Aoi

146

Francesco Bertolini

L’evoluzione della geometria

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–2939–8

I edizione: dicembre 2009
I ristampa aggiornata: gennaio 2011

Aristippo, filosofo socratico, approdato dopo un naufragio sul litorale di Rodi, notò la presenza di figure geometriche sulla sabbia ed esclamò ai suoi compagni: «Abbiate speranza: vedo infatti tracce dell'uomo».

M. Vitruvio Pollione, *De Architectura*, Libro VI, Prefazione

Indice

Introduzione

Con il presente lavoro si intende realizzare un percorso metodologico utile per la comprensione della scoperta delle geometrie non euclidee, grazie all'analisi dell'origine e delle conseguenze della rivoluzione culturale legata all'introduzione di nuovi sistemi geometrici.

È stato descritto lo sviluppo delle idee che condusse dalla geometria euclidea, di per sé evidente, ad altri sistemi matematici validi logicamente, anche se lontani dalla corrispondenza con un immediato riscontro fenomenico.

La creazione delle geometrie non euclidee costrinse i matematici, a partire dalla seconda metà del XIX secolo, a rivedere radicalmente il senso della loro disciplina e del rapporto delle costruzioni astratte con la realtà.

Mediante lo studio di diversi e nuovi sistemi matematici coerenti, si è accettata, da allora, la possibilità dell'esistenza di strutture in antitesi con le idee intuitive geometriche pregresse. Strutture che comunque hanno offerto notevoli ed inaspettate applicazioni nella realtà fisica, come del resto è avvenuto anche per altri campi matematici che non sembrava potessero uscire da un ambito puramente teorico.

Per poter apprezzare tale evoluzione, si è ritenuto fondamentale il rispetto delle fonti, attraverso l'analisi del primo libro di quello che, nel corso dei secoli, è stato considerato il testo fondamentale della matematica: gli *Elementi* di Euclide (del III sec. a.C.), le cui numerosissime edizioni sono state superate solo da quelle della Bibbia.

Gli *Elementi* costituiscono un'opera cardine non solo per la matematica, ma anche per l'intera cultura occidentale ed hanno fornito un paradigma della conoscenza scientifica.

Si sono qui analizzati i postulati, preceduti dalle apposite definizioni, e i principali teoremi del primo libro degli *Elementi*, seguendo rigorosamente il testo di Euclide, sia perché tale opera costituisce il punto di partenza irrinunciabile per ogni possibile trattazione della geometria non euclidea, sia perché è un esempio notevole di chiarezza, semplicità e rigore, indispensabile per un'effettiva comprensione dei concetti di base della geometria.

L'esposizione delle proposizioni della geometria euclidea è stata integrata, nei punti cruciali, dall'opera che nel secolo scorso ha contribuito in modo sostanziale alla sistemazione formale della matematica: *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della Geometria) di David Hilbert, la cui prima edizione è del 1899.

Il confronto con un sistema, che è nato in opposizione a quello euclideo, è stato condotto attraverso lo studio delle proprietà della geometria iperbolica, della quale sono riportati e commentati i più importanti risultati ottenuti da Nikolaj Lobačevskij nella prima metà del XIX secolo. Questi teoremi vengono esposti con la medesima metodologia euclidea, facendo un riferimento puntuale alle proposizioni della geometria assoluta, patrimonio comune della geometria euclidea e di quella iperbolica.

Per comprendere l'importanza della nascita di questo innovativo sistema, si sono descritti alcuni precedenti tentativi infruttuosi volti a far rientrare il V postulato tra le verità dimostrabili e si è cercato di spiegare il senso di questa ricerca, che occupò i più grandi matematici per quasi duemila anni, fino all'accettazione di diverse geometrie.

La trattazione prosegue con la costruzione di alcuni modelli della geometria iperbolica, i quali dimostrano la non contraddittorietà relativa del nuovo sistema e che inoltre permettono di verificare algebricamente le proprietà dedotte in modo sintetico.

Al fine di sottolineare l'importanza dell'introduzione dei modelli in relazione ai sistemi formali interpretati, si è ritenuto necessario esporre, in generale, il problema attorno ai fondamenti della matematica che coinvolse gli studiosi alla fine dell'Ottocento.

Il fiorire di nuove teorie, di cui le geometrie non euclidee costituiscono solo un settore, determinò, infatti, la necessità di porre una base certa, non più intuitiva ed empirica, all'intero edificio matematico, compresa la parte che sembrava più immune ed affidabile, cioè la stessa geometria euclidea, apparentemente minata dall'emergere di diverse geometrie. Ecco la necessità di portare lo studio degli enti matematici ad un livello logico–formale.

L'analisi delle altre geometrie non euclidee più importanti, la sferica e l'ellittica, conduce ad alcune caratterizzazioni dello sviluppo della geometria negli ultimi due secoli, avvenuto secondo una linea sempre più astratta ed algebrica, alla ricerca di una sintesi unitaria, ottenuta inizialmente tramite la costruzione dell'ambiente comune, sia alla geometria euclidea sia a quelle non euclidee, fornito dalla geometria proiettiva e poi attraverso la generalizzazione offerta nel 1854 da Bernhard Riemann con il concetto di varietà a *n* dimensioni.

Rimane sotteso, lungo il dipanarsi del percorso storico e metodologico descritto, un problema di fondo che non si può evitare se si cerca di prendere consapevolezza del metodo della ricerca matematica.

Si tratta di capire se gli strumenti, i metodi e i sistemi matematici, che l'uomo introduce e usa, siano assimilabili ad una scoperta o ad un'invenzione: è un interrogativo per il quale non esiste una risposta certa, ma in più punti si offrono al riguardo occasioni di riflessione.

Tale questione è diventata di particolare rilevanza quando, superando il preconcetto che esista una sola geometria avente un valore di verità assoluta, si crearono sistemi matematici che non possedevano più un evidente riferimento alla realtà fisica.

L'elaborazione e l'accettazione delle teorie non euclidee non costituiscono pertanto solo un argomento di interesse interno alla matematica, ma vengono unanimemente considerati tra i più grandi progressi filosofico–scientifici degli ultimi secoli.

Come afferma Annita Tuller, nel suo testo *A modern introduction to Geometries*, la scoperta, nel diciannovesimo secolo, della geometria non euclidea segna l'inizio della matematica moderna, proprio come la pittura impressionista, nello stesso periodo, è considerata l'inizio dell'arte moderna.

Gli strumenti utilizzati in questa trattazione sono quasi sempre elementari, in modo da concentrare l'attenzione del lettore sull'evoluzione concettuale della geometria stessa.

Troppo spesso si identifica la matematica con le tecniche di calcolo; questo saggio vuole sottolineare l'aspetto essenzialmente culturale e formativo della matematica ed in modo particolare della geometria, disciplina oggi a volte trascurata dall'insegnamento nelle scuole.

Si auspica, quindi, che il materiale esposto possa interessare tutte le persone curiose, animate da interessi culturali, senza il timore di incontrare difficoltà di carattere tecnico, poiché la rivoluzione delle geometrie non euclidee non è stata causata dall'introduzione di nuovi strumenti operativi, ma da un profondo mutamento nell'impostazione logica di un problema millenario.

Un'osservazione, infine, per quanto riguarda i testi indicati in bibliografia; lo spirito della loro scelta, all'interno di un panorama bibliografico che su questo tema è sterminato, segue l'ispirazione della presente opera: cercare di coniugare la necessaria analisi teorica e tecnica dei percorsi dimostrativi dei risultati matematici esposti con lo spessore interpretativo, che solo la comprensione del loro contesto storico e filosofico può offrire.