

$$\frac{A_{13}}{363}$$

Gianluca Dari

MICROECONOMIA MATEMATICA

TRECENTO ESERCIZI SVOLTI



Copyright © MMX
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133/A-B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-3076-9

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: gennaio 2010

Indice

11 *Introduzione*

PARTE PRIMA

15 **Capitolo 1**
Insiemi e funzioni
Esercizi da 1 a 12

TEORIA DEL CONSUMO

25 **Capitolo 2**
Preferenze e funzioni di utilità
Esercizi da 13 a 29

41 **Capitolo 3**
Vincolo di bilancio, scelte ottimali, statica comparata
Esercizi da 30 a 40

59 **Capitolo 4**
Consumo monopériodale
Esercizi da 41 a 51

85 **Capitolo 5**
Consumo intertemporale in condizioni di certezza
Esercizi da 52 a 58

95 **Capitolo 6**
Incertezza e utilità attesa
Esercizi da 59 a 64

TEORIA DELL'IMPRESA

105 **Capitolo 7**
Tecnologia produttiva e rendimenti di scala
Esercizi da 65 a 78

121 **Capitolo 8**
Funzioni e curve di costo
Esercizi da 79 a 88

133 **Capitolo 9**
Scelte intertemporali dell'impresa
Esercizi da 89 a 96

145 **Capitolo 10**
Scelte dell'impresa in condizioni di incertezza
Esercizi da 97 a 100

REGIMI DI MERCATO

151 **Capitolo 11**
La concorrenza perfetta
Esercizi da 101 a 114

- 171 Capitolo 12
Il monopolio
Esercizi da 115 a 121
- 181 Capitolo 13
Il monopsonio
Esercizi da 122 a 125
- 187 Capitolo 14
La concorrenza monopolistica
Esercizi da 126 a 131
- 193 Capitolo 15
L'oligopolio
Esercizi da 132 a 138
- 207 Capitolo 16
Equilibrio di mercato e analisi statica
Esercizi da 139 a 148
- 219 Capitolo 17
Equilibrio economico generale
Esercizi da 149 a 158
- 235 Capitolo 18
Efficienza
Esercizi da 159 a 169

PARTE SECONDA

- 259 Capitolo 19
Vettori e matrici
Esercizi da 170 a 200
- 285 Capitolo 20
Sistemi di equazioni lineari
Esercizi da 201 a 212
- 299 Capitolo 21
Programmazione matematica lineare
Esercizi da 213 a 220
- 311 Capitolo 22
Elementi di calcolo integrale
Esercizi da 221 a 233
- 319 Capitolo 23
Cenni alle equazioni differenziali
Esercizi da 234 a 245
- 331 Capitolo 24
Funzioni a più variabili e forme quadratiche
Esercizi da 246 a 256

PARTE TERZA

- 343 Capitolo 25
Teoria del consumo (approfondimenti)
Esercizi da 257 a 261
- 351 Capitolo 26
Teoria dell'impresa (approfondimenti)
Esercizi da 262 a 264
- 355 Capitolo 27
Equilibrio di mercato e dinamica del prezzo
Esercizi da 265 a 273
- 367 Capitolo 28
*Fallimenti di mercato (esternalità, beni pubblici, asimmetria
informativa)*
Esercizi da 274 a 286
- 389 Capitolo 29
Cenni alla programmazione matematica non lineare
Esercizi da 287 a 292
- 397 Capitolo 30
Elementi di teoria dei giochi
Esercizi da 293 a 300

Insiemi e funzioni

Esercizio n. 1

Fornire la definizione di insieme convesso e non convesso.

Soluzione

Un insieme X si definisce convesso se qualsiasi combinazione lineare di due suoi elementi genera un segmento che vi appartiene interamente. Al riguardo, sia x_0 espresso da una combinazione lineare di x_1 ed $x_2 \in X$:

$$x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$$

La definizione di convessità richiede allora che x_0 sia elemento di X per qualunque $\alpha \in (0; 1)$. Diversamente, qualora risultasse $x_0 \notin X$, l'insieme si dice non convesso.

Una illustrazione grafica di insieme convesso e non convesso è fornita in figg. 1 e 2:

Fig. 1
Insieme convesso

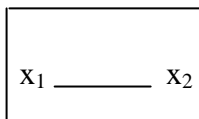
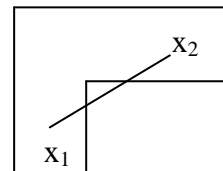


Fig. 2
Insieme non convesso



Esercizio n. 2

Si consideri un segmento di lunghezza unitaria, con estremi $x_1 = 1$ ed $x_2 = 2$. Determinare per quale valore di α si determina il punto $x_0 = 1,75$.

Soluzione

Definendo $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ e sostituendo alle x i rispettivi valori, si ha:

$$1,75 = \alpha + 2(1 - \alpha) \quad \text{da cui } \alpha = 0,25 .$$

Esercizio n. 3

Si dimostri che l'uguaglianza $\alpha(x_0 - x_1) = (1 - \alpha)(x_2 - x_0)$ è sempre verificata per qualsiasi x_0 appartenente all'intervallo chiuso $[x_1, x_2]$.

Soluzione

Semplificando i prodotti nelle parentesi, l'uguaglianza di cui sopra può risciversi come :

$$\alpha(x_2 - x_1) = x_2 - x_0 .$$

Tenuto conto che $x_0 \in [x_1, x_2]$, sarà $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ e quindi:

$$\alpha(x_2 - x_1) = x_2 - \alpha x_1 - (1 - \alpha) x_2$$

che semplificata si riduce a:

$$\alpha(x_2 - x_1) = \alpha(x_2 - x_1)$$

la quale, in quanto identità, è sempre vera.

Esercizio n. 4

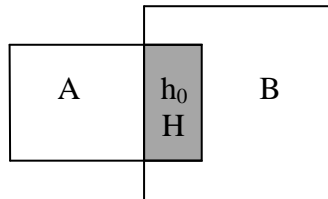
Siano A e B due insiemi convessi. Si dimostri che la loro intersezione è ancora un insieme convesso.

Soluzione

Poiché A è convesso, sarà anche $a_0 = \alpha a_1 + (1 - \alpha) a_2$ elemento di A. Lo stesso varrà per $b_0 = \alpha b_1 + (1 - \alpha) b_2 \in B$. Ciò detto, si indichi con $H = A \cap B$ l'insieme intersezione, ovvero l'insieme dei punti h che stanno contemporaneamente in A e B. Presa, quindi, una combinazione lineare convessa

$$h_0 = \alpha h_1 + (1 - \alpha) h_2$$

risulterà h elemento di A, di B e della loro intersezione H, come la figura sottostante illustra:



Esercizio n. 5

Dato il seguente sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 \leq 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 \leq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

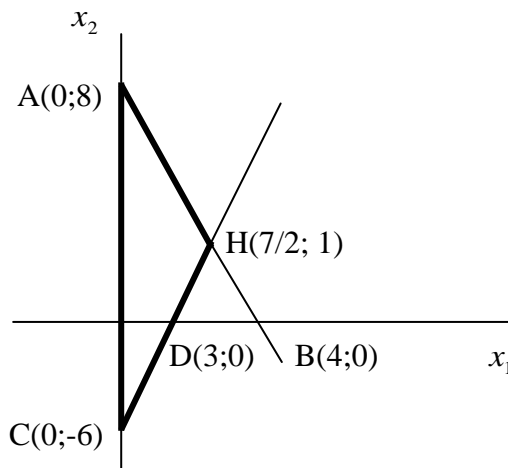
si verifichi che la soluzione individua una regione limitata e convessa del piano.

Soluzione

Il primo passo consiste nel porre le disequazioni sotto forma di uguaglianze, ottenendo in tal modo il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

La prima retta, di equazione $2x_1 + x_2 - 8 = 0$, ha intercetta verticale in A (0;8) ed orizzontale in B (4;0). In maniera analoga, la retta di equazione $2x_1 - x_2 - 6 = 0$ interseca gli assi in C (0; -6) e in D (3;0). Infine, l'equazione $x_1 = 0$ individua l'intero asse delle ordinate. Le tre equazioni sono raffigurate nel piano, ove si è convenuto porre x_2 sull'asse verticale:



Le coordinate di H si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

che fornisce soluzione in $x_1 = \frac{7}{2}$ e $x_2 = 1$.

La figura convessa, rappresentata dal triangolo ACH (frontiera compresa), individua il luogo geometrico dei punti x_1 ed x_2 soddisfacenti il sistema dato.

Esercizio n. 6

Si consideri nuovamente l'esercizio n. 5 con l'unica diversità dovuta al segno di stretta disuguaglianza caratterizzante ciascuna disequazione, ovvero:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8 < 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 < 0 \\ x_1 > 0 \end{cases}$$

Determinare la regione (convessa) del piano contenente i valori di x_1 ed x_2 che soddisfano il sistema dato.

Soluzione

La metodologia di risoluzione è la stessa di quella illustrata nell'esercizio n. 5 con l'unica particolarità dovuta alle strette disuguaglianze caratterizzanti ciascuna disequazione. Ciò implica che solo i punti interni al triangolo ACH costituiscono soluzione del sistema. In altri termini, valendo il segno di stretta disuguaglianza, tutti i punti x_1 ed x_2 giacenti sulla frontiera o contorno di ACH saranno esclusi quale coppia di soluzioni.

Esercizio n. 7

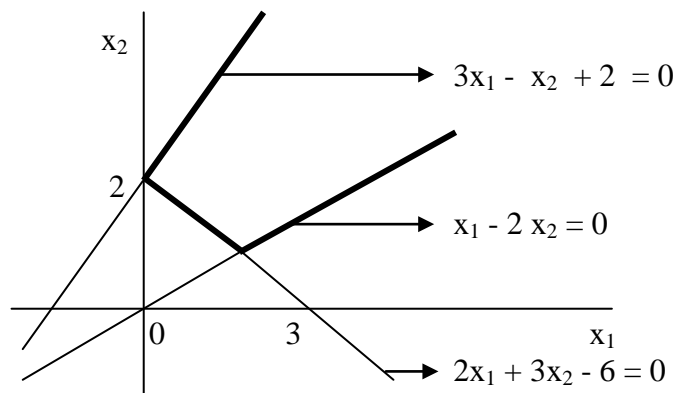
Dato il sistema di disequazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 6 \geq 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$$

si verifichi che la soluzione determinerà una regione convessa ed illimitata del piano.

Soluzione

Adottando lo stesso iter di risoluzione già visto, si pone dapprima l'intero sistema in forma di uguaglianze e si tracciano quindi le rette relative a ciascuna equazione:



Come si nota, la spezzata disegnata in neretto delimita una regione convessa del piano illimitata superiormente.

Esercizio n. 8

Fornire la definizione di convessità e di concavità di una funzione reale definita su un intervallo I.

Soluzione

Una funzione $f(x)$ si dice convessa se, per ogni coppia di punti x_1 ed x_2 , con $x_1 < x_2$, risulta che:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

per qualunque $\alpha \in [0:1]$.

Diversamente, qualora:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

la funzione si dice concava.

Infine, è bene osservare che se le precedenti disuguaglianze valgono in senso stretto per qualunque $\alpha \in (0:1)$ o, equivalentemente, se il segno di uguaglianza si ha solo in $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, allora la funzione sarà strettamente convessa o strettamente concava.

Esercizio n. 9

Sia f convessa (concava) in un intervallo I. Discutere la curvatura della funzione multipla Kf per k diverso da zero.

Soluzione

Si supponga che f sia convessa. Dovrà allora risultare che:

$$f(x) = f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2)$$

per qualunque $\alpha \in [0:1]$.

Preso quindi uno scalare K diverso da zero, la funzione Kf continuerà ad essere convessa per $K > 0$, mentre diventerà concava per K negativo.

In quest'ultimo caso, si ponga, per esempio, $K = -1$ risulterà che:

$$K f(x) = K f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq \alpha K f(x_1) + (1 - \alpha) K f(x_2)$$

ovvero la concavità di Kf .

In generale, quindi, una funzione a valori reali si dice convessa (concava) se $-f$ è concava (convessa).

Esercizio n. 10

Siano x_1 ed x_2 due punti nel dominio di $f(x)$ per i quali risulta che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Illustrare la condizione per la quale f risulta strettamente quasi concava.

Soluzione

Per qualunque $\alpha \in (0; 1)$ si definisca dapprima $x_0 = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ quale combinazione lineare di x_1 ed x_2 . In corrispondenza di x_0 , se risulta che $f(x_0) > f(x_1)$ la funzione dicesi strettamente quasi concava.

Esercizio n. 11

Si verifichi che le seguenti disuguaglianze:

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] > f(x_1)$$

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] > \min [f(x_1); f(x_2)]$$

attestano in maniera equivalente la stretta quasi concavità di f .

Soluzione

La prima disuguaglianza è stata già trattata nel precedente esercizio, ove si era posto x_0 come combinazione lineare di x_1 ed x_2 .

La seconda disuguaglianza è un modo per ribadire la prima: poiché $f(x_1) \leq f(x_2)$, segue che $f(x_1)$ è il minimo di f .

Esercizio n. 12

Illustrare la condizione per la quale una funzione f risulti strettamente quasi convessa, quasi convessa o quasi concava.

Soluzione

Siano x_1 ed x_2 due punti nel dominio di $f(x)$ per i quali risulta che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Combinando linearmente x_1 ed x_2 la funzione è strettamente quasi convessa se risulta:

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] < f(x_2)$$

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] < \max[f(x_1); f(x_2)] \text{ per qualunque } \alpha \in (0,1).$$

Come si noterà, la stretta quasi convessità è l'esatto contraltare della stretta quasi concavità.

I casi restanti si ottengono sostituendo il segno di disuguaglianza forte con quello di disuguaglianza debole nelle rispettive definizioni geometriche.

Pertanto, per qualunque reale $\alpha \in (0,1)$, la funzione sarà quasi concava se:

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \geq \min[f(x_1); f(x_2)]$$

o quasi convessa qualora:

$$f[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2] \leq \max [f(x_1); f(x_2)] .$$