiano. La sua durata è di 23h 56' 4", inferiore quindi di circa 4' alla durata del cosiddetto giorno solare medio, che rappresenta l'intervallo di tempo tra due passaggi successivi del Sole sullo stesso meridiano.
Ciò premesso, possiamo calcolare l'accelerazione "centrifuga" dovuta alla rotazione terrestre: essa è diretta verso l'esterno della Terra, e si può dimostrare che è sempre

---

[3] Di norma le grandezze vettoriali saranno in seguito indicate usando simboli in **grassetto** (ad es.: **a**, **v**, **p**, …), i loro moduli usando simboli in scrittura normale (ad es.: a, v, p, …).

[4] Ricordiamo che ogni vettore **V** può essere espresso come la somma vettoriale di altri vettori: questi ultimi sono detti componenti di **V**. L'utilizzazione di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale consente di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i vettori dello spazio ordinario e "terne di componenti" cartesiane dei vettori medesimi, ottenute proiettando il vettore **V** sugli assi coordinati: pertanto i vettori potranno in seguito essere espressi nella forma $\mathbf{V}=(V_x,V_y,V_z)$ ovvero in quella equivalente $\mathbf{V}=V_x\mathbf{i}+V_y\mathbf{j}+V_z\mathbf{k}$, ove **i**,**j**,**k** sono i versori degli assi x,y,z.
Naturalmente la componente del vettore **V** nella direzione di un versore, ad esempio **i**, è data dal loro prodotto scalare, cioè $V_x=\mathbf{V}\cdot\mathbf{i}$.

Cap. 3 – La meccanica relativistica

3.1 – **Introduzione**

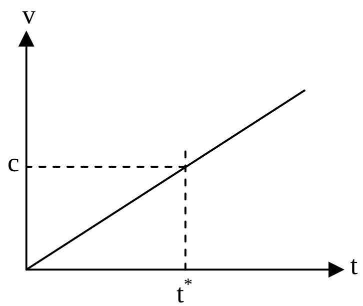
Nei capitoli precedenti è stato chiaramente evidenziato come nella relatività di Einstein sia il tempo che le distanze sono concetti relativi al sistema di riferimento rispetto al quale vengono effettuate le misure. Fin qui, tuttavia, non è mai stata presa in considerazione la massa delle particelle, o dei corpi complessi, in movimento.
A tal proposito ricordiamo che la seconda legge della dinamica collega il cambiamento di velocità di un corpo di massa m all'azione di forze esterne **F**, secondo la ben nota relazione **F**=m**a** : in tale formulazione, di norma, si suppone tacitamente che la massa sia costante nel tempo. Ora ipotizziamo di applicare una forza **F** di intensità costante ad un corpo di massa m, inizialmente in quiete rispetto ad un determinato SRI. La velocità con cui il corpo si muove è notoriamente descritta dalle equazioni cinematiche seguenti:

$$\mathbf{a}_t = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\mathbf{v} = \mathbf{a_t}dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int_0^{\mathbf{t}} \mathbf{a_t}dt$$

e poiché, nelle ipotesi poste, l'accelerazione tangenziale a_t è costante e la velocità iniziale è nulla, si ricava che il modulo della velocità è

$$v = v_0 + a_t(t - t_0) = \frac{F}{m}t \qquad [3.1].$$

Nella [3.1], quindi, il modulo della velocità **v** è funzione direttamente proporzionale del tempo, come rappresentato nella figura riportata a fianco: questo implica che, nell'approccio classico, dopo un certo tempo



$$t^* = mc/F$$

il corpo raggiunga una velocità pari alla velocità della luce nel vuoto. Continuando l'azione della forza, dunque, il corpo acquisirebbe una velocità maggiore di quella della luce stessa. E' chiaro che tutto ciò contrasta con quanto visto in precedenza, cioè che nell'universo non ci può essere nulla che si muova con velocità superiore a quella della luce nel vuoto.
Questa semplice considerazione indica la necessità di ridiscutere, valutandole alla luce dei postulati della relatività, le definizioni e le proprietà delle grandezze fisiche

fondamentali nello studio della meccanica[18], cioè la massa, la quantità di moto, la forza e l'energia. Le modifiche che saranno introdotte nei paragrafi seguenti consentiranno inoltre alle leggi della meccanica di avere la stessa forma in tutti i SRI

.

3.2 – Massa e quantità di moto

Ricordiamo ora che classicamente la massa m rappresenta un carattere intrinseco di un oggetto e risulta indipendente dal suo stato di moto. Essa viene detta anche "massa a riposo" ed è un invariante relativistico, cioè non cambia con la velocità[19].

Ciò che invece va riesaminato, a partire comunque dalle equazioni della meccanica classica, è la definizione della quantità di moto. A tal fine ricordiamo dalla meccanica analitica[20] che le variabili (di Hamilton) che caratterizzano lo stato di un sistema sono il tempo, la posizione e il momento (quantità di moto): in particolare il momento **p** di una particella materiale di massa m diversa da zero, soggetta a forze conservative e avente rispetto ad un SRI velocità $\mathbf{v}=(v_x,v_y,v_z)$, si ricava derivando la funzione di Lagrange[21] $\mathscr{L}$ rispetto alla velocità, ovvero

---

[18] Si ricorda che la **Meccanica** è quella parte della Fisica che studia il comportamento dei corpi sotto l'azione di forze (indipendentemente dalla natura delle stesse), cioè il loro stato di moto o di quiete.
E' suddivisa in tre parti: la **Cinematica**, in cui si studia il movimento dei corpi indipendentemente dalle cause che lo producono; la **Dinamica**, in cui si studia il movimento dei corpi in relazione alle forze che lo producono; la **Statica**, in cui si studiano le condizioni di equilibrio dei corpi.

[19] E' diffusa la consuetudine di parlare di dipendenza della massa dalla velocità della particella, distinguendo la "massa a riposo" dalla cosiddetta "massa dinamica": ma ciò, fatto forse nel tentativo di semplificare la trattazione di altri concetti, non è opportuno, essendo la massa – appunto – un invariante relativistico.

[20] Chi volesse approfondire l'argomento può fare riferimento, ad esempio, al testo di Gantmacher (cap. 2) oppure a quello di Grioli (cap. 22) citati nelle referenze.

[21] Si ricorda che la "Lagrangiana" $\mathscr{L}$ è data dalla relazione $\mathscr{L}=E_K-E_P$, ove E_K ed E_P rappresentano, rispettivamente, l'energia cinetica e quella potenziale.

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_\alpha} \qquad [3.2].$$

In altri termini, le componenti (α=x,y,z) del vettore **p** si ottengono derivando la lagrangiana rispetto alle componenti omonime della velocità: e ciò vale, naturalmente, anche nel caso di una particella libera, cioè non soggetta ad interazioni esterne. E' possibile dimostrare che, in questo ultimo caso, la lagrangiana assume la forma[22]

$$\mathscr{L} = -mc^2\sqrt{1-\frac{\sum_\alpha v_\alpha^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} \qquad [3.3]:$$

allora, utilizzando la precedente relazione [3.2] possiamo ricavare la quantità di moto. Avremo:

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(-\frac{mc^2}{\gamma}\right) = -mc^2\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

ma poiché

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{\sum_\alpha v_\alpha^2}{c^2}} = \left(1-\frac{\sum_\alpha v_\alpha^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

si ottiene $$\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sum_\alpha v_\alpha^2}{c^2}\right)^{-1/2}\cdot\left(-\frac{2v_\alpha}{c^2}\right) = -\gamma\frac{v_\alpha}{c^2} \quad .$$

Pertanto la generica componente del vettore quantità di moto **p** si può scrivere come

$$p_\alpha = -mc^2\left(-\gamma\frac{v_\alpha}{c^2}\right) = \gamma m v_\alpha \qquad [3.4]$$

ed infine, tenendo conto della natura vettoriale della quantità di moto, per la particella libera si ha:

$$\mathbf{p} = \gamma m\,\mathbf{v} = \frac{m\,\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad [3.5].$$

[22] Si veda eventualmente anche il testo di Landau-Lifsits (cap. II) citato nelle referenze.

Come si vede, la equazione precedente specifica che la quantità di moto relativistica differisce dalla definizione classica per la presenza del parametro γ. Questo comporta che, nel limite classico delle velocità – ovvero per $v<<c$ – si ottenga ancora $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$, mentre quando la velocità si avvicina a quella della luce il modulo della quantità di moto assume valori crescenti sempre più rapidamente.

3.3 – Legge fondamentale della dinamica

Abbiamo prima ricordato ed utilizzato la relazione che fornisce la seconda legge di Newton: $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. Tuttavia è noto che la relazione generale della legge di Newton afferma che la risultante delle forze esterne agenti su un corpo di massa m è pari alla derivata (variazione) della quantità di moto nel tempo, cioè

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

questa rimane una definizione valida anche nel caso relativistico, per cui si ha che

$$\mathbf{F} = \frac{d\,\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\,\mathbf{v})}{dt} \qquad [3.6].$$

Derivando questa equazione si ottiene

$$\mathbf{F} = m\left(\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v}\right) \qquad [3.7].$$

Poiché il parametro γ è funzione della velocità, la precedente relazione può essere riscritta come segue:

$$\mathbf{F} = m\left(\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\gamma}{d\mathbf{v}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{v}\right)$$

da cui si ricava, derivando γ rispetto a v,[23]

[23] Essendo $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, la sua derivata rispetto alla velocità risulta $\frac{d\gamma}{dv} = \gamma^3\frac{v}{c^2}$.