Aoi

129

Paolo Aluffi

FARE MATEMATICA

Astratto e concreto nella matematica elementare

Numeri, infinitesimi, aritmetica modulare

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 a/b
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–2479–9

I edizione: aprile 2009

Ai miei genitori

Indice

Prefazione

Numeri, infinitesimi, aritmetica modulare. In queste pagine ci proponiamo di visitare qualche concetto di matematica elementare, da un punto di vista che nell'insieme rappresenti il modo di pensare proprio della matematica (elementare o meno).

Faremo leva sul fatto che anche meccanismi senz'altro di patrimonio universale, quali le comuni operazioni tra numeri decimali, nascondono sottigliezze piuttosto profonde, e che rischiano di essere taciute nell'ambito scolastico, forse perché si ha la percezione che un pubblico 'immaturo' poco gioverebbe dall'esserne esposto. A nostro avviso vale senz'altro la pena di tornare e approfondire questi temi dopo il fatto, quando questi concetti siano stati acquisiti ad un livello operativo e la persona interessata abbia raggiunto un certo livello di maturità intellettuale. Il lettore[1] che abbiamo in mente può essere un entusiasta studente di scuole medie o superiori che stia contemplando futuri studi universitari in matematica, o una persona che non abbia svolto studi di stampo scientifico ma sia interessata ad esporsi a concetti propri del linguaggio della matematica.

Come *Leitmotif* (spesso celato dietro le quinte) abbiamo scelto l'idea dello sviluppo decimale dei numeri: questo sottintende considerazioni piuttosto raffinate sulla natura stessa del concetto di numero—quali tipi di numeri sia naturale considerare; l'incompletezza dei numeri razionali e la conseguente introduzione dei numeri reali; e via dicendo, portando inevitabilmente al concetto di cardinalità di un insieme ed alla differenza tra la cardinalità numerabile e quella del continuo. Allo stesso tempo, lo stesso concetto (lo sviluppo decimale) è un'ottima illustrazione della nozione di limite, e può proporsi parallelamente alle basi del calcolo infinitesimale. E il meccanismo alla base dello sviluppo decimale di un numero ha le sue radici nell'aritmetica modulare, permettendoci di gettare uno sguardo (sia pure superficiale) su un mondo algebrico popolato

[1] Speriamo che non sia necessario specificare che usiamo il genere maschile come neutro: ci auguriamo vivamente che metà dei nostri *lettori* siano di fatto *lettrici.*

di anelli e campi, e sulle profondità insondabili della teoria dei numeri.

Questi sono i temi trattati nei tre capitoli di questo libro. Questi sono essenzialmente indipendenti l'uno dall'altro, e completati da un'appendice dove entriamo un po' più in merito ad alcune questioni tecniche sollevate nel testo. Il lettore può scegliere di leggere tutto quanto dall'inizio alla fine, o di saltare un po' qui o un po' là, a suo piacimento (ma sospettiamo che la prima strategia sia più efficace).

Se quanto trattiamo è matematica completamente elementare, certo parte in un modo o nell'altro del normale *curriculum* scolastico, così sia: saremmo molto contenti se gli studenti ai primi corsi di matematica dell'università statunitense dove insegna chi scrive avessero davvero 'processato' la matematica elementare al livello di maturità che questo libro vuole comunicare, *prima* di affrontare i nostri corsi. Ahinoi, non è così negli USA, e (ci dicono i nostri colleghi in altre università di tutto il mondo) questo problema è tutt'altro che prerogativa del nuovo continente. Siamo spesso colpiti da quanto poco il 'grande pubblico' (o anche il pubblico relativamente specializzato che finisce per scegliere studi universitari di carattere scientifico) sia a conoscenza di cosa voglia dire, alla fin fine, 'fare matematica'.

Fare matematica? Ad una richiesta di informazioni sulle proprie attività, uno studente universitario può rispondere di 'fare matematica', come di 'fare ingegneria' o 'fare lettere'.

Forse il nostro messaggio principale vuol essere il seguente: la matematica si *fa* in un modo diverso da come si *fa* chimica o si *fa* psicologia: mentre un biologo *studia* la biologia, un matematico davvero *fa* la matematica, così come un panettiere *fa* il pane.

Non stiamo esprimendo un giudizio di merito, ma semplicemente osservando che la maggior parte delle scienze si riferisce ad una realtà esteriore che in tempi odierni è accessibile solo attraverso strumenti molto sofisticati. Una pubblicazione di biologia (o di fisica sperimentale, o di chimica...) in ultima analisi descrive o spiega una fenomenologia esteriore e percepita in laboratorio; l'accesso a questa sperimentazione è necessariamente riservato ad una élite strettissima. Il laboratorio del matematico, al contrario, risiede interamente nella mente del matematico; non al di fuori di essa. Come tale, è accessibile al ricercatore universitario così come al turista che passeggia pigramente sul bagnasciuga. Stephen Smale risolse la congettura di Poincaré in dimensione > 4 appunto mentre passeggiava sulle spiagge di Rio; André Weil produsse matematica di grande profondità e bellezza (e tuttora fonte di ricerca corrente) in prigione, durante la seconda guerra mondiale.

Se quindi il lavoro di ricerca del biologo contribuisce a 'creare' il campo della biologia tanto quanto la matematica quello del matematico, il matematico rimane a nostro avviso più vicino alla pasta del suo campo, alla materia prima. Una pubblicazione di matematica non *descrive* un 'fenomeno matematico'; la pubblicazione *è* il fenomeno matematico. Chi la scrive produce concretamente questo fenomeno, come il musicista che scrive una sinfonia produce un nuovo 'fenomeno musicale'.

Non vogliamo essere fraintesi. Chi scrive crede nella realtà esteriore (Platonica o meno) della matematica. Il lavoro del matematico non è diverso da quello di ogni altro scienziato, nel senso che l'obiettivo rimane quello di spiegare fenomeni universali e universalmente riproducibili; la risposta a una domanda matematica è la stessa, che questa venga posta da un matematico italiano o neozelandese, sulla Terra o nei dintorni di Betelgeuse. Il matematico si distingue solo nel senso che queste domande sono in linea di principio a portata di mano (o 'di cervello') di chiunque: per accedervi non occorre la catalisi di grossi apparati o laboratori.

Questo dovrebbe rendere la matematica il paradiso del divulgatore: al lettore non si richiede null'altro che la predisposizione a farsi guidare lungo un percorso in linea di massima accessibile a chiunque. Purtroppo, però, la matematica (a differenza della fisica o della biologia) non si presta troppo bene ad essere descritta in termini metaforici che colpiscano l'immaginazione. Di qui un paradosso divulgativo di non facile risoluzione, che ci porta a scrivere un libro *di* matematica anche se vorremmo scrivere un libro *sulla* matematica. La matematica, al pari della musica, non si presta ad essere osservata *in vitro:* un libro che discuta a fondo una sinfonia di Beethoven rimane un esercizio intellettuale un po' vacuo, se la sua lettura non segue o accompagna l'ascolto di quella sinfonia. Allo stesso modo, 'parlare' di matematica serve a poco, se la discussione non si accompagna all'azione.

Astratto e concreto. La matematica e la musica hanno di fatto molto in parallelo: entrambe si *fanno* (nella nostra accezione, anche il sinfonista *fa* la musica come il panettiere *fa* il pane!), quindi entrambe sono altrettanto concrete ed accessibili; ed è estremamente difficile 'parlare' di entrambe. Il problema naturalmente risiede nel fatto che la materia prima di entrambe, per quanto *concretamente* accessibile (chi non è in grado di fischiettare una bella melodia?), è purtuttavia un affare molto *astratto* (comporre quella melodia, capire un'efficace struttura armonica soggiacente, scriverne una partitura per orchestra, ecc., è ben altra faccenda...). Per la matematica, e forse per la musica, è proprio il tiro incrociato di concretezza ed astrazione che dà vita alla materia. Le domande che il matematico di professione si pone sono, dal suo punto di vista, estremamente *concrete:* vi è arrivato da un cammino che le rende tali. Ma rispondere a queste domande richiede di solito la costruzione di un apparato *astratto:* una nuova struttura, o un nuovo punto di vista che collochi la domanda all'interno di un contesto in cui domande (sorprendentemente) analoghe hanno già trovato risposta. Questo nuovo contesto chiarirà la situazione concernente la prima domanda, ma porterà alla luce altre domande 'concrete' che reclameranno la stessa sorte.

In questo libro vorremmo illustrare questo processo di scoperta, se pur in esempi estremamente elementari: come la semplice necessità di comprendere adeguatamente osservazioni banali nella loro concretezza porti inevitabilmente alla costruzione di un opportuno apparato astratto; e come, una volta che questo apparato sia stato costruito e abbia sostanzialmente chiarito la situazione concernente la domanda originale, altre domande ben più profonde vengono naturalmente a galla; e così via, *ad libitum.* Questo è il processo motore della matematica più avanzata, ma lo si può vedere bene in azione anche su questioni 'elementari', e ci sembra che questo possa interessare un certo settore del pubblico.

In ossequio al fatto che *parlare* di matematica senza *fare* matematica è un esercizio di dubbia utilità, abbiamo inframmezzato il nostro discorso con 'Momenti di Riflessione', in cui vorremmo che il lettore si ponesse in prima persona di fronte a quanto si è esposto. Questo prenderà la forma di esempi che consiglieremo al lettore di esaminare sulla base di quanto letto, o spunti per approfondimenti, o temi che il lettore dovrebbe cercare di affrontare prima che vengano svolti nel testo. Non vogliamo forzare la mano al lettore frettoloso, ma dobbiamo avvertirlo che se non dedicherà un po' di tempo e pazienza a questi 'Momenti', la parte più sostanziale di quanto racconteremo non lo raggiungerà. Di nuovo, la premessa di questo libro è proprio che la matematica si *fa,* non la si guarda da lontano. Non si impara ad andare in bicicletta leggendo un libro, né si capisce o apprezza la matematica senza *farla.* Naturalmente, speriamo comunque che anche un lettore meno paziente (o più distratto da altri impegni) potrà estrarre materiale di qualche interesse anche senza accordarci questi *momenti* di pausa e riflessione.

Questo libro è davvero rivolto a chi non ha esperienza di studio superiore in matematica, ed è per questo che tratta argomenti completamente elementari. Ambire a trattare, in un libro simile, di matematica a livello di ricerca odierna sarebbe un po' come voler condurre in un libro di *bricolage* un lettore armato di trapano e martello alla costruzione di uno space shuttle. Ci aspettiamo però che nella lettura il lettore si adegui gradualmente ad esporsi alla matematica da un punto sempre più vicino a quello che si usa in corsi universitari. Quindi il tenore dei capitoli di questo libro, intenzionalmente, *non è* omogeneo: se all'inizio del primo capitolo parleremo al lettore come parleremmo ad uno studente (beninteso motivato e attento) di scuola media o superiore, alla fine del terzo tratteremo gli argomenti da un punto di vista non tanto diverso da quello adottato abitualmente in corsi universitari del primo anno.

Se avremo successo, alla fine dell'esperimento il lettore dovrebbe essere in grado di aprire a pagina 1 un qualunque testo universitario per un primo corso di algebra od analisi, ed affrontarne la lettura senza troppe difficoltà. Il lettore che ci abbia seguito (e soprattutto il lettore che si sia soffermato sui temi studiati nei nostri Momenti di Riflessione) saprà *come* si legge un libro di matematica, cioè: con inesorabile lentezza, fermandosi ad ogni frase; e innanzi tutto saprà se la cosa può rivelarsi interessante. Perché questo succeda sarà però necessario scavalcare un famoso oceano, quello cioè che risiede confortabilmente tra il dire e il *fare*. . . .