A13

363

Gianluca Dari

MICROECONOMIA MATEMATICA

TRECENTO ESERCIZI SVOLTI

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A–B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–3076–9

I edizione: gennaio 2010

Indice

TEORIA DELL'IMPRESA

REGIMI DI MERCATO

PARTE SECONDA

Parte terza

Capitolo 1

Insiemi e funzioni

Esercizio n. 1

Fornire la definizione di insieme convesso e non convesso.

Soluzione

Un insieme X si definisce convesso se qualsiasi combinazione lineare di due suoi elementi genera un segmento che vi appartiene interamente. Al riguardo, sia x_0 espresso da una combinazione lineare di x_1 ed $x_2 \in X$:

$$x_0 = \alpha\, x_1 + (1 - \alpha)\, x_2$$

La definizione di convessità richiede allora che x_0 sia elemento di X per qualunque $\alpha \in (0; 1)$. Diversamente, qualora risultasse $x_0 \notin X$, l'insieme si dice non convesso.

Una illustrazione grafica di insieme convesso e non convesso è fornita in figg. 1 e 2:

Fig. 1
Insieme convesso

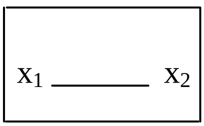
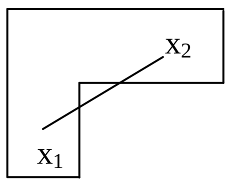


Fig. 2
Insieme non convesso



Esercizio n. 2

Si consideri un segmento di lunghezza unitaria, con estremi $x_1 = 1$ ed $x_2 = 2$. Determinare per quale valore di α si determina il punto $x_0 = 1{,}75$.

Soluzione

Definendo $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ e sostituendo alle x i rispettivi valori, si ha:

$$1{,}75 = \alpha + 2(1 - \alpha) \quad \text{da cui } \alpha = 0{,}25 .$$

Esercizio n. 3

Si dimostri che l'uguaglianza $\alpha (x_0 - x_1) = (1 - \alpha)(x_2 - x_0)$ è sempre verificata per qualsiasi x_0 appartenente all'intervallo chiuso $[x_1 , x_2]$.

Soluzione

Semplificando i prodotti nelle parentesi, l'uguaglianza di cui sopra può riscriversi come :

$$\alpha (x_2 - x_1) = x_2 - x_0 .$$

Tenuto conto che $x_0 \in [x_1 , x_2]$, sarà $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ e quindi:

$$\alpha (x_2 - x_1) = x_2 - \alpha x_1 - (1 - \alpha) x_2$$

che semplificata si riduce a:

$$\alpha (x_2 - x_1) = \alpha (x_2 - x_1)$$

la quale, in quanto identità, è sempre vera.

Esercizio n. 4

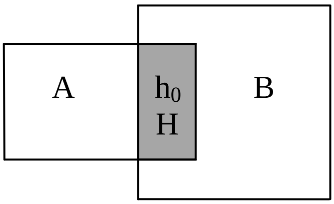
Siano A e B due insiemi convessi. Si dimostri che la loro intersezione è ancora un insieme convesso.

Soluzione

Poiché A è convesso, sarà anche $a_0 = \alpha\, a_1 + (1 - \alpha)\, a_2$ elemento di A. Lo stesso varrà per $b_0 = \alpha\; b_1 + (1 - \alpha)\, b_2 \in$ B. Ciò detto, si indichi con H = $A \cap B$ l'insieme intersezione, ovvero l'insieme dei punti h che stanno contemporaneamente in A e B.
Presa, quindi, una combinazione lineare convessa

$$h_0 = \alpha\, h_1 + (1 - \alpha)\, h_2$$

risulterà h elemento di A, di B e della loro intersezione H, come la figura sottostante illustra:



Esercizio n. 5

Dato il seguente sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

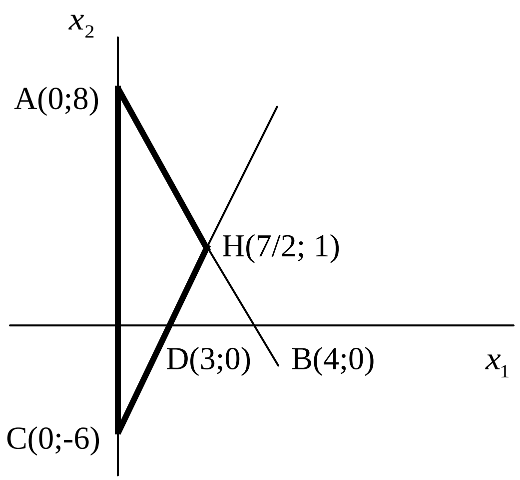
si verifichi che la soluzione individua una regione limitata e convessa del piano.

Soluzione

Il primo passo consiste nel porre le disequazioni sotto forma di uguaglianze, ottenendo in tal modo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

La prima retta, di equazione $2x_1 + x_2 - 8 = 0$, ha intercetta verticale in A (0;8) ed orizzontale in B (4;0). In maniera analoga, la retta di equazione $2x_1 - x_2 - 6 = 0$ interseca gli assi in C (0; -6) e in D (3;0). Infine, l'equazione $x_1 = 0$ individua l'intero asse delle ordinate.
Le tre equazioni sono raffigurate nel piano, ove si è convenuto porre x_2 sull'asse verticale:



Le coordinate di H si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

che fornisce soluzione in $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = 1$.

La figura convessa, rappresentata dal triangolo ACH (frontiera compresa), individua il luogo geometrico dei punti x_1 ed x_2 soddisfacenti il sistema dato.

Esercizio n. 6

Si consideri nuovamente l'esercizio n. 5 con l'unica diversità dovuta al segno di stretta disuguaglianza caratterizzante ciascuna disequazione, ovvero:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 < 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 < 0 \\ x_1 > 0 \end{cases}$$

Determinare la regione (convessa) del piano contenente i valori di x_1 ed x_2 che soddisfano il sistema dato.

Soluzione

La metodologia di risoluzione è la stessa di quella illustrata nell'esercizio n. 5 con l'unica particolarità dovuta alle strette disuguaglianze caratterizzanti ciascuna disequazione. Ciò implica che solo i punti interni al triangolo ACH costituiscono soluzione del sistema. In altri termini, valendo il segno di stretta disuguaglianza, tutti i punti x_1 ed x_2 giacenti sulla frontiera o contorno di ACH saranno esclusi quale coppia di soluzioni.

Esercizio n. 7

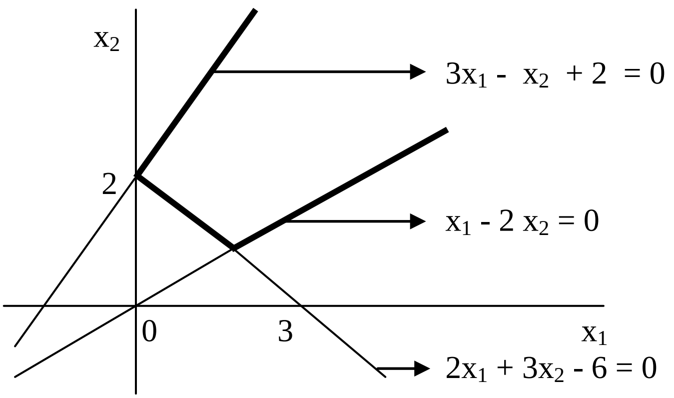
Dato il sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$$

si verifichi che la soluzione determinerà una regione convessa ed illimitata del piano.

Soluzione

Adottando lo stesso iter di risoluzione già visto, si pone dapprima l'intero sistema in forma di uguaglianze e si tracciano quindi le rette relative a ciascuna equazione:



Come si nota, la spezzata disegnata in neretto delimita una regione convessa del piano illimitata superiormente.

Esercizio n. 8

Fornire la definizione di convessità e di concavità di una funzione reale definita su un intervallo I.

Soluzione

Una funzione f(x) si dice convessa se, per ogni coppia di punti x_1 ed x_2, con $x_1 < x_2$, risulta che:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

per qualunque $\alpha \in [0:1]$.

Diversamente, qualora:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

la funzione si dice concava.

Infine, è bene osservare che se le precedenti disuguaglianze valgono in senso stretto per qualunque $\alpha \in (0:1)$ o, equivalentemente, se il segno di uguaglianza si ha solo in $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, allora la funzione sarà strettamente convessa o strettamente concava.

Esercizio n. 9

Sia f convessa (concava) in un intervallo I. Discutere la curvatura della funzione multipla Kf per k diverso da zero.

Soluzione

Si supponga che f sia convessa. Dovrà allora risultare che:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

per qualunque $\alpha \in [0:1]$.

Preso quindi uno scalare K diverso da zero, la funzione Kf continuerà ad essere convessa per K > 0, mentre diventerà concava per K negativo.
In quest'ultimo caso, si ponga, per esempio, $K = -1$ risulterà che:

$$K f(x) = K f[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] \geq \alpha K f(x_1) + (1-\alpha) K f(x_2)$$

ovvero la concavità di Kf.

In generale, quindi, una funzione a valori reali si dice convessa (concava) se $-f$ è concava (convessa).

Esercizio n. 10

Siano x_1 ed x_2 due punti nel dominio di f(x) per i quali risulta che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Illustrare la condizione per la quale f risulta strettamente quasi concava.

Soluzione

Per qualunque $\alpha \in (0; 1)$ si definisca dapprima $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ quale combinazione lineare di x_1 ed x_2. In corrispondenza di x_0, se risulta che $f(x_0) > f(x_1)$ la funzione dicesi strettamente quasi concava.

Esercizio n. 11

Si verifichi che le seguenti disuguaglianze:

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] > f(x_1)$$

$$f[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] > \min[f(x_1); f(x_2)]$$

attestano in maniera equivalente la stretta quasi concavità di f .

Soluzione

La prima disuguaglianza è stata già trattata nel precedente esercizio, ove si era posto x_0 come combinazione lineare di x_1 ed x_2.
La seconda disuguaglianza è un modo per ribadire la prima: poiché $f(x_1) \leq f(x_2)$, segue che $f(x_1)$ è il minimo di f.

Esercizio n. 12

Illustrare la condizione per la quale una funzione f risulti strettamente quasi convessa, quasi convessa o quasi concava.

Soluzione

Siano x_1 ed x_2 due punti nel dominio di f(x) per i quali risulta che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Combinando linearmente x_1 ed x_2 la funzione è strettamente quasi convessa se risulta:

$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] < f(x_2)$

$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] < \max[f(x_1); f(x_2)]$ per qualunque $\alpha \in (0,1)$.

Come si noterà, la stretta quasi convessità è l'esatto contraltare della stretta quasi concavità.

I casi restanti si ottengono sostituendo il segno di disuguaglianza forte con quello di disuguaglianza debole nelle rispettive definizioni geometriche.
Pertanto, per qualunque reale $\alpha \in (0,1)$, la funzione sarà quasi concava se:

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq \min[f(x_1); f(x_2)]$$

o quasi convessa qualora:

$$f\,[\alpha\; x_1 + (1 - \alpha)\, x_2] \leq \max\,[f(x_1);\, f\,(x_2)]\ .$$