A01

156

Gruppo Didattico MaCoSa

MAtematica per COnoscere e per SApere

Volume I

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133-A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–xxx–x

I edizione: settembre 2010

MACOSA: MAtematica per COnoscere e per SApere

INTRODUZIONE

Questo è un libro di testo che forse troverete un po' diverso dal solito "libro di matematica". Infatti esso:

– è tutto costituito da **schede di lavoro**, che in parte dovrete completare voi;

– affronta, come appare anche dai titoli delle schede, temi sia matematici che **non matematici**;

– non comprende solo "calcoli" da fare, "formule" da capire, … ma anche molte parti **da leggere**;

– è presente in una versione in rete, all'indirizzo **http://macosa.dima.unige.it/sup** (da cui potete recuperare sia le schede di lavoro in formato "html", utili sia per il lavoro individuale che per proiezioni in aula, sia ulteriori esercizi che si aggiungono a quelli presenti nelle schede, oltre a software e ad altro materiale);

– e fa riferimento ad una specie di **dizionario matematico**, *Gli oggetti matematici,* che troverete in rete e in cui potrete rivedere gli argomenti matematici affrontati nelle schede di lavoro.

Il libro è impostato in modo da attuare le indicazioni presenti nei *Nuovi programmi,* che non fanno altro che riprendere e sviluppare quelle presenti nelle precedenti versioni: l'insegnamento della matematica deve essere articolato in **percorsi didattici** che stimolino la partecipazione attiva degli studenti e che introducano e sviluppino i concetti matematici a partire dall'analisi di situazioni "reali" e dalla discussione di problemi "culturali" di più ampio respiro, anche mediante interazioni con le altre discipline.

I programmi contengono argomenti come la Statistica e la Probabilità, presenti da molti anni, sin dalla scuola elementare, ma che spesso sono stati trascurati. Prevedono inoltre una forte riduzione delle attività meccaniche di calcolo, letterale e numerico, a favore di una padronanza consapevole dell'uso dei mezzi di calcolo; anche questo aspetto, fondamentale, è stato sovente non osservato.

In *MaCoSa* si tiene conto di questi aspetti e si dà grande importanza all'uso appropriato dei **linguaggi della matematica** e alla applicazione corretta dei **modelli matematici** (equazioni, funzioni, diagammi, …) alle situazioni reali, aspetti entrambi importanti per usare consapevolmente la matematica di "oggi".

Questo libro non è opera di un singolo **autore**, ma è il risultato del lavoro di insegnanti, della scuola superiore e dell'università, che hanno preparato le schede di lavoro e le hanno sperimentate in varie classi. Anche la vostra esperienza ci sarà utile per rivedere e migliorare il materiale. Grazie della collaborazione.

Nucleo di Ricerca Didattica MaCoSa

Nota. Il volume stampato dalla casa editrice **Aracne** contiene la versione forte delle schede. Nello schema seguente sono indicate le parti che possono essere omesse in alcune schede. In rete sono presenti le schede nelle varie versioni (A, completa, e B, ridotta).

La Matematica e i Suoi Modelli 1 **La Matematica e i Suoi Modelli 2** **La Matematica e i Suoi Modelli 3**	
Le Statistiche 1	**La Automazione 1** (vers. B senza ques. 16)
Le Statistiche 2 (vers. B senza §4 - Le tecniche e le attrezzature)	**La Automazione 2** (vers. B senza in §4 riquadro sui flip-flop)
Le Statistiche 3 (vers. B senza ques. 20 e 21	
Le Statistiche 4 **Algebra elementare** (vers. B con considerazioni abbreviate dopo ques.4 e ques. 8)	**La Automazione 3** **La Automazione 4** (vers. B senza l'uso di Derive in §3 e senza ques. e13)
I Numeri 1 (vers. B senza §4 - Le basi di numerazione e senza e10-e12) **I Numeri 2** (vers. B senza ques. 19-21, e10-e13)	
Per Strada 1 **La Matematica e lo Spazio 1**	Il "primo volume" finisce con Per Strada 2, inteso come limite massimo a cui si può arrivare in prima; le scuole con programma debole possono fermarsi subito prima o dopo Per Strada 1
Per Strada 2 (vers. B senza Note 1 e 2 in §2 e ques. e19)	

Nota per l'insegnante e per chi si occupa di Didattica della Matematica

Indicazioni più dettagliate sono presenti in rete nella **Guida** per gli insegnanti, a cui potete essere indirizzati se ci inviate un messaggio di posta elettronica (**macosa@dima.unige.it**). In rete sono presenti anche, oltre al software e ad altri materiali, riferimenti ad articoli e a pubblicazioni varie che si rifersicono alla impostazione di MaCoSa.

Sono ben accette critiche, suggerimenti, segnalazione di errori, … da parte di tutti i lettori.

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **1**

0. Che cos'è una scheda di lavoro?

Lo studio della matematica che affronteremo insieme in classe sarà in gran parte guidato da schede di lavoro come quella che stiamo leggendo in questo momento. Alcuni di voi probabilmente hanno già usato schede di lavoro nella scuola elementare o nella scuola media. Gli altri faranno comunque presto a prendere confidenza con questo strumento.

Una *scheda di lavoro* è in genere costituita da parti di testo in cui vengono presentati o discussi alcuni argomenti e da parti che l'alunno deve completare per approfondire o trovare risposte ad alcune questioni.

La lettura della scheda e le risposte ai quesiti proposti devono essere affrontate a volte individualmente, altre volte collettivamente insieme ai compagni e all'insegnante.

Il lavoro durante l'anno scolastico verrà articolato in *unità didattiche*. Le unità didattiche nell'insegnamento sono più o meno come i capitoli in un libro: in esse vengono raggruppati argomenti che sono simili o affini o che sono collegati dal filo del discorso che viene seguito.

Ogni unità didattica avrà un titolo che ne esprimerà in forma assai sintetica il contenuto e che verrà ripreso nelle schede di lavoro che useremo durante il suo svolgimento. Ad esempio questa è la prima scheda (*scheda 1*) di *La matematica e i suoi modelli*, unità didattica introduttiva, che cerca di dare un'idea di come studieremo la matematica durante l'anno.

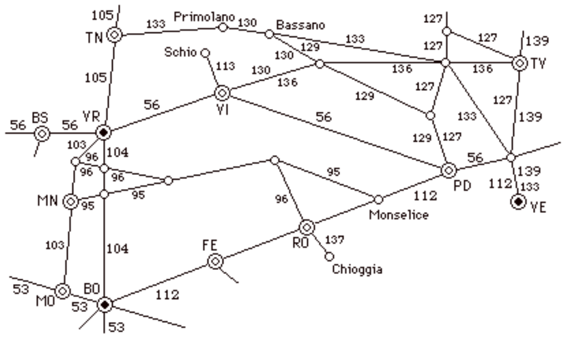
Naturalmente non tutto il lavoro sarà guidato o svolto su schede di lavoro. A volte le lezioni saranno condotte direttamente dall'insegnante, a voce e con l'ausilio della sola lavagna. A volte saranno i singoli alunni che dovranno cercare di spiegare in maniera comprensibile ai compagni alcuni argomenti o la soluzione di alcuni problemi. A volte si lavorerà nel laboratorio computazionale (cioè in un'aula attrezzata con personal computer) che d'ora in poi chiameremo più semplicemente *aula computer*. **…**

1. Una cartina della rete ferroviaria

Consideriamo un genere di situazioni in cui prima o poi quasi tutti, con maggiore o minore frequenza, si imbattono: *dover scegliere l'itinerario e l'ora in cui affrontare un viaggio in treno*

I coniugi Van Per Tren, una coppia di olandesi che nell'estate di un certo anno stanno trascorrendo le vacanze in Italia, vogliono trasferirsi col treno da Bologna a Vicenza, partendo al mattino fra le 8 e 30 e le 11. Consultano l'orario ferroviario in vigore che hanno acquistato presso un'edicola per decidere quale percorso seguire. Per individuare le linee impiegabili esaminano l'*indice grafico* stampato nella prima pagina dell'orario: una cartina in cui sono riprodotte le linee ferroviarie e sono indicati i relativi quadri dell'orario.

figura 1



Nella *figura 1* è riprodotta la porzione dell'indice grafico contenente le linee che possono interessare ai signori Van Per Tren. Per rendere più leggibile la figura abbiamo indicato solo le sigle delle città capoluogo di provincia e i nomi completi delle altre località che sono capilinea. Ad esempio la linea descritta nel quadro 130 collega Vicenza e Primolano.

1 Se foste al posto dei Van Per Tren, quali quadri consultereste per decidere quali treni prendere?

....

104		2184	84	11448
km		B	A	C
0	**Bologna**	844	1054	1100
12	Tavernelle	–	–	1110
21	S.Giovanni	904	–	1119
25	Amola	–	–	1124
30	Crevalcore	915	–	1129
35	Bolognina	–	–	1134
38	Camposanto	–	–	–
43	S.Felice	929	–	1142
50	Mirandola	936	–	1148
60	Poggio Rusco	948	–	1157
66	Revere Scalo	–	–	1202
68	Revere	–	–	1205
70	Ostiglia	956	–	1209
79	Roncanova	–	–	1216
84	Nogara	1006	–	1222
90	Pellegrina	–	–	1228
95	Isola d. Scala	1018	–	1240
103	Buttapietra	–	–	1301
114	**Verona** P.N.	1038	1226	1317

← *codice del treno*
← *tipo di treno*
← *ora; 844 sta per 8:44*

Caldiero è al 164° chilometro della linea Milano-Vicenza →

56		2073	10939	2075
km		B	C	B
0	**Milano** C.	910		1150
…	…			
148	**Verona** P.N.	1046	1320	1343
151	Verona P.V.	–	1324	–
157	S.Martino	–	1331	–
164	Caldiero	–	1337	–
172	S.Bonifacio	–	1351	–
178	Lonigo	–	1357	–
183	Montebello	–	1403	–
192	Altavilla	–	1412	–
200	**Vicenza**	1120	1422	1406

112		2218	30
km		B	A
0	**Bologna**	840	1040
…	…		
47	**Ferrara**	912	–
…	…		
80	**Rovigo**	931	–
…	…		
123	**Padova**	1006	1146

56		2062	2078	656	1176
		B	B	A	A
0	**Venezia**		1035	1145	1150
…	…				
37	**Padova**	1102	1116	1221	1228
47	Mestrino	–	–	–	–
52	Grisignano	1112	–	–	–
60	Lerino	1119	–	1134	–
68	**Vicenza**	1127	1136	1240	1249

2 Esaminate i quadri (che abbiamo riprodotto parzialmente, indicando con A, B e C le categorie di treni allora in vigore) e stabilite quale dei due itinerari è più corto.

chilometri percorsi con l'itinerario BO - VR - VI: ....

chilometri percorsi con l'itinerario BO - PD - VI: ....

3 Questo itinerario è anche il più breve, cioè quello che comporta un tempo di percorrenza inferiore? Perché?

....

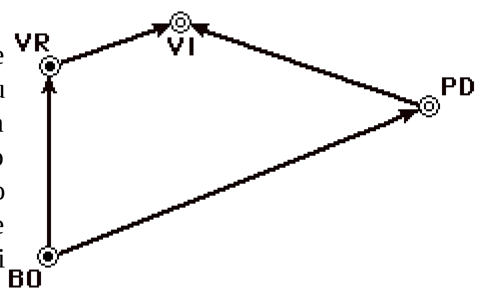
....

4 Se foste al posto dei Van Per Tren quali treni prendereste?

....

....

2. Che cosa viene rappresentato fedelmente?

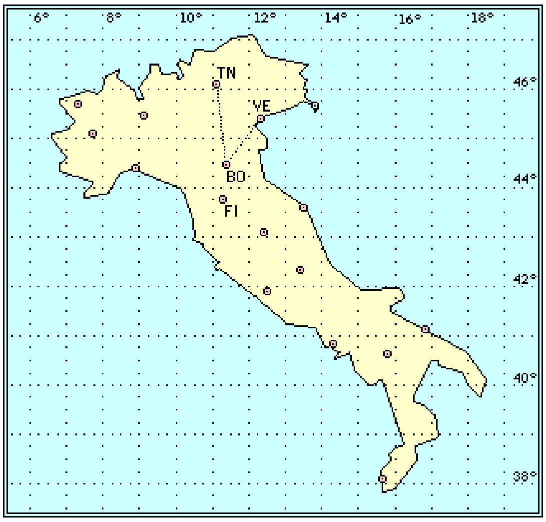


Il signor Van Per Tren non capisce come sia possibile che l'itinerario che sulla cartina appare molto più corto sia in realtà più lungo (→ quesito 2). Si rende conto che nella cartina la descrizione delle linee ferroviarie è stata semplificata impiegando tratti rettilinei per cui un itinerario potrebbe essere molto più lungo di come appare. D'altra parte, poiché si tratta di linee che attraversano la pianura, gli sembra improbabile la presenza di numerose curve.

Prende allora la sua guida turistica dell'Europa e si posiziona sulla pagina che contiene la rappresentazione cartografica dell'Italia. La cartina (riprodotta parzialmente nella *figura 2*: abbiamo omesso le isole e abbiamo segnalato solo i capoluoghi di regione) presenta una reticolatura che consente di individuare la posizione di una località note le sue coordinate geografiche (longitudine e latitudine). La guida contiene infatti un elenco in ordine alfabetico di numerose località con l'indicazione delle loro coordinate.

Ad esempio Firenze ha coordinate 11° 16' E (longitudine), 43° 45' N (latitudine).

figura 2



Nella *figura 3* è richiamato mediante un'illustrazione il significato delle *coordinate geografiche*.

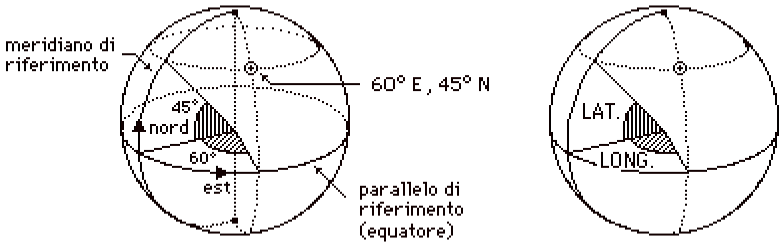


figura 3

Confrontando le due cartine i Van Per Tren si rendono conto immediatamente che nella prima cartina (➡ fig. 1) le località non sono disposte come nella seconda (➡ fig. 2). Per curiosità, aiutandosi con una piccola riga graduata e con la calcolatrice tascabile, calcolano il rapporto tra le distanze in linea d'aria di Bologna da Venezia e da Trento così come risultano dalla seconda cartina; poi calcolano il rapporto tra le stesse distanze così come appaiono sulla prima cartina e confrontano i due rapporti ottenuti.

5 Facciamo anche noi lo stesso confronto. Che cosa possiamo concludere?

....

....

L'indice grafico, cioè la cartina riprodotta nella figura 1, non rappresenta le linee ferroviarie con totale fedeltà.

Abbiamo potuto osservare subito, confrontando i quadri orari, che non sono segnalate tutte le stazioni ferroviarie, ma solo quelle delle località principali o che sono capilinea o nodi in cui si incontrano più tratti di linea ferroviaria.

Abbiamo poi visto che le lunghezze dei tratti che congiungono le stazioni sono sproporzionate.

Ma, allora, *quali aspetti vengono riprodotti fedelmente?*

(*) Viene riprodotto fedelmente l'*ordine in cui le stazioni rappresentate si susseguono* lungo le varie linee ferroviarie.

(**) Viene inoltre conservato l'*ordine con cui i diversi tratti di linea si innestano in un nodo* ferroviario.

6 Nella figura 4 sono riprodotte porzioni di tre possibili indici grafici (sono stati omessi i riferimenti numerici ai quadri). Quali conservano entrambi gli aspetti sopra indicati? Quali non li conservano, e perché?

....

....

....

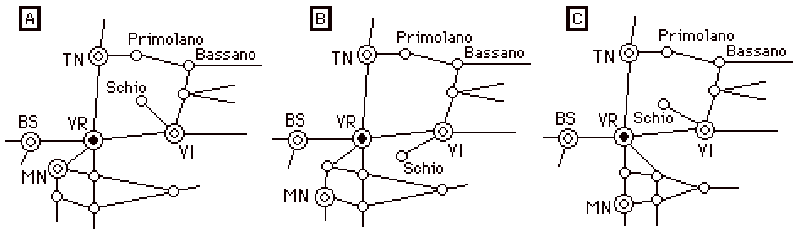


figura 4

3. Diverse rappresentazioni cartografiche

Abbiamo usato la cartina della figura 2 per concludere che l'indice grafico (figura 1) non rappresenta fedelmente le distanze tra le località.

Ma la cartina della figura 2 rappresenta fedelmente le distanze?

Una nave che da Genova proceda verso sud scendendo di un grado di latitudine percorre 111 km circa (100 metri più, 100 metri meno). Percorre la stessa distanza se parte da Bari e sale di un grado di latitudine.

In generale la distanza sulla superficie terrestre tra un parallelo e quello che ha un grado in più di latitudine è di circa 111 km, e questo vale sia presso l'equatore che presso i poli. Quindi nel globo rappresentato nella *figura 5* la distanza che intercorre tra due qualunque paralleli successivi (in questo globo i paralleli tracciati differiscono l'uno dall'altro per 15° di latitudine) corrisponde in ogni caso a circa $111 \cdot 15 = 1665$ km.

Invece la distanza tra un meridiano e quello che ha un grado in più di longitudine può differire notevolmente da una zona all'altra.

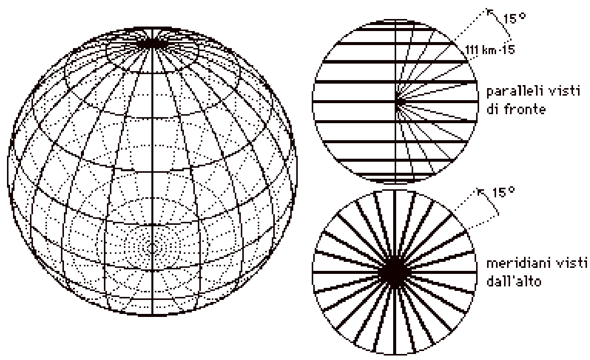
7 Quanti chilometri corrispondono a uno spostamento di un grado di longitudine lungo l'equatore? Avvicinandosi ai poli la distanza tra due qualunque meridiani a quale valore tende?

....

....

....

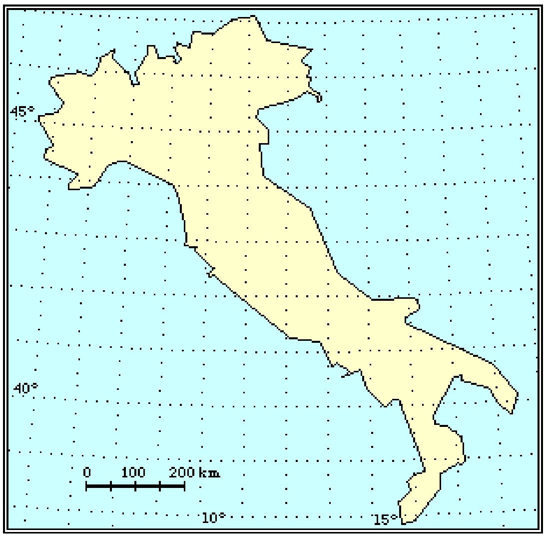
figura 5



Nella cartina di figura 2 la distanza tra due meridiani rimane immutata spostandosi da sud a nord, mentre in realtà due meridiani che differiscono per un grado di longitudine a Reggio Calabria distano circa 87 km e a Trento circa 77 km. Quindi neanche questa cartina rappresenta fedelmente le distanze: dilata orizzontalmente le zone meridionali e contrae orizzontalmente le zone settentrionali, anche se di poco.

La cartina di *figura 6* rappresenta con maggiore fedeltà le distanze.

figura 6



Tuttavia neanche questa cartina è del tutto fedele (→ esercizio 8). *Nessuna cartina può essere una perfetta riproduzione in scala* di una porzione della superficie terrestre. E la riproduzione è inevitabilmente tanto meno precisa quanto più grande è la superficie da rappresentare.

8 Perché?

....

....

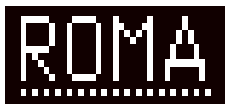
....

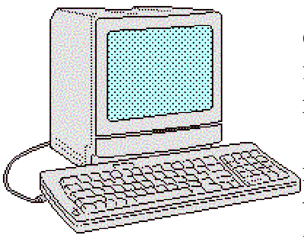
....

Come avrai notato, le cartine delle figure 2 e 6 non hanno i contorni lisci. Sono state, infatti, tracciate mediante un piccolo *personal computer*. Le immagini prodotte sullo schermo del calcolatore, che appaiono costituite da tanti piccoli rettangolini (*figura 7*), sono state poi riportate su carta mediante una stampante.

figura 7

Ingrandimento di come può apparire sullo schermo di un calcolatore la parola ROMA sottolineata con un tratto punteggiato. I punti vengono rappresentati con rettangolini luminosi e i segmenti e le curve che compongono le lettere vengono approssimate con insiemi di rettangolini.





La realizzazione delle immagini è stata eseguita fornendo al calcolatore le coordinate geografiche di moltissimi punti del contorno dell'Italia peninsulare e facendogli calcolare le posizioni dei rettangolini dello schermo con cui rappresentare i vari punti.

Il modo in cui effettuare questo calcolo è stato comunicato al calcolatore mediante un *programma*, cioè una sequenza di istruzioni (battute attraverso la tastiera) con cui si sono descritte le varie formule e i vari procedimenti da impiegare per ottenere, date le coordinate geografiche di un punto, le *coordinate schermo* del rettangolino con cui rappresentarlo.

Cambiando il programma si possono ottenere diverse rappresentazioni piane (cioè diversi tipi di cartine) dell'Italia o (se si forniscono i dati opportuni) di altre porzioni della superficie terrestre.

Un tempo questi calcoli venivano fatti a mano. L'uso del calcolatore ha solamente facilitato e sveltito il lavoro.

Naturalmente, fornendo le coordinate geografiche di più punti e impiegando dei calcolatori e delle stampanti più sofisticate si possono ottenere rappresentazioni cartografiche con i contorni più precisi. Ma, come abbiamo visto, per quanto si possa migliorare la precisione con cui tracciare i contorni, le rappresentazioni che si ottengono, essendo piane, non possono riprodurre fedelmente parti della superficie terrestre.

4. I modelli matematici

Nessuna delle ***cartine*** considerate riproduce esattamente ciò che rappresenta. Per altro alcune sono più fedeli di altre, ma ciò non vuol dire che siano migliori:

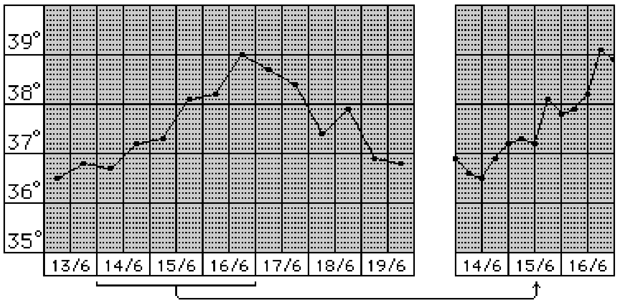
– Se l'indice grafico fosse stato tracciato su una cartina come quella di fig. 6 avremmo sì ottenuto una rappresentazione più fedele della posizione delle varie località, ma di più difficile lettura. Invece l'editore dell'orario ha modificato opportunamente la collocazione spaziale delle diverse stazioni in modo da facilitare la lettura dei nomi delle località e dei numeri dei quadri relativi alle varie linee. All'utente che consulta l'orario non interessa infatti che siano conservati i rapporti tra le distanze o gli angoli formati dalle linee che si incontrano in un nodo, ma interessa solamente l'ordine con cui si susseguono le varie stazioni e un'indicazione approssimativa delle direzioni delle diverse linee.

– La cartina di figura 2, che rappresenta meno fedelmente distanze e angoli rispetto alla cartina di figura 6, in cambio, avendo un sistema di riferimento ortogonale (paralleli e meridiani rappresentati con rette tra loro perpendicolari) offre una lettura più facile delle coordinate.

Possiamo dire che le diverse rappresentazioni cartografiche di una certa regione della superficie terrestre sono differenti ***modelli*** di essa. Facciamo qualche altro esempio di modello. Il ***diagramma*** in *figura 8* è un modello che rappresenta la temperatura corporea di una persona degente in ospedale.

figura 8

Diagramma della temperatura corporea registrata in una persona degente in ospedale al mattino e al pomeriggio per alcuni giorni consecutivi e porzione del diagramma che si otterrebbe con più rilevamenti sistematici.



L'andamento della linea ottenuta congiungendo i punti corrispondenti ai successivi rilevamenti dà immediatamente un'idea complessiva di come è variata la temperatura, ma non è una rappresentazione fedele dell'andamento della temperatura dal 13 giugno al 19 giugno. Ad esempio la parte di grafico che va dal punto corrispondente alla mattina del 14 a quello corrispondente al pomeriggio del 16 è costantemente in salita, mentre nella realtà la temperatura potrebbe aver avuto delle oscillazioni. A fianco del diagramma ospedaliero è raffigurata parte di un diverso diagramma che si potrebbe ottenere se la temperatura fosse rilevata ogni giorno sistematicamente alle 6, alle 12, alle 18 e alle 24.

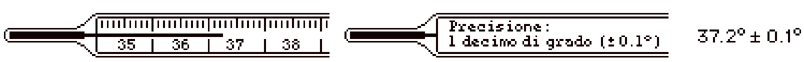
Il fenomeno "temperatura corporea" non è rappresentato esattamente anche per altri aspetti.

Innanzi tutto i pallini sono tracciati al centro delle due colonne che rappresentano la prima metà e la seconda metà di un giorno anche se le temperature non vengono rilevate alle 6 del mattino e alle 6 del pomeriggio.

Poi la temperatura registrata col termometro non è il valore preciso della temperatura. Infatti leggendo il termometro si cerca di individuare la tacca della scala numerica che è più vicina all'estremità della colonnina di mercurio; il numero ottenuto ci dà una misura della temperatura fino ai decimi di grado, non oltre. Ad esempio se la colonnina arriva fra la tacca 37.2 e la tacca 37.3 e ci sembra che sia più vicina alla prima tacca, diciamo che la temperatura è 37.2°, ma in realtà potrebbe avere un valore superiore a 37.2° ed essere ad esempio 37.236…°. Per ottenere i centesimi di grado sarebbe necessaria un'ulteriore suddivisione della scala graduata, per ottenere i millesimi di grado ne occorrerebbe ancora un'altra, e così via.

Inoltre sul retro del termometro troviamo una scritta come quella riportata nella *figura 9*. Essa significa che impiegando un altro termometro dello stesso modello si sarebbe potuta ottenere la temperatura 37.1° o la temperatura 37.3°, cioè una variazione in più o in meno di 0.1° rispetto alla temperatura 37.2° che abbiamo letto.

figura 9



Con questa scritta il fabbricante del termometro ci assicura che materiali e tecniche di fabbricazione impiegate (il procedimento con cui sono state incise le tacche sulla scala, il modo in cui sono state posizionate la colonnina di mercurio e la scala graduata, …) garantiscono che la misura vera può differire dalla misura letta al più di 0.1°. A volte si usa la scrittura *37.2 ± 0.1 gradi* per indicare una temperatura di cui si conosce la misura 37.2° letta con uno strumento che ha la precisione di 1 decimo di grado.

Da quanto ora osservato segue che anche i ***numeri***, quando sono impiegati per descrivere una grandezza, assai spesso non la descrivono esattamente, ma in maniera *approssimata*. In altre parole il numero che esprime la misura di una grandezza è un *modello* di questa. A seconda dello strumento di misura impiegato o delle informazioni che si hanno a disposizione si possono ottenere misure più o meno precise, cioè modelli che rappresentano più o meno fedelmente la grandezza. Anche in questo caso non esiste "il modello migliore".

Ad esempio, per valutare lo stato di salute di una persona come informazione sulla sua temperatura corporea un dato come 38.4° è sufficiente, e è più "leggibile" di un dato come 38.391°, che sarebbe rilevabile con un termometro più sofisticato.

9 In uno stesso giorno su due quotidiani di una stessa nazione europea compaiono due articoli dedicati all'inizio dell'anno scolastico. In entrambi si vuole dare un'idea di quanto costi il mantenimento agli studi disponendo dell'informazione che nell'anno precedente una famiglia spendeva mediamente 1 264.70 € in "istruzione". Nel primo giornale questa spesa viene indicata con «mille e 264 euro», nel secondo con «mille e trecento euro». Nessuno sceglie «1 264.70 euro». Che differenze ci sono tra questi tre modi di indicare la spesa considerata? Quale dei tre avresti scelto tu? Perché?

....

....

....

....

Considerando le rappresentazioni cartografiche abbiamo incontrato un ulteriore tipo di modello di natura numerica. Abbiamo infatti ricordato che per rappresentare una posizione in una cartina o un punto in una generica superficie piana, fissato un sistema di riferimento, si utilizza una opportuna coppia di numeri, le coordinate del punto. Questa *coppia di coordinate* è il modello con cui rappresentiamo il *punto*.

A seconda della approssimazione con cui vogliamo rappresentare una posizione possiamo avere coordinate più o meno precise. Ad esempio possiamo dire che Firenze ha coordinate 11° E, 44° N o che ha coordinate 11° 16' E, 43° 45' N.

Sempre nell'ambito delle rappresentazioni della superficie terrestre, abbiamo impiegato un altro modello: abbiamo identificato la *Terra* con una *sfera*; in particolare abbiamo supposto che meridiani ed equatore fossero tutti circonferenze eguali. Questo modello è realizzato materialmente nei globi terrestri girevoli.

Anche questa modellizzazione, assai efficace, nasce da una semplificazione: vengono trascurati i rilievi, come se la superficie terrestre fosse tutta al livello del mare, e, soprattutto, non si tiene conto che la Terra è leggermente schiacciata ai Poli: il suo spessore all'altezza dell'equatore è di circa 12 760 km mentre tra i due Poli è di circa 12 715 km. In particolare mentre un grado di longitudine corrisponde a 111.1 km, un grado di latitudine lungo l'equatore corrisponde a 111.3 km.

I modelli che abbiamo considerato fin qui (raffigurazione sul piano di superfici non piane, diagrammi, numeri per rappresentare grandezze, coppie di numeri per rappresentare posizioni, sfera approssimante la Terra) sono tutti ***modelli matematici***, nel senso che sono rappresentazioni semplificate di fenomeni o aspetti della ***realtà*** realizzate impiegando oggetti matematici (figure, numeri, …).

Naturalmente non esistono solo modelli matematici.

Ad esempio un *trenino elettrico* che sia il modello in scala ridotta di una locomotiva reale non è un modello matematico in quanto è realizzato impiegando tecniche e concetti non riconducibili solo alla matematica (ad esempio il funzionamento del motorino si basa su principi di fisica, la scelta e la lavorazione dei materiali fa riferimento a nozioni di chimica e di altre discipline, …).

Oppure si pensi alla ricostruzione dei fattori che sono stati all'origine di un certo evento dell'antichità e alla *descrizione* di questo *evento* che vengono fatte da un *manuale di storia*: non siamo di fronte a una rappresentazione fedele di ciò che accaduto, ma a una rappresentazione semplificata, che cerca di cogliere gli aspetti e le cause (che l'autore ritiene) essenziali. Cioè siamo di fronte a un modello di quell'evento, che evidentemente non è matematico, e è anche molto "soggettivo": un altro storico può interpretare e collegare diversamente le varie informazioni sull'evento che si hanno a disposizione.

Le *discipline* (la matematica, la chimica, la linguistica, la geografia, …) fanno un ampio uso di modelli, cioè di rappresentazioni semplificate o convenzionali, che sono utili per facilitare i ragionamenti, la comunicazione delle idee, …; lo stesso facciamo anche noi, nella vita quotidiana. Vi sono tuttavia alcune differenze fondamentali tra i modelli della matematica e i modelli impiegati in altre discipline e in altri campi. Su questi aspetti ci soffermeremo maggiormente nell'ultima scheda dell'unità didattica.

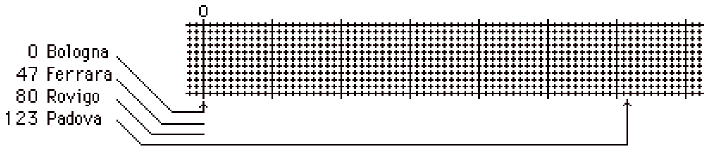
5. Esercizi

e1 Nella *figura 10* sono rappresentate su una striscia di carta quadrettata, in una scala opportuna, le posizioni lungo la linea Bologna-Venezia delle stazioni di Bologna e di Padova.

La linea ferroviaria è rappresentata *rettificata*, cioè "raddrizzata" fino ad assumere forma rettilinea: vengono rappresentate le *distanze ferroviarie* che intercorrono tra Bologna e le altre stazioni, non le direzioni che man mano assume la strada ferrata.

(a) Quanti chilometri rappresenta un quadretto grande? ... Quanti uno piccolo? ...
(b) Completa la figura indicando con due frecce le posizioni di Ferrara e di Rovigo.

figura 10



e2 Nella *figura 11* sono rappresentate le stesse stazioni della linea Bologna-Venezia viste in fig. 10.

(a) Con un righello o con una striscia di carta millimetrata misura la distanza nella figura tra Bologna e Padova e, tenendo conto della distanza ferroviaria reale, calcola la scala di riduzione della nostra rappresentazione.

scala 1 : .....

Ricorda che, ad esempio, *scala 1:15000*, scritto anche 1/15000 o "a due piani" nel modo riprodotto a destra, si legge *scala 1 a 15000* o *1 quindicimillesimo* o *1 diviso 15000* e indica che le distanze reali sono state divise per 15000, cioè moltiplicate per 1/15000, ossia che per ottenere le distanze reali occorre moltiplicare per 15000 le distanze sulla cartina. $\frac{1}{15000}$

(b) Descrivi, in poche parole, come hai proceduto per calcolare la scala di riduzione.

....

....

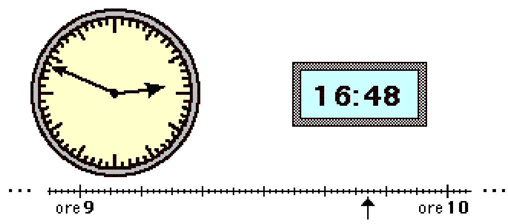
....

....

figura 11

e3 Considera la cartina in ➡ figura 2. Individua i capoluoghi di regione aventi approssimativamente le seguenti coordinate geografiche: 14° E, 41° N; 8° E, 45° N; 11 ° E, 46° N; 16° E°, 38° N. Determina (approssimativamente) le coordinate dei seguenti capoluoghi di regione: Bari, Aosta, Trieste.

e4 A fianco sono rappresentate tre ore mediante tre diversi dispositivi. Rappresenta ciascuna ora anche mediante dispositivi degli altri due tipi.



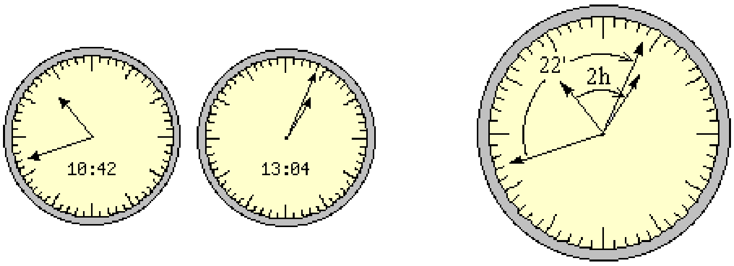
e5 Considera il seguente problema:

«Per registrare un programma televisivo il cui inizio e la cui fine sono previsti rispettivamente per le 21:40 e per le 23:25 basta un disco in cui sono disponibili ancora 120 minuti o ne occorre uno nuovo?»

Giovanni sostiene che per risolvere il problema si deve calcolare 23:25 – 21:40. Laura afferma che conviene calcolare 21:40 + 2:00.

- Chi dei due ha ragione secondo te? Qual è la soluzione del problema? Perché?

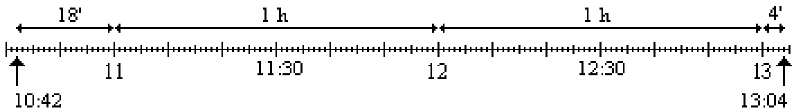
e6 Le due figure seguenti, a sinistra, riproducono lo stato di un orologio in due momenti successivi (10:42 e 13:04) di uno stesso giorno. La figura successiva visualizza come si può calcolare il tempo trascorso riferendosi alle posizioni delle lancette:
la lancetta corta è ruotata di "2 ore" e "rotti", la valutazione di quanto è ruotata la lancetta lunga ci permette di valutare i "rotti" (è ruotata di "22 minuti").



La stessa differenza di tempi può essere calcolata riferendosi alla *retta dei tempi* nel modo sotto illustrato:

– dalla prima alla seconda freccia intercorrono:
- 2 divisioni che rappresentano 1 h
- 18+4 divisioni che rappresentano un minuto

– per un totale di 2 h e 22 min.



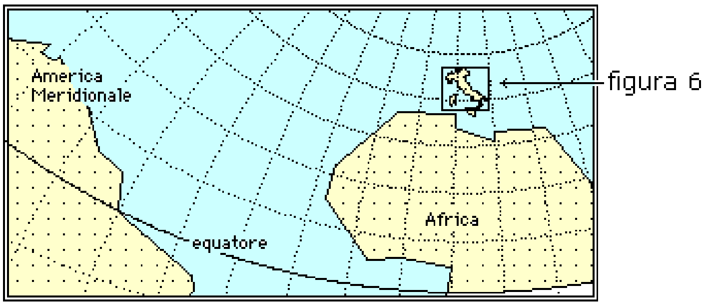
Con rappresentazioni simili a queste, con cui abbiamo determinato il valore della differenza tra 10:42 e 13:04, illustra le seguenti operazioni:
- 19:12 – 18:51, 7:31 – 5:42 (pensale come differenze di tempi e procedi come nel caso precedente)
- 11:08 + 3:55, 20:49 + 2:27, 23:30 + 2:02 (pensale come determinazione dell'ora finale; ad es. per la prima addizione: dalle 11:08 l'orologio avanza di 3 h e 55'; qual è la posizione finale delle lancette, ovvero della freccia che segna l'ora sulla retta dei tempi?)
- 13:27 – 1:05, 10:14 – 3:15 (pensale come determinazione dell'ora iniziale; ad es. la prima operazione può essere vista come soluzione del problema: l'orologio segna le 13:27 dopo che è trascorsa 1 h e 5'; qual era l'ora iniziale? cioè, se retrocedo di 1 h e 5', quale posizione assumono le lancette, ovvero fino a dove retrocede la freccia che segna l'ora sulla retta dei tempi?)

[non importa che i disegni siano belli, non serve che siano tracciate tutte le divisioni: bastano schizzi comprensibili]

e7 Adesso sono le 14:45. Devi ancora vedere/ascoltare sul videoregistratore un disco per lo studio della lingua inglese che dura 75 minuti. Poi vuoi andare al campo sportivo ad allenarti per 2 ore; per gli spostamenti (andata e ritorno dal campo) ci vogliono 40 minuti. Devi assolutamente essere a casa alle 19:30. Calcoli a mente quanto tempo ti rimane per stare fuori con gli amici.
- Quanto ottieni? • Descrivi a parole il procedimento che hai impiegato per trovare la risposta.

e8 Nella fig. 12 è riprodotta in parte una cartina realizzata con la tecnica usata per quella di fig. 6 ma riferita a una zona più ampia, per cui sono più evidenti le deformazioni rispetto alla superficie terrestre.
- Indica due tratti che hanno lunghezza diversa sulla cartina ma uguale sulla superficie terrestre.
- Indica una linea che sulla cartina è curva ma corrisponde a una traiettoria rettilinea sulla superficie terrestre.

figura 12



La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda **2**

1. Quanto costa un viaggio in treno?

Come avrete capito, le vacanze dei signori Van Per Tren sono un pretesto per proporvi alcuni esercizi con cui riprendere confidenza con le nozioni di matematica che avete studiato nella scuola media inferiore e introdurre il lavoro che svolgeremo quest'anno. Nella realtà chi intraprende un viaggio si pone qualche problema in meno dei nostri amici. Comunque andiamo avanti nella nostra finzione.

I Van Per Tren, che cercano di amministrare nel miglior modo possibile i soldi che hanno deciso di spendere per le vacanze, oltre al problema del tempo impiegato dai vari treni, si pongono anche quello del costo del viaggio. Cercano nell'orario ufficiale i prezzi, ma non li trovano e non trovano neanche un modo per calcolarli sulla base della distanza chilometrica. Allora cercano su Internet, nel sito delle Ferrovie dello Stato, le tariffe di alcune corse, per i tipi di categoria intermedia (che nella scheda 1 abbiamo chiamato B), e cercano di capire come si formano i prezzi. Ecco i dati che recuperano, per alcune corse (i prezzi sono in euro, relativi all'anno in cui i Van Per Tren stanno facendo le vacanze, e sono relativi ai viaggi in 2ª classe):

(**1.1**)

km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa	km	tariffa
28	6	**46**	7	**90**	9	**144**	13.50	**165**	16
313	24.70	**501**	38.50	**769**	52.50	**1023**	72.50		

Per organizzarsi i prossimi viaggi nel modo più conveniente, i nostri meticolosi amici cercano di capire meglio come variano le tariffe. La signora Van Per Tren, che per mestiere fa l'insegnante di matematica, esaminando la tabella riesce a capire l'andamento delle tariffe. Noi cercheremo di aiutarci con un grafico su carta quadrettata del prezzo del biglietto al variare della percorrenza (*figura 1*).

figura 1

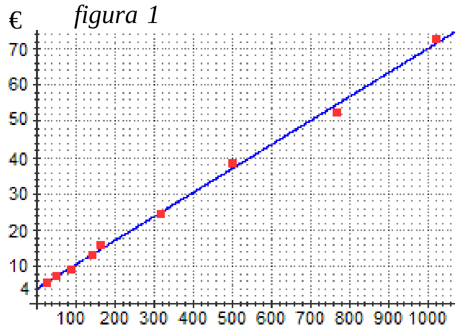
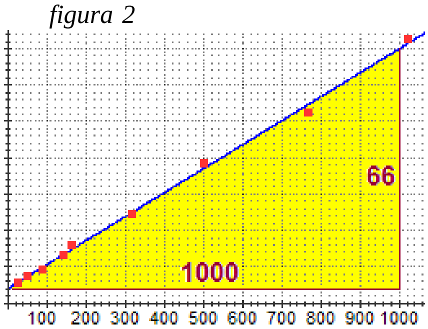


figura 2



percorrenza (in km)

Come si vede i punti che rappresentano la tabella si dispongono all'incirca lungo una retta che parte dal punto di *ascissa* 0 e di *ordinata* 4 e arriva nel punto di ascissa 1000 e ordinata 70, come si vede meglio in *figura 2*.

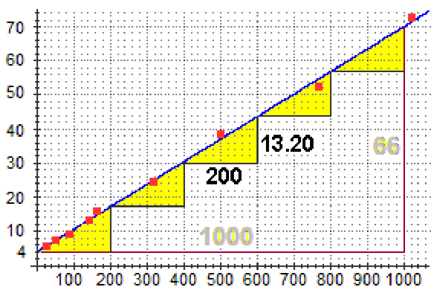


figura 3

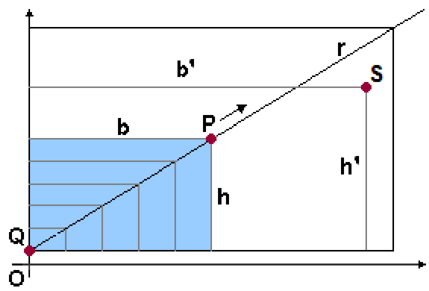


figura 4

Le *figure 3* e *4* richiamano il significato della ***proporzionalità***. Supponiamo che le tariffe crescano esattamente come rappresentato dal grafico rettilineo rappresentato in figura 3: ogni 200 km in più la tariffa aumenta di 13.20 € (infatti 200 è 1000/5 e 66/5 = 13.20). Generalizzando consideriamo la figura 4: muovendo lungo la retta *r* il vertice *P* del rettangolo tratteggiato, questo viene ingrandito (se *P* viene allontanato da *Q*) o rimpicciolito (se *P* viene avvicinato a *Q*) mantenendo la stessa forma: le dimensioni, base e altezza, *variano in proporzione*, cioè vengono moltiplicate per uno stesso numero.

In altre parole il *rapporto* base/altezza è *costante*: se la base è *tot* volte l'altezza, in tutte le riproduzioni proporzionate la base continua a essere *tot* volte l'altezza. Invece il rettangolo ottenuto spostando il vertice *P* nel punto *S* non appartenente a *r* è un ingrandimento *sproporzionato* del rettangolo tratteggiato: la base è stata ingrandita maggiormente dell'altezza.

Dunque, ogni chilometro la tariffa aumenta di circa 66/1000 = 0.066 €. Questo (0.066 €/km) è il rapporto approssimativo tra l'aumento del prezzo e l'aumento della percorrenza.

In conclusione possiamo dire che, grosso modo, le tariffe crescono "regolarmente" all'aumentare della lunghezza del percorso e che il prezzo, euro più, euro meno, è dato dalla *formula*:

(**1.2**) PREZZO (in €) = 4 + (n° di CHILOMETRI PERCORSI) · 0.066

Il punto a mezza altezza "·" è un simbolo per indicare la moltiplicazione. Lo useremo spesso in alternativa al simbolo "×". Una formula che, come questa, abbia la forma "…=…", cioè sia costituita da due *termini* separati dal simbolo di *eguaglianza*, viene detta anche *equazione*.

La formula (1.2) rappresenta le tariffe ferroviarie in forma assai concisa. Tuttavia non le rappresenta esattamente, ma in modo approssimato. Consultare Internet o altre fonti di informazione delle Ferrovie è indispensabile se si vuole conoscere esattamente il costo di un viaggio; il ***modello*** "formula" ha invece il vantaggio di essere facilmente memorizzabile e di essere così impiegabile quando non si hanno a disposizione altre fonti di informazione.

1 Calcolate i prezzi per 144 e 501 km impiegando (1.2) e confrontateli con quelli ricavati da Internet.

144 km 501 km

Abbiamo introdotto la ***formule*** (1.2) e il ***grafico*** di fig. 1 come rappresentazioni semplificate della ***tabella*** (1.1). In realtà l'aspetto più importante è che esse ci consentono di *comprendere il ragionamento seguito da chi ha predisposto la tabella delle tariffe*: chi amministra le Ferrovie ha voluto fissare il prezzo in modo che fosse formato da una quota fissa e da una parte più o meno proporzionale alla lunghezza del tragitto percorso.

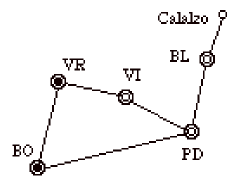
2. Quale tipo di biglietto conviene?

Consultando Internet trovano che, nel periodo in cui vogliono venire in Italia, sono in vigore alcune tariffe agevolate. In particolare soffermano l'attenzione su un particolare *biglietto chilometrico*: costa 42 € e può essere impiegato per fare più viaggi, fino a una percorrenza complessiva di 500 km. Usando la formula che stima i prezzi dei biglietti, come possono affrontare quesiti come i seguenti?

2 (A) Se devo fare un viaggio di 500 km mi conviene fare un biglietto normale o un biglietto chilometrico?
(B) E se devo fare un viaggio di 200, due di 100 ed uno di 90 km?

3. La Freccia delle Dolomiti

I nostri amici olandesi osservano che da Padova si possono raggiungere in treno le Dolomiti, arrivando fino a Calalzo di Cadore, posto all'inizio della Valle d'Ampezzo, vicino al Lago di Cadore. Pensano quindi di raggiungere Vicenza facendo scalo non a Verona ma a Padova, così da poter fare una puntata di un giorno nelle Dolomiti.



(**3.1**)

km		↓
0	**Padova**	1530
11	Campodarsego	1540
15	S.Giorgio	1546
19	**Camposampiero**	1550
31	**Castelfranco**	1602
		1622
48	**Montebelluna**	1636
56	Cornuda	1646
66	Fener	1657
83	Feltre	1715
101	Bribano	1733
114	**Belluno**	1747
121	Polpet	1755
132	Longarone	1808
158	**Calalzo**	1855

Su una guida trovano indicato un treno che viene indicato come *Freccia delle Dolomiti*. Stimolati dal nome, che suggerisce alte velocità, pensano di impiegarlo per raggiungere Calalzo.

Nella tabella (3.1) sono state riportate dall'orario le ore in cui il treno sosta nelle varie stazioni. Per le stazioni in cui la sosta è più lunga è indicata sia l'ora di arrivo che quella di partenza.

Stimiamo la *velocità media* con cui è percorso il tratto Padova-Calalzo.

– 15:30 $\xrightarrow{+\ 3}$ 18:30 $\xrightarrow{+\ 0:25}$ 18:55: il tempo impiegato è 3 *h* e 25 *min*;

– la distanza è 158 *km*;

– il tempo è 3 *h* e rotti, la distanza è 150 *km* e rotti, 150=50·3, quindi il treno in 1 *h* fa mediamente circa 50 *km*.

Controlliamo questa stima con la calcolatrice.

3 Calcolate la *velocità media* con cui il treno percorre il tratto Padova-Calalzo.

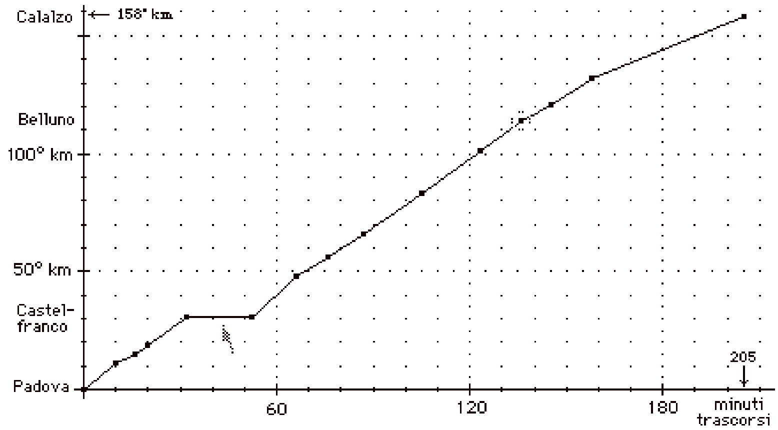
distanza (Padova-Calalzo) = ______ km tempo (Padova-Calalzo) = ______ min

velocità (Padova-Calalzo) = distanza/tempo = ______ km/h

Nota: 1 h = 60 min; quindi per passare da una velocità in km/min al suo valore in km/h occorre moltiplicare per 60.

Velocità intorno ai 50 km/h non sono certo da "freccia": sono di poco superiori alle velocità che riesce a tenere un ciclomotore. La signora Van Per Tren, per valutare se la bassa velocità media può dipendere dalla lunghezza delle soste nelle stazioni e dal fatto che vi sono molte fermate (le quali, in ogni caso, rallentano la marcia) decide di rappresentare su carta quadrettata il ***moto del treno*** (vedi *figura 5*).

figura 5



I pallini neri rappresentano la posizione del treno lungo la linea ferroviaria al trascorrere del tempo, ad esempio quello evidenziato col cerchietto rappresenta il fatto che, secondo la tabella, alle 17:46, dopo 136 minuti dalla partenza, il treno è alla stazione di Belluno.

I pezzi di grafico orizzontali rappresentano le soste nelle stazioni. Ad es. durante il tragitto Padova-Calalzo il treno sosta a Castelfranco tra le 16:02 e le 16:22, cioè per 20 minuti, dal 32° al 52° minuto dalla partenza; ciò è rappresentato dal tratto orizzontale (indicato dalla freccia) tracciato in corrispondenza di Castelfranco.

I Van Per Tren osservano che dove vi sono molte fermate il grafico non ha pendenza inferiore. Ciò fa svanire l'ipotesi che la lentezza del treno sia dovuta soprattutto alle molte fermate. Ma viene un'altra idea: la causa principale può essere la natura del percorso: è una linea ferroviaria che dalla pianura va in montagna; quindi avrà da superare tratti in salita e, presumibilmente, tratti con numerose curve; se le locomotrici non sono molto efficienti e la strada ferrata non è in buono stato difficilmente si possono tenere alte velocità.

4 Da fig. 5, esaminando le pendenze, individuate il tratto tra due fermate successive in cui il treno è più lento e quello in cui è più veloce. Quindi usando la tabella (3.1) calcolate la velocità media del treno in tali tratti.

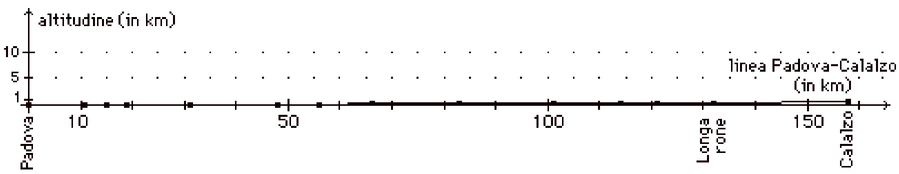
tratto più lento .... velocità ....

tratto più veloce .... velocità ....

Il tratto in cui il treno viaggia più lentamente è anche il più lungo, e quindi quello in cui la velocità media risente meno delle fasi di partenza e arrivo in stazione. Ciò sembra confermare l'idea dei Van Per Tren che la lentezza del treno dipenda dalla natura del percorso. Consideriamo il ***profilo altimetrico*** della linea Padova-Calalzo, in modo da vedere se il tratto in questione affronta effettivamente una zona particolarmente montuosa.

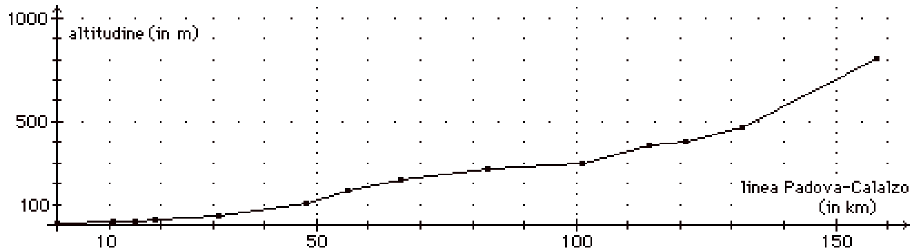
In *figura 6* il profilo è stato rappresentato impiegando la stessa scala per la distanza da Padova lungo la linea ferroviaria (asse orizzontale) e per la altitudine (asse verticale): 10 km sono stati rappresentati con segmenti di eguale lunghezza sui due assi.

figura 6



Per esaminare meglio come varia la pendenza della linea ferroviaria *dilatiamo* il grafico verticalmente. Otteniamo (*figura 7*) un *modello* meno fedele ma che consente di distinguere meglio i tratti con diversa pendenza. Viene in particolare evidenziato come l'ultimo tratto (Longarone-Calalzo) sia quello con la maggiore pendenza.

figura 7

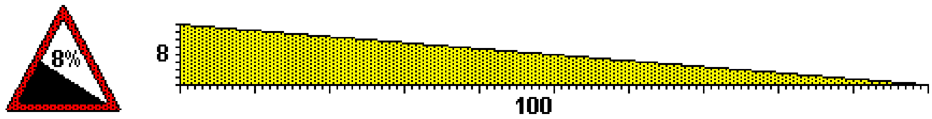


Come si può esprimere in forma più precisa il concetto di ***pendenza***? Indicando di quanti metri (o centimetri, millimetri, …) si innalza la strada ogni 100 metri (o centimetri, millimetri, …) di avanzamento in orizzontale.

Ad esempio il cartello stradale riprodotto in *figura 8*, a sinistra, segnala una discesa pericolosa con pendenza del 8% (8 *per cento*): la strada è inclinata come il triangolo disegnato a destra, che ha la base lunga 100 unità di misura e è alto 8 unità di misura. In altre parole il *rapporto* tra spostamento verticale e spostamento orizzontale è lo stesso che intercorre tra 8 e 100: 8/100 = 0.08 = 8 centesimi.

Se percorro un tratto di discesa che corrisponde ad uno spostamento orizzontale di 25 metri mi abbasso di 8 centesimi di 25 metri, cioè di 25·0.08 = 2 metri.

figura 8



Si noti che nel caso delle pendenze stradali, che possono arrivare a valori di poco superiori al 10%, non c'è grande differenza tra lunghezza della strada percorsa e avanzamento orizzontale. Ad esempio nel caso sopra raffigurato la base del triangolo e il lato obliquo hanno lunghezza pressoché eguale. In particolare, nel caso della nostra linea ferroviaria, che come abbiamo visto (vedi figura 6) è assai meno inclinata del triangolo raffigurato, possiamo considerare praticamente eguali l'avanzamento in orizzontale e la lunghezza della strada ferrata percorsa.

5 Da fig. 7 si vede che il dislivello tra Longarone e Calalzo e poco più di 300 m. La distanza tra Longarone e Calalzo è circa 25 km, cioè 25000 m. Qual è, approssimativamente, la pendenza di questo tratto di linea?

rapporto tra dislivello e distanza = 300/25000 = 0.012 = …………………… centesimi = ……………………%

4. *Esercizi*

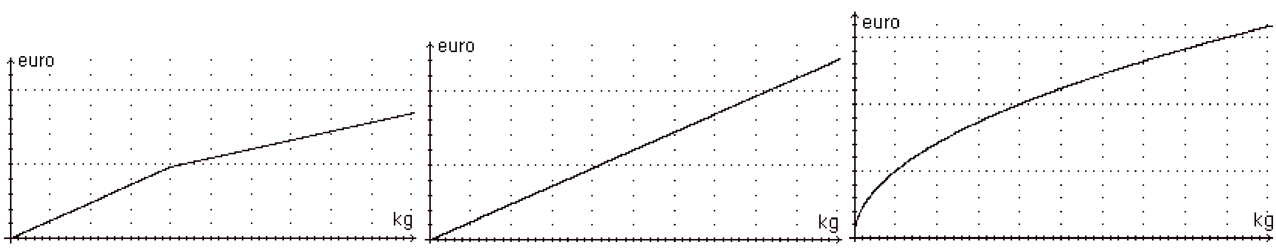
In questa seconda scheda abbiamo richiamato altri tipi di ***modelli matematici***: tabelle e equazioni per esprimere il legame tra due grandezze (nel nostro caso tra percorrenza e prezzo) e loro rappresentazioni grafiche, i concetti di rapporto e di proporzionalità, il concetto di pendenza, …

Abbiamo visto anche in questa scheda che l'impiego di modelli matematici opportuni, per quanto spesso dia luogo a rappresentazioni semplificate delle situazioni, può *facilitare* le *decisioni*, la *comunicazione*, la *comprensione dei fenomeni*, …

Negli *esercizi* che seguono vi vengono proposte alcune attività relative agli esempi e agli strumenti matematici considerati nella scheda.

e1 Scrivi su un foglio le frasi con cui spiegheresti per telefono come calcolare approssimativamente il prezzo del viaggio Belluno-Calalzo in un treno di categoria B a una persona che abbia sottomano un orario ferroviario simile a quello dei Van Per Tren (indice grafico in prima pagina, quadri orari nelle pagine successive). Supponi che la persona non abbia pratica di orari ferroviari e che tu non abbia sottomano un orario ferroviario e una calcolaltrice per dirgli direttamente il prezzo. Ricorda che devi spiegare alla persona sia come calcolare il chilometraggio che come da questo risalire al prezzo del biglietto.

e2 Quale tra i tre grafici A, B e C potrebbe rappresentare quanto si deve pagare in un negozio per l'acquisto di una certa quantità di patate? Perché hai escluso gli altri due grafici?



A B C