

$\frac{A_{II}}{508}$



Mario Graziano

# PITAGORICI SI NASCE

L'ORIGINE NATURALE DEL SAPERE MATEMATICO



*L'opera usufruisce del contributo dei fondi relativi al Progetto di Ricerca  
PRIN anno 2007 dal titolo "Filosofia e naturalizzazione del mentale.  
Nuove prospettive sulla conoscenza e la natura umana"  
(Unità locale dell'Università degli Studi di Messina).*

Copyright © MMX  
ARACNE editrice S.r.l.

[www.aracne-editrice.it](http://www.aracne-editrice.it)  
[info@aracne-editrice.it](mailto:info@aracne-editrice.it)

via Raffaele Garofalo, 133/A-B  
00173 Roma  
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-3202-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,  
di riproduzione e di adattamento anche parziale,  
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie  
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: febbraio 2010

## Indice

Introduzione	p.	7
--------------	----	---

### I. Numeri senza linguaggio

1.1. Le capacità numeriche degli animali	15
1.2. Il cavallo che sapeva contare	18
1.3. Uccelli, delfini e altro ancora	25
1.4. Scimmie matematiche	29

### II. L'innato senso del numero

2.1. L'abilità di calcolo dei bambini	39
2.2. La discriminazione delle quantità	42
2.3. Operazioni aritmetiche	48
2.4. Il sistema approssimativo e quello esatto	54

### III. Numeri e linguaggio

3.1. La teoria del <i>bootstrapping</i>	61
3.2. L'influenza della cultura e del linguaggio	67
3.3. La cognizione numerica dei popoli "primitivi"	75
3.4. I Mundurucuru	80

## **IV. Numeri e cervello**

<b>4.1. La cognizione numerica degli adulti</b>	93
<b>4.2. Modelli cognitivi e patologie del calcolo</b>	98
<b>4.3. Evidenze sperimentali</b>	111
<b>4.4. Contributi genetici</b>	119
<b>4.5. Numeri e spazio</b>	126
<b>Conclusioni</b>	133
<b>Bibliografia</b>	137

## Introduzione

Dopo Galileo Galilei la scienza moderna ha definitivamente consacrato alla matematica un posto di primo piano, tanto che i progressi realizzati nelle scienze, che si presentano come pure, sembrano coestensivi a quelli ottenuti nel pensiero matematico. Tuttavia, è altresì certo che gli sviluppi del pensiero matematico sono stati sostenuti in maniera determinante dai progressi registrati precedentemente in aritmetica, nell'analisi cioè del concetto di numero. Non c'è alcun dubbio: la matematica non ha giammai costituito la rampa di lancio dei numeri, è piuttosto vero l'inverso. Lo straordinario successo dei numeri è dovuto al fatto che questi sono coestensivi con particolari oggetti spazio-temporali, vale a dire i numerali: infatti, in fondo quando parliamo dei numeri non stiamo facendo altro che parlare del significato dei numerali. Se qualcuno ci dice che "due più quattro fa sei", non pensiamo che sta usando un linguaggio differente in cui il suo "sei" corrisponde al nostro "otto" ma pensiamo semplicemente che egli sta sbagliando ad eseguire la somma tra i due numeri (due e quattro) che entrambi chiamiamo allo stesso modo.

John Locke nel suo *Saggio sull'intelletto umano* si chiede perché non possiamo usare i numeri "senza le parole o i caratteri o qualche altro segno esteriore" mentre, al contrario, siamo capaci di pensare il bianco o il nero o altri oggetti "senza l'uso di nessun nome o segno, col far rivivere semplicemente le loro idee". Per Locke questo dipenderebbe dal fatto che l'idea di unità è talmente semplice che le idee di unità ripetute "non sarebbero mai distinte, ma formerebbero un cumulo disordinato e caotico, se io non avessi parole o segni, come uno, due, tre ecc., per conoscerle, determinarle e disporle nell'ordine dovuto". In questo modo, il filosofo inglese, coglie una differenza essenziale tra il nostro uso dei numeri e quello degli altri oggetti attraverso il ruolo insostituibile che, in virtù della generatività del linguaggio, giocano le parole e i segni numerici. Una differenza talmente importante che, come sappiamo, ha giustificato il richiamo in filosofia della matematica, del logicismo. Certo, nel suo tentativo di ridurre i numeri a oggetti logici Gottlob Frege (in quanto massimo esponente del logicismo) fallisce. Ma rimane di certo in piedi la questione circa la natura del numero.

E dunque: cosa sono i numeri? I numeri sono qualcosa o nulla? Dal 1884, anno de *I fondamenti dell'aritmetica* di Frege, la questione della dimensione ontologica del numero ha catturato l'interesse e l'attenzione di filosofi, matematici e logici. Purtroppo però secoli (o forse dovremmo dire millenni) di ricerche matematiche portentose e di speculazioni filosofiche erudite hanno contribuito relativamente poco a far luce su alcune questioni fondamentali, prima fra tutte se la matematica (vista la sua irragionevole a volte efficacia) gode di una esistenza completamente indipendente dalla mente umana, oppure se essa non è altro che la caratteristica più rappresentativa dell'attività umana. In altri termini, i numeri (e la matematica) sono una scoperta o una invenzione della mente umana?

Già alcuni filosofi dell'antica Grecia, Pitagora e Platone in particolare, stupiti di fronte all'apparente capacità della matematica di dar forma all'universo e di governarlo, asserivano che essa doveva per forza di cose esistere al di sopra del potere degli uomini di alterarla, dirigerla o influenzarla. Pur con alcune differenze il *cantus firmus* del platonismo matematico è dato dalla credenza nell'esistenza di un universo astratto, extramentale, di strutture e oggetti matematici. Le verità della matematica risultano pertanto essere atemporali, indipendenti dal fatto che siamo vivi o morti, che astraiano e che ne diventiamo consapevoli. Per i platonisti allora la matematica può tranquillamente fare a meno di noi, nel senso che dietro agli oggetti matematici non si nascondono meccanismi di comprensione, di manipolazione o convenzioni. Analogamente, esistono autonomamente i numeri. Come scrive Martin Gardner in *Are Universes Thicker Than Blackberries?* “Se due dinosauri raggiungessero altri due dinosauri in una radura ci sarebbero quattro dinosauri anche se non ci fossero uomini ad osservarli e gli animali fossero troppo stupidi per saperlo”.

Nel 1989, il matematico francese Alain Connes, vincitore di due dei più prestigiosi premi matematici: la Medaglia Fields e il Premio Crafoord, espresse in maniera chiara la sua opinione a tal riguardo: “una volta che un concetto matematico, per esempio, quello di numeri naturali  $1, 2, 3, 4, \dots$ , è stato compreso, allora ci si trova davanti a dati innegabili, quali  $3^2 + 4^2 = 5^2$ , a prescindere da quello che ne pensiamo”.



Nondimeno, alcuni studiosi del XX secolo si sono schierati apertamente contro questo modo di pensare. I matematici Edward Kasner e James Newman, ad esempio, espressero esattamente il punto di vista opposto a quello platonico in *Matematica e Immaginazione* scrivendo che: “In conseguenza del coraggioso spirito critico che ha generato le eresie, abbiamo superato il concetto che le verità matematiche hanno un’esistenza indipendente e separata dalle nostre menti. Ci appare persino strano che un tale concetto sia potuto esistere. Eppure è quello che Pitagora avrebbe pensato e con lui Cartesio e centinaia di altri grandi matematici prima del XIX secolo. Oggi la matematica non è più prigioniera; si è sbarazzata delle sue catene”. Ma è davvero così? Altri due grandi matematici contemporanei, Philip Davis e Reuben Hersh, sul tema se la matematica sia un’invenzione o una scoperta, scrivono nel loro libro *L’esperienza matematica* che “La maggior parte di coloro che scrivono sull’argomento sembrano concordi nel dire che il tipico matematico di professione è un platonista (considera la matematica una scoperta) nei giorni feriali e un formalista (considera la matematica un’invenzione) la domenica. Cioè, quando fa matematica è convinto di avere a che fare con una realtà oggettiva di cui sta cercando di determinare le proprietà. Ma poi, quando viene sfidato a fare un resoconto filosofico di questa realtà, trova più facile fingere che dopotutto non ci crede”.

Effettivamente, sembra che il vero punto debole del platonismo sia da individuare proprio sul fronte epistemologico e consisterebbe nell’incapacità di spiegare il modo in cui abbiamo conoscenza di oggetti casualmente inerti e inostensibili (vale a dire non nello spazio-tempo) come gli oggetti matematici. Come viene esplicitato da non pochi filosofi senza la possibilità di dare una risposta a questa domanda la spiegazione avanzata dai platonisti è perfino inutile. Tuttavia, una simile critica epistemologica sottintende che sia vera la teoria naturalistica della conoscenza, per la quale c’è solo un modo di conoscere, e questo modo è empirico: la teoria, in altre parole, che sostiene che l’unica conoscenza possibile per creature immerse in un universo fisico quali noi siamo, appartenenti a ciò che chiamiamo natura, è la conoscenza a posteriori. Per questo motivo, contrariamente alla precisione e all’accuratezza che contraddistinguono le speculazioni matematiche, ci troviamo di fronte a divergenze di opinione tipiche dei dibattiti

filosofici. In altre parole, rendere chiaro se la matematica sia stata inventata o scoperta sembra essere una questione che non attiene alla matematica. Mentre, da un lato, il concetto di “scoperta” implica semplicemente la preesistenza in qualche universo, reale o metafisico, il concetto di “invenzione” coinvolge la mente umana e, pertanto, essa dovrà per forza di cose essere appannaggio di una combinazione di discipline come, ad esempio, la filosofia, la psicologia, le scienze cognitive, l’antropologia, ma di certo non unicamente la matematica. Dopotutto, i matematici non sono di certo attrezzati al meglio per rispondere a delle domande riguardanti la mente umana così come i poeti, che fanno meraviglie grazie al linguaggio, non sono i migliori linguisti.

In ogni caso, sia se la matematica fosse una invenzione, o se fosse totalmente frutto di scoperte, queste sarebbero state comunque compiute dai matematici usando il proprio cervello. Ecco perché, visti gli enormi progressi ottenuti in anni recenti nel campo delle scienze cognitive, era naturale aspettarsi che psicologi e neuroscienziati rivolgessero la loro attenzione alla matematica e, in particolare, alla ricerca dei fondamenti della matematica nella cognizione umana. Questo potrebbe eventualmente portare una risposta alla domanda dello statuto delle entità matematiche definendole a partire dalle costruzioni fatte dal cervello (umano). Le ricerche di Stanislas Dehaene e dei suoi collaboratori sulla natura ontogenetica e filogenetica delle capacità aritmetiche dell’uomo illustrano bene il modo in cui alcuni settori delle scienze cognitive cominciano a penetrare il mistero della natura del pensiero matematico. Secondo il neuroscienziato francese, le scoperte relative alla psicologia dell’aritmetica confermano che il numero appartiene a quelle categorie “innate” attraverso cui comprendiamo la realtà che ci circonda. L’affermazione, comunque, più categorica nella disputa “invenzione contro scoperta” si deve al linguista cognitivo George Lakoff che insieme allo psicologo cognitivo Rafael Núñez in *Da dove viene la matematica* affermano: “La matematica è una parte naturale dell’essere umano. Ha avuto origine dai nostri corpi, dai nostri cervelli e dalle nostre esperienze quotidiane nel mondo. La matematica è un sistema di concetti umani che fa un uso straordinario degli strumenti ordinari della cognizione umana”.

Gli scienziati cognitivi basano le loro conclusioni su quelle che considerano un *corpus* di dati convincenti frutto di numerosi esperimenti. In questo libro ci siamo preoccupati di analizzare le teorie cognitive sulla matematica partendo dalla prima, vale a dire quella di Piaget, secondo il quale esiste un rapporto inscindibile tra strutture di intelligenza generale ed evoluzione della competenza numerica. Sotto l'influenza di Piaget, si è per molto tempo pensato che il bambino nascesse vergine di tutte le conoscenze sul mondo. Tuttavia, in questi ultimi 25 anni, il modello piagetiano è stato rimesso in discussione per l'evidenza di alcune capacità numeriche negli animali e nei bambini. Oggi, la maggior parte dei ricercatori concorda sul fatto che certe capacità matematiche sono innate: ad esempio, tutti gli esseri umani (anche i bambini ancora in fase pre linguistica) sembrano essere in grado di determinare con un'occhiata se sono di fronte a uno, due o tre oggetti (una capacità chiamata "subitizzazione"). Inoltre, esperimenti sulla cognizione numerica hanno messo in evidenza, nell'adulto, il ruolo importante svolto dai processi non verbali e hanno mostrato come la logica non sia l'aspetto primordiale e principale della rappresentazione numerica.

Alcuni dei test effettuati dagli scienziati cognitivi tramite l'utilizzo di tecniche di *imaging* funzionale dell'attività cerebrale, effettuate durante l'esecuzione di compiti matematici, identificano in questo modo regioni del cervello che appaiono cruciali per destreggiarsi tra numeri e operazioni matematiche ma che, al contrario, non risultano essere essenziali per il linguaggio. A questa conclusione si è anche arrivati prendendo in esame la competenza matematica di alcuni popoli (come ad esempio i Mundurucuru, un gruppo di cacciatori dell'Amazzonia) che pur non possedendo un lessico numerico ricco quanto quello occidentale sono altresì capaci (come gli occidentali) di effettuare dei compiti non simbolici, di confrontare delle grandi quantità con le stesse prestazioni riscontrate nei soggetti occidentali e di risolvere in maniera approssimativa operazioni elementari di addizione e sottrazione. La nostra cultura, diversamente da quanto accade in Amazzonia, ci ha abituati ai simboli numerici: i numeri scritti in base 10 in virtù delle cifre arabe, tale che "1053", si esprime grazie all'aiuto dei nomi dei numeri tale che "mille cinquanta tre". Tuttavia, la psicologia cognitiva mostra l'importanza negli animali e nei bambini, della percezione

non-simbolica del numero, in cui la quantità 13 può essere presentata sotto la forma concreta di un gruppo di 13 punti o di una sequenza di 13 suoni. Il numero è in questo modo considerato come la proprietà di un insieme e a cui ci si riferisce spesso con i termini tecnici di cardinalità o di numerosità. Il concetto di numero, nell'adulto istruito, consiste dunque nell'integrazione armoniosa di queste differenti sfaccettature simboliche e non simboliche del numero. Va da sé che il matematico desidererebbe prolungare quest'elenco in direzione degli interi relativi, delle frazioni, dei numeri reali o complessi, delle matrici, ecc. Per i matematici si può considerare numero tutti quegli oggetti mentali suscettibili d'essere manipolati secondo alcune operazioni coerenti. Per il momento, tuttavia, la scienza cognitiva non si è affatto dedicata a questi concetti matematici di più alto livello.

Il volume è così articolato. Nel capitolo I, viene delineata una rassegna di alcuni tra i lavori empirici più significativi riguardanti la cognizione numerica degli animali. Un'attenzione particolare è stata dedicata quindi alla questione metodologica, specificando i meriti e i limiti dei lavori sperimentali riportati. Il capitolo II, si apre con una trattazione di quello che è stato il pensiero di Piaget, a cui farà seguito l'esposizione del dibattito sulla cognizione numerica dei bambini. Nel capitolo III, viene delineato il quadro di riferimento di quegli studi che permettono di trattare la questione del ruolo del linguaggio nello sviluppo della cognizione numerica e, più precisamente, il ruolo del lessico numerico da una parte e la pratica del conteggio dall'altra. Infine, nel capitolo IV, è introdotto il quadro epistemologico e metodologico di riferimento di alcuni modelli cognitivi della capacità di calcolo. Abbiamo cercato di far emergere, per ognuno di essi, le eventuali previsioni che conseguono dall'impostazione teorica. Inoltre, ci siamo occupati dei dati neuroscientifici ed in particolare di quelli provenienti dallo studio delle patologie legate al calcolo (acalculia, discalculia) al fine di mostrare come l'abilità di calcolo rappresenta un processo cognitivo estremamente complesso in cui sono coinvolte diverse funzioni quali funzioni di capacità verbali, spaziali, di memoria e le abilità di esecuzione.

Riassumendo, il libro cercherà di fare chiarezza su come caratterizzare le nostre rappresentazioni di numerosità che sono all'origine delle nostre intuizioni numeriche e facendo questo porteremo delle ragioni

abbastanza valide a favore di un collegamento tra matematica e mente-cervello umano, contro una visione platonista della matematica. Si vedrà come il motto dell'intero volume potrebbe essere "Pitagorici si nasce, matematici (di professione) si diventa".

Per la realizzazione di questo libro mi ritrovo ad avere debiti con molte persone. Ho un debito specifico, anzitutto, nei confronti di Pietro Perconti, che ha letto il manoscritto con la precisione che lo contraddistingue e i cui suggerimenti e consigli lo hanno migliorato in molti modi. E' altresì merito suo se in questi anni ho saputo apprezzare e superare le barriere tra cultura umanistica e cultura scientifica: spero che questo volume lo possa ripagare di così tanta fiducia. Devo molto anche a Ninni Pennisi e al suo amore per le patologie del linguaggio, un po' del quale è passato anche a me ispirando indirettamente alcune pagine di questo libro. Forse non condividerà tutto quello che ho scritto ma conto sul fatto che ci troverà qualcosa di nuovo. Sono indebitato anche con Franco Lo Piparo che durante gli anni duri del Dottorato di Palermo mi ha permesso di scrivere in totale libertà il testo che adesso ho ripreso e sfruttato. Un debito ugualmente profondo ho con gli amici e colleghi del Dipartimento di Scienze Cognitive di Messina, in particolare con Francesco Parisi, Mimma Bruni, Alessandra Falzone, Andrea Velardi, Caterina Scianna, Sebastiano Nucera, Valentina Cardella. Infine, vorrei esprimere la mia sincera gratitudine nei confronti di Elvira Bruni, senza il cui incoraggiamento e aiuto queste pagine non sarebbero mai esistite.



# I. Numeri senza linguaggio

“Questo grandissimo libro (io dico l’universo)  
non si può intendere se prima non s’impara  
a intender la lingua, e conoscer  
i caratteri, ne’ quali è scritto.  
Egli è scritto in lingua matematica”.  
Galileo Galilei

## 1.1. Le capacità numeriche degli animali

Una delle preoccupazioni centrali della psicologia comparata è la ricerca delle basi biologiche della conoscenza umana con il duplice obiettivo di identificare, da un lato, le capacità cognitive che sono alla base degli adattamenti evolutivi e, dall’altro, di poter delineare le tappe attraverso le quali la conoscenza si è evoluta tra le specie animali (in particolare i primati) e l’uomo. In questa prospettiva, vi è quindi almeno una buona ragione per studiare le conoscenze legate alla valutazione delle “quantità” da parte degli animali: vale a dire l’importanza che questo tipo di capacità riveste per gli animali nelle situazioni quotidiane.

Infatti, la capacità di valutare rapidamente delle quantità numeriche è utile nei comportamenti di ricerca del cibo quando si tratta, ad esempio, di stimare l’interesse energetico che può offrire una quantità di frutta presente in un albero. Allo stesso modo, essere capaci di valutare il numero di rami disponibili per costruire un nido, sembra costituire un vantaggio in termini di tempo, di spostamento e di efficacia generale. Queste capacità sono allo stesso modo vantaggiose nelle situazioni sociali: ad esempio, quando nei gruppi vi sono occasioni di combattimenti o scambi aggressivi tra congeneri (situazioni molto frequenti nei primati e nei vertebrati superiori), una valutazione precisa del numero degli avversari o del numero degli alleati può svolgere un ruolo determinante.

Un'altra buona ragione per interessarsi alla cognizione numerica in una prospettiva comparativa è la ricerca dei limiti di queste conoscenze negli animali. Tutto ciò potrebbe, ad esempio, dimostrare la specificità della cognizione numerica umana ma, soprattutto, definire le condizioni del suo sviluppo negli uomini. Parallelamamente potremmo quindi spiegare le conoscenze numeriche degli esseri umani in termini prettamente evolutivi: l'uomo, infatti, possiede un sistema capace di manipolare delle quantità e visto che dopotutto esso appartiene al regno animale è possibile credere che i vicini dell'uomo nella catena evolutiva siano dotati, almeno in germe, dello stesso sistema. Tuttavia, le cose non sono così semplici. Gli approcci cognitivi e cognitivisti al problema della conoscenza numerica hanno visto la luce soltanto in questi ultimi dieci anni e la stessa scienza cognitiva è ancora oggi ferma ad un approccio pluridisciplinare o per meglio dire ferma ancora nell'essere una "collezione di diverse discipline" il cui inventario cambia da autore ad autore. Questo limite si riflette soprattutto nella manifesta supremazia di alcune discipline che trattano sia del funzionamento del sistema nervoso a livello molecolare o neuronale, sia del funzionamento del cervello umano nella sua attività di astrazione e di ragionamento (linguaggio, logica, filosofia), nei confronti di altre discipline (ad esempio, l'etologia) che partecipano invece, al programma di ricerca delle scienze cognitive solo come un allargamento naturale delle problematiche delle prime. Inoltre, se si continua a considerare la scienza cognitiva al plurale ovvero come "scienze cognitive" o come abbiamo detto prima una "collezione di discipline" si può facilmente andare incontro ad altri due problemi. Il primo è quello di continuare, come si è fatto per anni, a considerare la cognizione, attraverso una non celata prospettiva antropocentrica, proprietà esclusiva degli esseri umani. Il secondo è quello di non riuscire a colmare lo scarto teorico e metodologico che ha diviso per anni le neuroscienze e la neurobiologia da una parte e la psicologia dall'altra.

Il grande successo delle tecnologie di visualizzazione cerebrale ha fatto troppo presto dimenticare che così come le altre metodologie che mirano a spiegare i complessi rapporti fra cervello e comportamento, anche le più recenti tecniche di visualizzazione, all'interno del loro apparato teorico, annoverano una serie di metodi presi in prestito dalla psicologia e che hanno la prerogativa di rendere più chiari i dati osser-



vati e di contenere il possibile proliferare di spiegazioni dei fenomeni esaminati.

Ciò ha un'importanza sostanziale per il semplice fatto che vengono applicati modelli comportamentali all'interpretazione di dati di natura neurofisiologica. Questi problemi possono essere superati sia grazie ad indagini che si propongono di spiegare fenomeni identici a livelli di integrazione differenti, (ad esempio, dal più semplice al più complesso), sia in virtù dell'utilizzo del paradigma evoluzionista. Infatti "l'ordine naturale" (*Scala naturae*) si basa su una presunta complessità della struttura degli esseri viventi, in particolare quella del sistema nervoso. Il posto dell'uomo al vertice di questa scala gli viene quindi conferito in modo specifico dal suo grado di complessità cerebrale.

Ma l'uomo, benché sia posto in cima, non rimane che un "prodotto" dell'evoluzione, cosa che rimette in questione l'a priori che non esiste cognizione che nella specie umana. Pertanto, così come gli altri processi di acquisizione di conoscenza, anche la rappresentazione del numero risulta essere biologicamente fondata a causa di pressioni selettive che, nel corso dell'evoluzione, hanno favorito quegli individui che sono stati in grado di compiere delle scelte in contesti dove la capacità matematica avrebbe permesso loro la risoluzione vantaggiosa di determinati problemi.

Nel prosieguo, proporrò sia le osservazioni naturalistiche, che evidenziano l'importanza ecologica del possedere capacità di calcolo, sia alcune ricerche effettuate in laboratorio che, viceversa, permettono di indagare i limiti e le potenzialità di tali competenze in maniera sistematica. In particolare, riporteremo gli studi effettuati sia tramite rigide procedure di addestramento, sia quelli effettuati attraverso l'osservazione delle preferenze spontanee all'interno di un ambiente in cui vengono controllate alcune variabili numeriche. Maggiore risalto verrà dato a quelle ricerche che hanno tentato di mettere in evidenza le generalizzazioni tra differenti modalità.

Infatti questi studi hanno esaminato se le prestazioni numeriche degli animali sono dovute ad una proprietà astratta della numerosità o a qualche proprietà percettiva che dipende dalla modalità di presentazione.

## 1.2. Il cavallo che sapeva contare

Sono numerosi i racconti che narrano di animali straordinari capaci di compiere veri e proprie prodezze matematiche. Uno di questi risale al Settecento e parla di un corvo capace di contare fino a cinque e di un contadino che, per difendere le sue proprietà dalle pericolose incursioni dell'animale, si era messo in testa di ucciderlo. Il corvo però, non appena il contadino si avvicinava al nido, costruito in cima a una torre, volava via per poi ritornarvi quando questo si allontanava. Per catturare l'animale il contadino decise di chiedere aiuto ad un suo vicino ed insieme si appostarono nella torre. Dopo un po' di tempo uno dei due uscì. Ma l'animale non si fece ingannare e ritornò al suo nido solo dopo che uscì dalla torre anche il secondo contadino. Per riuscire ad ingannare l'uccello, il contadino chiese allora aiuto ad altri due uomini, poi tre. Ma niente, il corvo ogni volta aspettava che fossero usciti tutti. Fin quando in sei, i contadini ebbero la meglio. Infatti, l'animale aspettò che uscissero solo i primi cinque e quando fiducioso ritornò al nido c'era il sesto ad aspettarlo che lo uccise.

Tuttavia, la storia più famosa ha per protagonista Hans: un cavallo maschio arabo, di linea russa, che il suo proprietario, il barone Wilhem von Osten, aveva acquistato per pochi soldi a causa di un lieve difetto fisico. All'inizio del XX secolo, a Berlino, von Osten sosteneva che dopo dieci anni di dura preparazione, era riuscito a far imparare l'aritmetica al suo cavallo. Ben presto la notizia fece il giro della Germania e sia Hans sia il suo proprietario divennero delle celebrità. Ma cosa sapeva fare esattamente Hans? Von Osten scriveva 2 su una lavagna ed Hans batteva due colpi con lo zoccolo; sulla lavagna compariva il tre ed Hans batteva allora tre colpi con lo zoccolo. E così via. In poco tempo il cavallo era in grado di battere i colpi giusti per i numeri fino a 10.

Incoraggiato dai successi di Hans, il suo proprietario cercò di insegnare al cavallo compiti sempre più difficili come somme e sottrazioni, problemi con le radici quadrate ed infine le frazioni. Purtroppo per von Osten, gli scettici accademici tedeschi, pur essendo meno numerosi dei loro concittadini creduloni, ordinarono una commissione, la *Hans Commission*, formata da due zoologi, lo psicologo Carl Stumpf ed un famoso addestratore di cavalli; questa doveva stabilire se

c'erano trucchi nel comportamento dell'animale. Dopo numerosi test, nel 1904, la commissione concluse che non c'erano trucchi e che l'intelligenza e la bravura del cavallo erano autentici.

Tuttavia, la conclusione a cui era giunta la *Hans Commission* non convinse Oskar Pfungst, allievo di Stumpf, che chiese insistentemente di sottoporre ad Hans altri test. In particolare, Pfungst sottopose il cavallo a due tipi di situazioni. Nella prima, Pfungst chiese a chi poneva le domande aritmetiche ad Hans di allontanarsi dal cavallo, notando in questo modo che la correttezza delle risposte date dall'animale diminuirono sensibilmente. La seconda situazione, prevedeva che chi poneva le domande al cavallo non doveva conoscere le risposte: in questo caso le risposte di Hans si ridussero sensibilmente quasi allo zero. In questo modo i test di Pfungst evidenziarono che Hans non aveva nozioni di matematica, bensì un intuito ed una sensibilità straordinaria a "recepire" ad ogni domanda, il respiro, la postura e l'espressione facciale delle persone che ponevano le domande e che conoscevano la risposta giusta. Quando Hans batteva lo zoccolo dando la risposta giusta, la sottile tensione del volto scompariva dando modo ad Hans di accorgersi di ciò, in maniera tale da fermare il battere del suo zoccolo, appunto sulla risposta giusta.

Il caso di Hans mise in evidenza l'importanza di una corretta messa a punto degli esperimenti psicologici da sottoporre agli animali e, insieme a questo, la necessità di inventare metodi di ricerca più rigorosi. Le prime prove convincenti che alcuni animali possedessero realmente capacità numeriche risalgono agli anni Cinquanta e furono condotte dallo psicologo Francis Mechner. Nel paradigma sperimentale utilizzato da Mechner, dei topi venivano privati di cibo per un breve periodo ed introdotti in una gabbia contenente due leve, A e B. Per ottenere il cibo, il topo doveva inizialmente premere un certo numero di volte ( $n$ ) la leva A, quindi premere B. Se il topo premeva la leva B, prima che il numero  $n$  richiesto non fosse stato raggiunto, non solo non otteneva il cibo, ma avrebbero ricevuto una leggera scossa elettrica. Variando  $n$ , Mechner intendeva dimostrare che i topi erano capaci di adattare il loro comportamento: infatti, il numero medio di pressioni effettuate sulla leva A era fortemente correlato al numero minimo ( $n$ ) richiesto. In altre parole, se l'esperimento richiedeva quattro pressioni sulla leva A prima di premere la leva B, con il tempo i topi imparava-

no a premere la leva A “circa” quattro volte prima di premere la leva B. Si osservi che gli animali non imparavano mai a premere esattamente quattro volte la leva A prima di premere B, ma tendevano a sovrastimare le pressioni premendo quattro, cinque o sei volte la prima leva. Analogamente, i topi, sottoposti ad un esperimento che richiedeva che la leva A fosse premuta otto volte prima di B, imparavano a premerla per circa otto volte (Mechner, 1958). Una decina d’anni dopo, Platt e Johnson (1971), ottennero gli stessi risultati per dei numeri ( $n$ ) compresi fra 4 e 24. Tuttavia, nonostante i risultati dei due studi siano coerenti, resta un’ambiguità di fondo: come possiamo, infatti, essere sicuri che i topi “rispondono” sulla base del numero di pressioni e non sulla base di qualche altro parametro come, ad esempio, il tempo speso per premere la leva o sull’energia totale spesa.

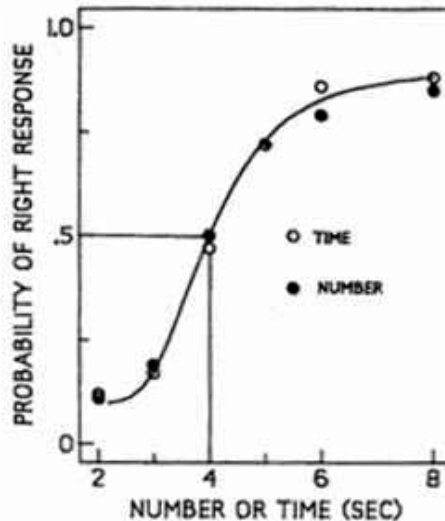
Qualche anno dopo la pubblicazione del suo primo studio, Mechner ed il suo collega, Laurence Guevrekian, tentarono di dare una risposta a questo difficile quesito, mettendo a punto una successiva serie di esperimenti nei quali i topi venivano sottoposti a situazioni di privazione d’acqua. Mechner mostrava che più i topi erano assetati, più le loro pressioni sulla leva avevano un ritmo sostenuto. Di conseguenza, il tempo fra la prima pressione della leva A e la pressione della leva B era ridotto quando i topi erano assetati. Tuttavia, malgrado la maggiore velocità con cui veniva premuta la leva, i topi che avevano imparato a premere A quattro volte continuarono a farlo. Ciò convinse lo studioso che il tempo non aveva nessuna influenza: i topi stimavano il numero. Parallelamente, in un test di controllo, in altri topi che dovevano semplicemente attendere un tempo prestabilito fra una prima pressione di A ed una successiva pressione di B, le privazioni d’acqua non avevano alcuna influenza sulla risposta (Mechner e Guevrekian, 1962).

A partire da questi primi studi, altri autori hanno condotto nuovi esperimenti nei quali venivano testate diverse specie nella modalità visiva, uditiva, tattile e cinestetica, con la volontà di dimostrare se le prestazioni numeriche degli animali esaminati fossero dovute ad una proprietà astratta della numerosità o a qualche proprietà percettiva dipendente, in qualche modo, dalla modalità di presentazione. Un utile esperimento condotto in tal senso è stato quello proposto da Fernandes e Church (1982) nel quale dei topi venivano sottoposti a discriminare

sequenze contenenti 2 o 4 suoni. Ancora una volta, i topi venivano introdotti in una gabbia in cui vi erano due leve, una leva corrispondeva al “2”, l’altra al “4”. Gli sperimentatori, per esser sicuri che gli animali scegliessero la leva esclusivamente sulla base dei parametri numerici, elaborarono con molta cura gli stimoli da associare a ciascuna numerosità (2 e 4), calcolando sistematicamente la durata di ciascun suono, l’intervallo fra i suoni, il ritmo della sequenza e l’energia totale sonora. Due anni dopo Church insieme al collega Meck, per studiare la stessa questione, utilizzarono un metodo diverso: essi infatti addestrarono un gruppo di topi a premere una leva quando venivano presentati due suoni ed un’altra leva quando venivano presentati otto suoni (Meck e Church, 1984). Durante la fase iniziale dell’esperimento, Meck e Church sottoposero i topi esclusivamente a stimoli in cui la numerosità e la durata erano perfettamente correlati: la prima sequenza conteneva due suoni e durava due secondi, la seconda sequenza conteneva otto suoni e durava otto secondi. I topi imparavano così ad associare queste due sequenze a due leve differenti. In seguito i topi venivano sottoposti a delle nuove sequenze: nella prima sessione, la numerosità della sequenza rimaneva costante (uguale a 4) ma veniva fatta variare la durata tra i due e gli otto secondi. In un’altra sessione invece la durata della sequenza rimaneva costante (4 secondi) mentre veniva fatta variare la numerosità tra due e otto. I risultati ottenuti misero in luce che i topi erano capaci di generalizzare le associazioni, apprese durante la fase iniziale del test, tanto sulla base della durata che sulla numerosità.

In un’altra fase dell’esperimento i toni venivano sostituiti da flash luminosi: in questa nuova condizione sperimentale, alcuni topi dovevano premere la prima leva quando venivano presentati due flash e la seconda leva quando venivano presentati quattro flash. Pur impiegando maggior tempo a riconoscere l’accoppiamento rispetto ai topi della prima fase sperimentale, gli animali riuscirono nel compito mostrando come essi sapessero rappresentarsi i numeri in maniera amodale.

Incoraggiati da questi risultati, gli autori sottoposero i topi ad un test di riconoscimento della numerosità in cui veniva effettuato un trasferimento fra la modalità visiva, uditiva e tattile.



**Figura 1. Le risposte dei topi nel paradigma sperimentale di Meck e Church (Meck e Church, 1984)**

In questo caso, i topi inizialmente venivano sottoposti ad un test di riconoscimento di sequenze di due 2 e 4 suoni; subito dopo venivano invece testati utilizzando degli stimoli visivi (delle sequenze di flash). Confrontando i topi con un altro gruppo di controllo si notò che nel primo gruppo di topi la leva che era stata associata ai 2 suoni resta associata ai 2 flash; nel secondo gruppo le due leve vengono regolarmente scambiate. Meck e Church ritennero che la differenza osservata nei due gruppi dipendesse dal fatto che il primo gruppo di topi avesse effettuato un trasferimento della distinzione imparata dagli stimoli uditivi agli stimoli visivi. Successivamente, mostrarono un trasferimento tra stimoli uditivi e stimoli tattili, pervenendo ad un analogo risultato (in questa prova stimoli che contenevano 4 suoni vennero alternati a 4 scosse elettriche).

Tuttavia, alcuni studiosi hanno avanzato dei dubbi rispetto alle conclusioni di questi ultimi esperimenti. Davis ed Albert (1987), ad esempio, hanno sottoposto dei topi a test dove essi dovevano distin-

guere stimoli composti da 3 suoni successivi a degli stimoli di 2 o 4 suoni. In seguito, gli stessi topi venivano esposti a degli stimoli di 2, 3 o 4 flash. In questo esperimento gli autori non hanno riscontrato alcun trasferimento della capacità di discriminare la numerosità dalla modalità visiva a quella uditiva. Alle stesse conclusioni arrivarono Davis e Perruse (1988), i quali sostennero che sebbene gli animali possono arrivare dopo duri addestramenti a distinguere diverse numerosità, tuttavia, essi lo fanno come ultima risorsa, vale a dire quando vengono eliminate tutte le altre informazioni. Ad esempio, nel caso in cui ad un topo, nel risolvere un compito, viene data la possibilità di decidere se considerare le differenze di numerosità o, al contrario, l'area di una superficie; l'animale allora sceglierà di decodificare l'area di superficie e non la numerosità. Inoltre, per quanto riguarda l'esperimento di Meck e Church, gli autori avanzarono la possibilità che i topi abbiano attuato le loro discriminazioni sulla base della quantità d'energia contenuta dagli stimoli: in questo modo, gli stimoli di 2 suoni che totalizzano meno energia sonora rispetto agli stimoli di 4 suoni, vengono associati agli stimoli di 2 flash che contengono meno energia luminosa rispetto agli stimoli di 4 flash.

Pertanto, si può constatare che i risultati di questi primi esperimenti restano incerti: alcuni di essi mostrano che gli animali trasferiscono le loro capacità numeriche da una modalità ad un'altra; in altri si constata, invece, l'assenza di un questo trasferimento. Ciò che è più evidente, comunque, è che i compiti a cui sono sottoposti gli animali prevedono un addestramento considerevole. Prima che gli animali, infatti, riescano a risolvere l'operazione assegnatagli debbono superare un centinaio di prove di addestramento. Si può pertanto supporre che pur essendo l'animale capace di compiere delle distinzioni quando viene forzato ad imparare una regola, tuttavia, diverso potrebbe essere il suo comportamento spontaneo. È infatti noto in letteratura come nei compiti di discriminazione numerica che si basano sulle preferenze spontanee le prestazioni degli animali siano inferiori rispetto a quelle che evidenziano in seguito a rigide procedure di *training* (Hauser e Spelke, 2004). Questo potrebbe significare che la numerosità non è una proprietà che questi utilizzano come elemento naturale. Questa tesi tuttavia sarebbe contraria agli argomenti evolutivi secondo cui la rappresentazione della numerosità è un tratto selettivo presente negli a-

nimali in una forma più o meno rudimentale. Diverse ricerche hanno, infatti, messo in evidenza comportamenti allo stato selvaggio come, ad esempio, quando gli animali cercano del cibo o quando nasce una contesa, in cui sembra intervenire la quantificazione.

È il caso, ad esempio, di un esperimento intrapreso dalla ricercatrice Karen McComb e colleghi (McComb *et al.*, 1994) il quale mostrava che dei leoni che si trovavano in uno stato selvaggio, nel parco nazionale Serengeti in Tanzania, si dirigevano bellicosamente verso il luogo dove si trovava il cibo solo quando essi erano più numerosi dei nemici, dei quali si erano fatti sentire i ruggiti attraverso dei nastri registrati, ed evitavano di farlo nel caso contrario. Sembrava che i leoni fossero in grado di confrontare il numero dei ruggiti che avevano ascoltato sul nastro con il numero di leoni del proprio gruppo. I leoni, in questo caso, sembrano quindi rappresentarsi i numeri in maniera astratta, indipendentemente dalla modalità di presentazione o dagli attributi dello stimolo. Lo stesso fenomeno si è riscontrato anche nei maschi degli scimpanzè, i quali attaccano i gruppi vicini solamente se il loro gruppo è sufficientemente numeroso per sopportare l'attacco (Wilson *et al.*, 2001).

Purtroppo, i test di scelta spontanea presentano già in partenza un limite teorico molto importante che rende arduo il confronto con le ricerche intraprese con procedure di addestramento: vale a dire, se una scelta tra due stimoli numerici è sicuramente indice di una capacità di discriminazione, al contrario, l'assenza di una scelta non è indice di una reale mancanza della stessa capacità. Ad esempio, un animale può trovare vantaggioso scegliere il gruppo più numeroso tra 3 arance e quattro arance ma lo stesso potrebbe non avvenire tra 9 arance e 10 arance pur disponendo ugualmente di strutture cognitive necessarie per distinguere 9 da 10. Tuttavia, l'osservazione delle scelta spontanea presenta un aspetto positivo che come abbiamo visto non è presente nelle procedure di addestramento in laboratorio, vale a dire la possibilità che essa ha di avanzare ipotesi circa l'ambiente naturale in cui tale capacità potrebbe essere messa in atto, spingendosi in tal modo a congetturare circa l'importanza adattativa sul possedere un senso del numero e sull'uso concreto che questi animali farebbero di queste competenze nel loro ambiente. Vedremo nel prosieguo del capitolo altri studi che confermeranno questa tesi.



### 1.3. Uccelli, delfini e altri ancora

Numerosi studi applicativi hanno cercato di mettere in evidenza come alcuni uccelli potrebbero utilizzare il concetto di numero nella loro esistenza quotidiana. È il caso, ad esempio, delle folaghe che secondo una ricerca utilizzerebbero il concetto di numero per decidere o meno di deporre un ulteriore uovo, effettuando una sorte di confronto tra le uova deposte e il numero di uova di altri uccelli parassiti (Lyon, 2003). Da queste osservazioni, condotte in un ambiente naturale, risulta come le folaghe siano capaci di utilizzare una strategia di calcolo per espellere dal nido le uova estranee e mantenere contemporaneamente il numero di uova necessario ad ottimizzare la propria *fitness*. Uno dei primi ricercatori ad accorgersi delle capacità numeriche degli uccelli fu lo zoologo tedesco Otto Koehler che, a metà del Novecento, dimostrò come questi animali possiedono eccellenti capacità sia nel confrontare le grandezze di due insiemi presentati contemporaneamente, sia nel ricordare il numero di oggetti presentati in sequenza.

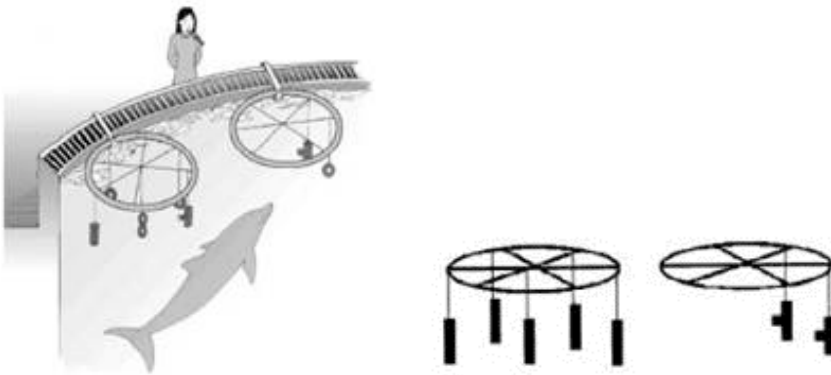
In un esperimento Koehler addestrò un corvo a riconoscere il numero di punti presenti su un cartoncino, uguale a quello posto su una scatola contenente del cibo. L'autore mostrò come i corvi riuscissero a distinguere 2, 3, 4, 5, 6 punti. In un altro esperimento, alcune taccole per ottenere del cibo dovevano aprire alcune scatole contenenti del cibo fino a raggiungere quattro o cinque pezzi di cibo. Ognuna di queste scatole, distribuite in modo casuale, in maniera tale che gli animali non potessero fare affidamento su altri parametri non numerici (ad esempio, la lunghezza della fila delle scatole che venivano aperte), conteneva da zero a due pezzi. In questo modo, gli animali erano costretti a basarsi sul numero di pezzi di cibo che avevano prelevato (Devlin, 2007).

Tramite una procedura simile, Emmerton e Delius (1993) hanno testato dei piccioni nel discriminare gruppi di puntini che differivano di una sola unità come 1 vs 2, 2 vs 3, 3 vs 4, ecc. I risultati di questo esperimento hanno mostrato una capacità di discriminazione sino ad un massimo di 6 puntini vs 7. Qualche anno dopo lo stesso Emmerton insieme ad alcuni collaboratori effettuarono un altro esperimento cambiando però le modalità (Emmerton *et al.*, 1997). Durante la fase iniziale dell'esperimento i piccioni imparavano a distinguere due diversi

tipi di stimolo ed ad associarlo ad una leva. Gli stimoli contenenti 1 o 2 elementi venivano associati alla leva A, quelli che contenevano 6 o 7 elementi alla leva B. Durante il test, ai piccioni venivano mostrati alcuni gruppi composti da 3, 4 o 5 elementi (insiemi di punti) e questi uccelli dovevano rispondere utilizzando sempre le stesse leve. Entrambi gli esperimenti evidenziarono la capacità da parte dei piccioni di generalizzare la discriminazione tra configurazioni di stimoli mai visti precedentemente.

Un ulteriore esempio delle capacità numeriche degli uccelli si deve alla ricercatrice Irene Pepperberg (2006) che ha addestrato un pappagallo a ripetere il numero degli oggetti che gli venivano mostrati, compito che richiede non solo la capacità di distinguere e di discriminare la numerosità ma anche di associare la risposta vocale a ciascun numero. Inoltre, molte specie di uccelli mostrano di possedere capacità numeriche semplicemente attraverso il conteggio di quante volte ripetono una certa nota nel loro canto. Infatti, i canti degli uccelli contengono sequenze sonore stereotipate e le varietà dialettali di tali canti differiscono nel numero di volte in cui le note vengono ripetute (Marler e Tamura, 1962). Il numero corretto di ripetizioni di note viene appreso e trasmesso alla prole a seguito della continua esposizione e, pertanto, anche se molti aspetti del canto caratteristico di un uccello potrebbero essere determinati geneticamente, sembra che gli uccelli riescano a stimare la lunghezza temporale dell'evento sonoro. Un simile concetto di ordinalità è stato messo in evidenza anche nei pulcini di pollo domestico, in un esperimento suddiviso in quattro fasi intrapreso da Rosa Rugani e colleghi (Rugani *et al.*, 2007). Nella prima fase dell'esperimento, i pulcini venivano addestrati a beccare il terzo, il quarto e il sesto gruppo di stimoli in una serie di dieci gruppi identici. Nelle fasi successive venivano cambiati l'ordine dei gruppi in maniera tale che i pulcini non potessero utilizzare indici spaziali. Nonostante questo, i pulcini furono in grado di identificare la posizione del gruppo corretto a dimostrazione del fatto che gli animali non facessero uso di indicatori spaziali, bensì di una scala ordinale interna che permetteva loro di identificare il disco contenente la quantità di cibo all'interno di una serie di possibili alternative. Per quel che concerne la competenza numerica dei mammiferi, numerosi studi si sono interessati a investigare le capacità di discriminazione dei delfini.

Ad esempio, Annette Kilian ed i suoi colleghi (Kilian *et al.*, 2003) hanno effettuato una ricerca sulla cognizione numerica dei mammiferi acquatici, sottoponendo un delfino *Tursiops truncatus* a discriminare tra un insieme di cinque oggetti ed un insieme di due.



**Figura 2. Rappresentazione del setting sperimentale per l'addestramento dei delfini. A destra, un particolare degli stimoli utilizzati (Kilian *et al.*, 2003)**

Gli oggetti per assicurarsi, ancora una volta, che la distinzione venisse effettuata solo sulla base di parametri numerici e non sulla forma o il disegno complessivo che gli oggetti davano luogo, avevano forme diverse e la loro posizione variava. Si notò che i delfini erano in grado di individuare l'insieme più numeroso anche di fronte a configurazioni nuove su cui non erano stati addestrati, dimostrando in tal modo come alla base delle proprie scelte vi fosse l'esclusivo affidamento a componenti numeriche. Qualche anno dopo, lo stesso gruppo di ricerca si propose di indagare se vi fosse nei delfini una particolare specializzazione emisferica nell'elaborazione dell'informazione numerica. In questo esperimento, vennero collocati nella vasca due gruppi di stimolo-

li di diversa numerosità e furono tenuti sotto controllo la forma e la posizione dei diversi gruppi. Nel primo test, in cui si chiedeva ai delfini di effettuare una discriminazione tra 2 elementi vs 5, gli animali mostrarono di risolvere il compito quando lo stimolo numerico veniva analizzato attraverso l'occhio destro. Nel test successivo, non venivano controllati i parametri non numerici, quali forma e posizione degli stimoli, ma vennero osservate le prestazioni degli animali nel discriminare due contrasti numerici: 2 vs 5 e 3 vs 4. I risultati mostrarono che l'animale era in grado di effettuare la discriminazione 2 vs 5 sia con l'occhio destro che col sinistro ma, viceversa, avevano mostrato una asimmetria nel secondo compito 3 vs 4 con una prestazione migliore quando gli stimoli venivano analizzati con l'occhio destro. Da questi dati gli studiosi conclusero che, alla luce delle caratteristiche anatomiche delle vie ottiche dei delfini, vi è una specializzazione dell'emisfero sinistro nei compiti di discriminazione di numerosità nei mammiferi acquatici (Kilian *et al.*, 2005).

Si è mostrato, inoltre, come i delfini siano capaci di eseguire dei giudizi di ordinalità. Un gruppo di ricerca composto da Kelly Jaakkola e colleghi (Jaakkola *et al.*, 2005) addestrarono, infatti, dei delfini tramite un rinforzo alimentare a scegliere di volta in volta la minore quantità tra due stimoli. La generalizzazione di questa regola basata sull'ordinalità fu poi estesa a nuove configurazioni di stimoli con numerosità mai incontrata nella fase di addestramento, dimostrando in questo modo che i delfini dispongono di strutture cognitive adeguate a riconoscere e rappresentarsi le numerosità su una scala ordinale.

Sebbene la maggior parte delle ricerche si sia rivolta prevalentemente allo studio delle capacità numeriche dei mammiferi e degli uccelli, vi è uno studio condotto da Claudia Uller e colleghi (Uller *et al.*, 2003) che ha cercato di rinvenire capacità di discriminazione numeriche anche nelle salamandre dal dorso rosso (*Plethodon cinereus*); cosa che risulta sorprendente visto la lontananza di questa specie nella catena evolutiva. In questo esperimento, le salamandre venivano inserite all'interno di un corridoio alle cui estremità si trovavano, in posizioni opposte, due contenitori contenenti una diversa quantità di stimoli di natura alimentare, nel caso specifico moscerini della frutta. Gli autori hanno osservato che le salamandre si avvicinavano verso la numerosi-

tà maggiore quando vi erano posti tre moscerini invece che due e, naturalmente, due moscerini rispetto a uno.

Al contrario, la discriminazione tra i due gruppi non avveniva quando erano posti nelle condizioni di discriminare tre moscerini rispetto a quattro o quattro moscerini rispetto a sei. Tuttavia, si possono avanzare alcuni dubbi su questo tipo di ricerca. Infatti, quando vengono utilizzati come stimoli degli esseri viventi, come succede in molte ricerche etologiche in cui ai soggetti vengono presentati come stimoli conspecifici o potenziali prede, la quantità di movimento dei gruppi-stimolo può fornire suggerimenti immediati su quale sia l'insieme più ampio. A maggior ragione nel caso delle salamandre, il cui sistema visivo risponde quasi esclusivamente a stimoli in movimento (Robins *et al.*, 1998). Nel caso dello studio di Uller, è probabile che uno o più moscerini si muovino e quindi la probabilità che il movimento di uno dei tre moscerini attiri la salamandra è maggiore del gruppo di due. Si rende quindi necessario, in questo tipo di ricerche, la realizzazione di procedure in grado di controllare i fattori percettivi. In mancanza di tale controllo, si può avanzare una generica distinzione tra una ricerca che ha alla base una generica discriminazione della quantità e quelle ricerche utili a rendere evidenti specifiche discriminazioni numeriche, vale a dire quando viene appurata l'esistenza di un reale sistema di calcolo numerico, senza alcun dubbio che i soggetti si affidino a variabili percettive. Inoltre, secondo alcuni autori, non è corretto parlare di cognizione numerica se la rappresentazione numerica in questione non può essere addizionata, sottratta o quanto meno ordinata (Gallistel e Gelman, 2000). Allo stato attuale la maggior parte delle ricerche che hanno focalizzato il proprio interesse su questo ultimo aspetto riguarda quasi esclusivamente gli studi condotti sulle capacità numeriche dei primati non umani.

#### **1.4. Scimmie matematiche**

Le ricerche più complete sulle competenze numeriche degli animali riguardano i primati e, data la loro vicinanza come specie agli esseri umani, le loro prestazioni hanno dato luogo a numerosi confronti e similitudini con comportamenti equivalenti riscontrati nei bambini e

negli adulti umani. Sulla scia dell'idea espressa da Gallistel e Gelman (2000), un esperimento che si è posto come obiettivo quello di studiare se gli scimpanzè possono ordinare numerosità, è il lavoro fondamentale di Brannon e Terrace (1998). In questo esperimento, due scimmie *rhesus* erano valutate rispetto all'abilità di ordinare coppie di numeri, presentati su un monitor, compresi tra 1 e 9 dopo essere state addestrate ad ordinare configurazioni contenenti da 1 a 4 elementi. Al fine di assicurarsi che gli animali risultassero sensibili alla numerosità e non a qualche altro parametro non numerico, gli autori utilizzarono una grande varietà di stimoli, cercando di ridurre al minimo i parametri non numerici. Infatti, per creare un puro test di conoscenza numerica ordinale, le scimmie non erano rinforzate in nessuna delle prove che contenesse un valore numerico nuovo, ma venivano rinforzate solamente nelle prove sperimentali iniziali contenenti due esemplari di numerosità 1-4. Inizialmente le scimmie imparavano a toccare sul monitor gli insiemi presentati: dal più piccolo al più grande, da 1 a 4 unità. Successivamente, nella seconda fase dell'esperimento, alle scimmie venivano presentate nuovi insiemi (che non erano stati incontrati precedentemente nella fase di addestramento) contenenti da 5 a 9 elementi. I risultati hanno messo in evidenza che le scimmie, riuscendo a generalizzare queste nuove operazioni a partire dalle prime prove, sono ugualmente capaci di ordinare le nuove immagini, da quelle che ne contengono di meno a quella che ne contiene di più, fornendo una delle prime evidenze del fatto che queste sanno rappresentarsi la numerosità degli stimoli e che le stesse possono essere ordinate. Tuttavia, gli stessi Brannon e Terrace (2000) hanno notato che, se viene dato alla scimmia il compito di ordinare le immagini in ordine discendente, l'animale non è più capace di generalizzare la sua conoscenza al cospetto della nuova numerosità.

La stessa difficoltà si riscontra anche quando alle scimmie viene dato come compito quello di ordinare le immagini in un ordine non monotono arbitrario (ad esempio, 4-1-3-2). Nonostante un lungo e intenso addestramento, la scimmia non imparava mai a rispondere all'ordine arbitrario riuscendo però, come abbiamo già visto, ad ordinare facilmente delle immagini secondo l'ordine crescente. Gli autori hanno avanzato due possibili spiegazioni di questo fenomeno: o l'ordine crescente è presente negli animali in maniera troppo forte per

essere inibito; oppure la difficoltà dell'ordine non monotono deriva dalla necessità d'identificare ciascun numero prima di poter rispondere. Infatti, per ordinare le immagini nell'ordine crescente, non è necessario sapere che l'uno contiene 1 elemento, l'altro 2 e così via.



**Figura 3. Setting sperimentale dell'addestramento delle scimmie**

Altresì è sufficiente saper riconoscere che l'uno contiene meno elementi di tutti gli altri, ecc. Al contrario, per ordinare le immagini nell'ordine 4-1-3-2, bisogna che l'animale sappia identificare la cardinalità di ciascun elemento. Si poteva ovviare questa difficoltà presentando alle scimmie una sequenza di tre numeri: infatti, in questo caso, non sarebbe stato più necessario identificare in maniera assoluta ciascun cardinale: i numeri potevano essere definiti semplicemente come "il più grande", "il più piccolo" ed "il numero che non è né il più grande né il più piccolo". Sfortunatamente gli autori non hanno sottoposto questo tipo di test alle loro scimmie.

Recentemente Jordan e Brannon (2006) hanno addestrato dei macachi *rhesus* a “puntare” sul monitor l’insieme di oggetti che più si avvicinava alla numerosità di un campione di riferimento presentato agli animali all’inizio della prova. Attraverso la registrazione dei tempi di reazione e la misura dell’accuratezza della risposta, si è mostrato che i macachi sanno risolvere tale compito ma che entrambi le variabili tempo/accuratezza risentono fortemente della legge di “proporzionalità”. Secondo questa legge il livello di confusione tra due numeri (o fra due numerosità), misurata dalla percentuale di risposte corrette nei compiti di confronto, dipende unicamente dal quoziente tra i due stessi numeri. Più il quoziente è vicino ad 1, maggiore sarà la possibilità che i due numeri vengano confusi. Si noti, tuttavia, come quest’ultima osservazione possa non essere valida quando non vengono controllati i formati dei numeri. Si consideri, ad esempio, le due coppie di numeri (10, 15) e (30, 40): la distanza tra i due numeri è più grande nella seconda coppia di numeri ( $40-30 > 15-10$ ) ma nello stesso tempo il quoziente tra i due numeri è più vicina ad 1 ( $1 < 40/30 = 4/3 < 15/10 = 3/2$ ). La legge di proporzionalità, pertanto, implica anche l’importanza del formato: quando si stabilisce la distanza tra i due numeri, il loro quoziente è tanto più vicino ad 1 quanto più i numeri sono grandi.

La legge di proporzionalità viene a volte chiamata anche legge di Weber (o del comportamento weberiano) senza però spiegare il perché e finendo così per confondere le due cose. La legge di Weber dice, infatti, che la distanza che separa uno stimolo da un altro stimolo più vicino, dal quale però può essere distinto (con un valore di riuscita del 75%), è proporzionale al valore dello stimolo di riferimento. Esplicitiamo tutto questo attraverso delle formule matematiche: consideriamo, ad esempio, una coppia di stimoli di numerosità ( $N, N^*a$ ). La legge di proporzionalità dice che il tasso di distinzione tra questi due valori non dipende da  $N$ , bensì solamente da “ $a$ ” si potrà dunque scrivere:

$$p(N, N^*a) = p(a)$$

Per quanto riguarda la legge di Weber, invece, non si parte da ( $a$ ) ma da un livello di prestazioni stabilito (75% di risposte corrette) a cui è



auspicabile arrivare. Quindi, per uno stimolo  $N$ , il livello di prestazioni  $p0$  è raggiunto quando si riesce a distinguere questo stimolo da un altro. Riportiamo l'esempio di uno stimolo  $NW$ . Il valore di  $W$  dipende dal livello di prestazioni ( $p0$ ); ponendo  $(p0) = W$  e nell'ipotesi che  $(a) > (N, Na)$  possa essere prolungato in una funzione continua e decrescente di  $(a)$ , le due leggi sono di fatto equivalenti. Alla base di tutti i giudizi di numerosità esistono, quindi, due principi che sembrano giocare un ruolo importante tanto negli animali quanto (come vedremo nel prossimo capitolo) nei bambini e negli adulti: il principio della "distanza numerica" ed il "principio del formato" (detto anche della "magnitudine").

Secondo il primo principio, la discriminazione tra due grandezze numeriche migliora all'aumentare della distanza tra i gruppi. Pertanto, è più facile distinguere due elementi da cinque elementi piuttosto che quattro elementi da cinque elementi. Il secondo principio, "l'effetto formato", afferma invece che, a parità di distanza tra i due numeri, la discriminazione tra questi peggiora all'aumentare degli stessi. Risulta, ad esempio, più difficile individuare quale insieme sia più numeroso tra dieci unità e undici unità piuttosto che tra due unità e tre unità, questo nonostante la distanza tra gli elementi del primo e secondo gruppo sia sempre pari ad uno.

Per quanto riguarda invece l'abilità additiva delle scimmie uno dei primi esperimenti ci viene fornito dai primatologi Guy Woodruff e David Premack della *University of Pennsylvania*, i quali sono diventati famosi nel 1978 grazie ad un articolo dal titolo provocatorio *Does the chimpanzee have a theory of mind?* nel quale si mostrava come uno scimpanzè fosse capace di risolvere differenti problemi inferendo scopi e intenzioni, gettando le basi di quella che sarà successivamente chiamata la "Teoria della Mente".

In uno dei loro primi esperimenti che miravano, invece, a capire se gli scimpanzè possedevano davvero capacità numeriche, Woodruff e Premack (1981) hanno sottoposto degli scimpanzè a scegliere (tramite rinforzo alimentare) tra due oggetti quello fisicamente identico ad un terzo oggetto. Dopo questa prima fase, ai soggetti veniva mostrato un bicchiere riempito a metà con del liquido blu e veniva loro chiesto di decidere tra due possibili alternative, vale a dire, o metà mela o tre quarti di una mela. Gli scimpanzè sceglievano nella mag-

gior parte dei casi metà mela, basando la propria scelta sulla corrispondenza concettuale di metà bicchiere e metà mela, mostrando in tal modo che essi sapevano conoscere il concetto di frazione numerica. Per dimostrare che essi sceglievano in base alla frazione che ne rappresentava la quantità numerica e non sul volume del bicchiere riempito con il liquido colorato, gli autori, in un altro esperimento, resero, agli scimpanzé, il compito ancora più astratto, dimostrando che gli animali potevano mentalmente combinare due frazioni.

In questo secondo test, lo stimolo campione era formato da un quarto di mela e da un mezzo bicchiere, mentre la scelta era rappresentata da un disco pieno o tre quarti di un disco. In questo caso, gli animali sceglievano nella maggior parte dei casi l'ultima opportunità, riuscendo a fare correttamente  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ . Molte ricerche successive hanno prodotto risultati simili. E' il caso, ad esempio, di un esperimento condotto da Duane Rumbaugh e dai suoi colleghi (Rumbaugh *et al.*, 1987), in cui delle scimmie vengono messe di fronte a quattro contenitori, riempiti sempre con delle palline di cioccolato, disposti in gruppi di due. Dovendo scegliere tra i due gruppi di contenitori, le scimmie, nella maggior parte dei casi, sceglievano il gruppo in cui la somma dei contenitori dava il maggior numero di palline di cioccolato. Le prestazioni positive aumentavano se la distanza tra il numero totale delle palline di cioccolato fra i due gruppi aumentava: più le due somme erano differenti meglio le scimmie riuscivano nel loro compito. Questi risultati vengono confermati da un esperimento condotto da Sulkowski e Hauser (2001) che aveva, invece, lo scopo di indagare se le scimmie potessero spontaneamente sottrarre quantità di cibo. Gli autori, testarono dei macachi *rhesus* in cattività in una sola prova in maniera tale da non dare vita a nessun tipo di apprendimento che gli animali potessero utilizzare nelle fasi successive dell'esperimento. Infatti, le scimmie notavano semplicemente gli sperimentatori sottrarre 0 o 1 prugna da un insieme di 1-3 prugne, dopodiché questi si allontanavano e veniva osservata la scelta spontanea effettuata dal macaco verso una scatola o l'altra. In 11 esperimenti diversi, gli autori riscontrarono che le scimmie sceglievano invariabilmente i contenitori con il maggior numero di prugne, anche quando questa scelta richiedeva di scegliere la quantità che era originariamente inferiore per numero.

Una metodologia simile a quella adottata da Sulkowski e Hauser è stata successivamente utilizzata anche per studiare la capacità di addizione spontanea degli scimpanzè (Beran e Beran, 2004). Anche in questo caso, infatti, gli animali osservavano lo sperimentatore inserire sequenzialmente delle banane in due contenitori identici, in maniera tale che alla scimmia non fosse data la possibilità di vedere quanta frutta risultasse complessivamente inserita nei due contenitori. In questo modo veniva chiesto agli scimpanzè un processo di addizione numerica degli elementi via via inseriti per selezionare il contenitore che risultasse alla fine più vantaggioso. Tramite questa semplice procedura si è mostrato che gli scimpanzè sono in grado di sommare spontaneamente sia piccole numerosità (1 banana rispetto a 2, 2 vs 3 e 3 vs 4) sia numerosità maggiori a patto che la distanza relativa tra i due gruppi fosse aumentata (ad esempio, 5 banane contro 10 o 6 vs 10).

Una ricerca più recente, condotta da Hanus e Call (2007), su tutte e quattro le specie di scimmie antropomorfe ha infine dimostrato che queste sono in grado di scegliere l'insieme più numeroso, sia attraverso dei test di scelta spontanea simultanea (quando cioè si presentano parallelamente due gruppi) sia nei test in cui gli stimoli vengono presentati sequenzialmente. Viene mostrato, inoltre, che il miglior indice della capacità discriminativa risulta essere, ancora una volta, il rapporto tra le quantità: infatti, al crescere del rapporto tra i gruppi e, quindi, al diminuire della distanza tra gli insiemi posti a confronto, la prestazione tende a peggiorare. Di contro, a questo tipo di metodologia sovente si fa uso, in alcuni studi sulle capacità numeriche spontanee dei primati, di un paradigma di ricerca ideato nella ricerca cognitiva sui bambini in età pre-verbale, cioè il cosiddetto principio di "violazione dell'aspettativa" (argomento che verrà esaminato nel prossimo capitolo) che, in pratica si basa sulla discrepanza tra le conoscenze anteriori del soggetto testato e la realtà a cui viene sottoposto.

Questa procedura è stata utilizzata, ad esempio, da Jonathan Flombam e colleghi (Flombam *et al.*, 2005) per indagare le capacità di calcolo spontaneo nei macachi *rhesus*. Gli autori mostrano agli animali una scatola dove vengono aggiunti successivamente uno dopo l'altro alcuni limoni. Durante il test, il contenuto intero della scatola

è nascosto da uno schermo che viene abbassato solo in un secondo momento, rivelando il risultato della somma attesa (o un altro risultato inesatto). In questo test le scimmie (senza essere state precedentemente addestrate) guardano con maggiore attenzione verso la scatola se il risultato mostrato differisce “sufficientemente” dalla somma attesa (8 e 4 vengono sostanzialmente differenziati dalla scimmia ma queste reagiscono indifferentemente a 4 e 6). Difatti, di fronte ad un evento che violava i principi di addizione numerica, i tempi di fissazione risultavano più lunghi rispetto ad eventi matematicamente corretti. Simili risultati sono stati raggiunti con un altro primate, il tamarino (Uller *et al.*, 2001) e con quattro specie differenti di prosimie (Santos *et al.*, 2005). Più recentemente, Cantlon e Brannon (2007) hanno utilizzato lo stesso paradigma sperimentale in cui però gli stimoli venivano presentati attraverso un’animazione al computer. Gli animali venivano messi di fronte ad uno schermo, in cui venivano proiettati delle immagini contenenti insieme di puntini; dopo un breve intervallo veniva fatto vedere agli animali un nuovo insieme ed infine venivano proposte due nuove schermate: una con una numerosità uguale alla somma presentata e l’altra invece con una numerosità sbagliata. Ogni sessione era costituita da circa 250 prove e vennero testate diverse addizioni ( $1 + 1 = 2, 4$  o  $8$ ;  $2 + 2 = 2, 4$  o  $8$ ;  $4 + 4 = 2, 4$  o  $8$ , fino ad arrivare ad includere tutte le possibili combinazioni di addendi dei numeri 2, 4, 8, 12 e 16). Per essere sicuri che gli animali sceglissero la risposta giusta, solo in base a un parametro numerico e non in base a qualche altro parametro (densità dello stimolo, area dei puntini), gli autori presentarono la stessa somma, variando per un grande numero di volte, la densità dello stimolo. Inoltre, si notò come le scimmie non fallissero nel compito nemmeno quando l’area dei puntini (diversamente dalla somma numerica) era uguale alla somma sbagliata. L’unico fattore che regolava le prestazioni era costituito dal formato dei numeri presentati: le prestazioni sulla somma  $1+1$  erano statisticamente migliori di quelle della somma  $2+2$ .

Da molti punti di vista, quindi, le capacità numeriche delle scimmie sembrano essere simili alle capacità di stima numerica degli esseri umani. Certo la differenza maggiore rimane quella che gli esseri umani sanno contare con precisione utilizzando simboli che denotano i numeri. A partire da queste considerazioni, alcuni autori, si sono

posti l'ambizioso progetto di insegnare agli scimpanzè la notazione simbolica. In quest'ottica, uno dei primi esperimenti è stato intrapreso da Biro e Matsuzawa (2001) che hanno addestrato uno scimpanzè ad associare numeri arabi ad una serie di puntini presentati su di un monitor. L'esperimento si divideva in tre fasi. Nella prima fase, venivano presentati sul monitor un insieme di punti e due numeri arabi, quindi veniva chiesto all'animale di toccare sullo schermo il numero arabo che rappresentava correttamente la quantità dei punti visualizzati. Nella seconda fase dell'esperimento, specularmente al primo compito, veniva presentato un numero arabo e successivamente apparivano due insiemi di puntini; in questo caso all'animale veniva chiesto di toccare l'insieme giusto di puntini corrispondenti al numero arabo. Nell'ultima fase, infine, apparivano contemporaneamente due numeri arabi e l'animale doveva toccare i due stimoli dal più piccolo al più grande. I risultati di questo esperimento mostravano come uno scimpanzè sapesse risolvere compiti matematici che coinvolgevano aspetti sia di cardinalità (la capacità di sapere associare al simbolo numerico 3 la categoria di elementi che contengono le tre unità) sia di ordinalità (la capacità di riconoscere quale tra due elementi è il più grande). Molte ricerche hanno prodotto risultati simili. Tra questi, un lavoro per certi versi straordinario è quello intrapreso da Boysen e Berntson (1989), con uno scimpanzè femmina di nome Sheba. Gli autori hanno addestrato Sheba ad accoppiare numerosità con numeri arabi. Nella prima parte dell'esperimento, essi presentano non simultaneamente a Sheba delle arance (in maniera tale che le arance non risultino visibili nello stesso tempo). Il compito di Sheba è quello allora di indicare quante arance ha visto, mostrando la cifra corrispondente. Nella seconda parte, Sheba non trova più le arance nelle cassette bensì delle cifre arabe. Nonostante questo, ella riesce ugualmente a dare la risposta corretta all'addizione a cui viene sottoposta nel test. In una seconda versione del test, gli sperimentatori danno a Sheba un mazzo di cartoncini, su ciascuno dei quali è stampato un numero da 1 a 9 ed ella deve associare ciascun cartoncino a degli insiemi che contengono da 1 a 9 oggetti. Anche in questo secondo caso, l'animale riesce nel compito ed, inoltre, è anche capace di svolgere semplici addizioni presentate nella forma di simboli. Infatti, se l'autore mostra i cartoncini rappresentanti i numeri 2 e 3, Sheba sa

individuare il cartoncino corretto con il numero 5. In questo modo gli autori mostrano che per Sheba l'addizione (riuscendo l'animale a risolvere facilmente questa operazione fin dalle fasi iniziali del test) non presenta difficoltà supplementari in rapporto alla semplice enumerazione d'oggetti.

In conclusione, le ricerche riportate sembrano rimettere in discussione l'idea secondo la quale il sistema rappresentativo alla base delle competenze numeriche è esclusivamente umano. Tuttavia, per quanto sorprendenti possano essere i dati presentati, ciò non significa che gli scimpanzè, così come le scimmie, i topi, i delfini e gli uccelli hanno le stesse capacità numeriche degli esseri umani. Come abbiamo visto nel caso di Sheba, la capacità di associare simboli arabi e numerosità corretta risulta essere un processo lungo e complicato che richiede anni di addestramento. E anche in quest'ultimo caso i risultati non sono mai corretti al 100% e sono limitati a insiemi molto piccoli. Come vedremo nel prossimo capitolo, con i bambini (anche quelli di pochi mesi) va decisamente meglio.