Atti del XIV Convegno di Teoria del rischio

A cura di
Ennio Badolati

ARACNE

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–1827–9

I edizione: giugno 2008

Indice

IL PROCESSO DI ORNSTEIN-UHLENBECK

Ennio Badolati badolati@unimol.it
Università degli Studi del Molise

Bonum est quod haud aufertur, eruditio.
Menandro

1. Introduzione

È noto che la prima soddisfacente sistemazione della teoria relativa al moto browniano risale ad Einstein (1905, vedere Furth). Ma questa dottrina, come osservato da Nelson, "*anche se in accordo con la parte sperimentale, in realtà era un'esposizione altamente astratta*" (*a highly idealized treatments*, Nelson, p. 53). Di seguito Langevin trovò un'equazione differenziale per il moto, equazione che poi si rivelerà come una delle prime equazioni differenziali stocastiche così come l'origine del processo stocastico di Ornstein e Uhlenbeck. Anche se per l'ordinario moto browniano (ad es. particelle di carminio in acetone) le conclusioni di Ornstein-Uhlenbeck sono indistinguibili da quelle di Einstein (includendo gli sviluppi successivi di Smoluchowski), pure la teoria dei due fisici olandesi è una vera teoria dinamica (*a truly dynamical theory*, Nelson, p. 53) e, nel caso che il moto avvenga in un campo di forze, essa è vincente sulla teoria di Einstein-Smoluchowski.

Bibliografia

Furth R., *Albert Einstein investigations on the brownian movement*, Dover, New York, 1956;
Nelson E., *Dynamical theories of brownian motion*, Princeton U.P., Princeton, 1967.

2. L'equazione di Langevin

Nel 1908 il fisico francese Paul Langevin, non pienamente convinto della teoria di Einstein, pervenne all'equazione differenziale

(2. 1) $$dv = -\beta v\, dt + \sigma\, dB_t$$

da intendere, al giorno d'oggi, come un'equazione differenziale stocastica, essendo B_t un processo di Wiener. La

(2. 1), che si riferisce al moto browniano unidirezionale, veniva ottenuta aggiungendo alla relazione di Stokes

(2. 2) $$\frac{dv}{dt} = -\beta v \qquad (v(0) = v_0)$$

una forza (indicata con B_t e poi chiamata "*forza di Langevin*") da intendere come di tipo diffusivo. Sull'argomento riportiamo la considerazione di Risken "*...la forza B_t è di tipo stocastico, le cui proprietà sono date solo in media*" (*only in average*, Risken, p. 2).

Passiamo all'analisi effettuata – nel 1930 – da Ornstein ed Uhlenbeck sull'equazione di Langevin, senza dimenticare, tuttavia, che ci troviamo agli albori dei processi stocastici. Tanto premesso, le ipotesi introdotte dai due fisici olandesi sulla B_t (da loro identificata come $F(t)$) erano

(2. 3) $$E(B_t) = 0$$

(2. 4) $$E(B_t\, B_s) = \delta(t - s)$$

dove il simbolo $\delta(x)$ indica la funzione di Dirac, introdotta nella Fisica nei primi anni del XX secolo[1].

La (2. 3) veniva giustificata , dal punto di vista fisico, con la necessità che il valor medio della velocità seguisse la (2. 2), mentre il significato fisico della (2. 4) discendeva dalle seguenti considerazioni: posto che la forza di Langevin

---

[1] Osserviamo, però, che la funzione $\delta(x)$ appare nel fondamentale articolo di Einstein "*Uber die von molekularkinetischen Teorie ...*", Ann. Phys., 1905 (vedere Furth, p. 13).

$$F(s) = \sigma B_s$$

dipende dagli urti fra particelle di polline e molecole, agli istanti t_1 e t_2 il prodotto

$$F(t_1)F(t_2)$$

viene considerato nullo per variazioni di tempo $\Delta t = |t_1 - t_2|$ più grandi dell'intervallo di tempo τ_0 relativo alla collisione, ovvero

$$E_{1,2} = E[F(t_1)\, F(t_2)] = 0 \text{ per } |t_1 - t_2| \geq \tau_0$$

potendosi stimare come indipendenti gli urti. Pertanto facendo $\tau_0 \to 0$ ne segue

$$E[F(t_1)\, F(t_2)] = \sigma^2\, \delta(t_1 - t_2)$$

essendo la presenza della funzione δ giustificata dalla necessità di integrare il valor medio $E_{1,2}$ per poi ottenere un risultato finito.

Oggi la

(2. 1) viene considerata come un'equazione differenziale stocastica e la soluzione (per $v_0 = \text{cost}$) viene indicata come processo di Ornstein-Uhlenbeck. Per ottenere tale espressione, almeno formalmente, moltiplichiamo ambo i membri della

(2. 1) per il fattore integrante

$$\bar{v}(t) = e^{\beta t}$$

in modo da ottenere

$$d\left(e^{\beta t} v\right) = e^{\beta t} \sigma\, dB_t$$

e quindi (sempre formalmente) la soluzione

(2. 5) $$v_t = v_0\, e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \sigma \int_0^t e^{\beta s} dB_s\,.$$

Nella (2. 5) l'integrazione avviene attraverso un'integrale di Ito e quindi, ricordando che per tale integrale esiste una formula d'integrazione per parti (Mikosh, p. 122) si potrebbe scrivere

$$\int_0^t e^{\beta s}\, dB_s = e^{\beta t} B_t - \beta \int_0^t B_s\, e^{\beta s} ds$$

e quindi

$$v_t = v_0\, e^{-\beta t} + \sigma^2 B_t - e^{-\beta t} \sigma\, \beta \int_0^t B_s\, e^{\beta s} ds\ .$$

Sempre con riferimento all'integrazione di Ito, si può far vedere che la soluzione della

(2. 1) è effettiva ed anche unica.

È opportuno ricordare a questo punto – anche se in forma assai sintetica – che per le equazioni differenziali stocastiche esistono teoremi di esistenza ed unicità (vedere, ad es., Oksendal, p. 68), così come, per le stesse equazioni, esistono soluzioni forti e deboli. Sempre rinviando all'Oksendal (p. 72) per una discussione sull'argomento, ci limiteremo a ricordare che le soluzioni forti sono individuate da una traiettoria assegnata del moto browniano B_t ed inoltre che la soluzione è funzione della condizione iniziale v_0 (la quale può essere una costante o anche una variabile casuale) e di B_t. Una soluzione debole, invece, è costruita cercando di costruire una coppia di processi stocastici $\left(\widetilde{v}_t \text{ e } \widetilde{B}_t\right)$ tale che sussista l'equazione

(2. 1). L'unicità delle soluzioni deboli si riconduce alla circostanza che due soluzioni abbiano la stessa funzione di ripartizione.

Vediamo ora come nel lavoro originale di Ornstein-Uhlenbeck vengono trovati il valor medio $E(v_t)$ e la varianza $\mathrm{var}(v_t)$ del processo (2. 5). Ricordando la (2. 3) segue

(2. 6) $$E(v_t) = e^{-\beta t} v_0$$

e quindi per $t = 0$

$$E(v_t) = v_0 \qquad (t = t_0)$$

Per l'autocovarianza, poi, osserviamo che – in generale – dato un processo di Wiener X_t con valore medio

$$E(X_t) = m$$

si ha l'autocovarianza

$$\operatorname{cov}(X_s, X_t) = E((X_s - m)(X_t - m))$$

che, nel caso del moto browniano B_t distribuito secondo una normale $N(0,t)$ diventa (per $0 \le s \le t$)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(B_t, B_s) &= E(B_t \cdot B_s) = E\left(B_t B_s - B_s^{\ 2} + B_s^{\ 2}\right) = \\ &= E\left(B_s^{\ 2} + B_s(B_t - B_s)\right) = E\left(B_s^{\ 2}\right) = s\end{aligned}$$

e, quindi, come osservato da Nelson (Nelson, p. 54)

$$E\left(dB_t^{\ 2}\right) = dt\,.$$

Pertanto, nel caso del processo (2. 5) ed in base alla proprietà dell'integrale di Ito, discende (sempre per $0 \le s \le t$)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(v_s, v_t) &= E\left(e^{-\beta t}\,\sigma \int_0^t e^{\beta\alpha} dB_\alpha \cdot e^{-\beta s}\,\sigma \int_0^s e^{\beta\gamma} dB_\gamma\right) = \\ &= e^{-\beta(t+s)} \int_0^s e^{2\beta\tau}\,\sigma^2 d\tau = e^{-\beta(t+s)} \sigma^2\, \frac{e^{2\beta s} - 1}{2\beta}\end{aligned}$$

ovvero, per *s* e *t* qualsiasi

$$\operatorname{cov}(v_s, v_t) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\Big(\exp(-\beta|t-s|) - \exp(-\beta(t+s))\Big)$$

ed inoltre, per $t = s$, si ha

(2. 7) $$\operatorname{cov}(v_t, v_t) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right).$$

Dai risultati precedenti si deduce che, per $t \to \infty$, il processo di Ornstein – Uhlenbeck tende alla distribuzione normale di media m e varianza ω

$$m = 0$$

$$\omega = \frac{\sigma^2}{2\beta}$$

e da queste relazioni seguono delle interessanti considerazioni relative al significato fisico dei parametri β e σ (Nelson, p. 55).

Si può dimostrare che il processo (2. 5) è gaussiano, come vedremo anche nel prossimo paragrafo; tuttavia su Mikosh (p. 143) si trova una dimostrazione che ora andremo a riassumere.

Considerato che l'integrale di Ito

$$\int_0^t e^{-\beta s} dB_s$$

è il limite, in media quadratica, delle somme

(2. 8) $$S_n = \sum_1^n {}_1 \exp(-\beta t_{i-1})(B_i - B_{i-1}) \qquad (B_i = B(t_i))$$

per partizioni δ_n di $[0,t]$ con[2] $d(S_n) \to 0$, e tenendo conto che la variabile casuale $B_t - B_s$ segue la distribuzione normale $N(0, t-s)$ con $s < t$, si ha che la somma (2. 8) ha per media e varianza

$$E(S_n) = 0$$

(2. 9) $$\mathrm{var}(S_n) = \sum_1^n {}_i \exp(-2\beta t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

A questo punto si vede che la somma che appare nella (2. 9) si può legare all'integrale

$$\int_0^t e^{-2\beta s} ds = \frac{1}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

è poiché la convergenza in media quadratica implica la convergenza in distribuzione (Mikosh, p. 186) si può concludere che il

---

[2] Il simbolo $d(E)$ indica il diametro dell'insieme E ovvero $d(E) = \sup|x'' - x'|$ $(x'', x' \in E)$.

limite in media quadratica delle somme S_n è distribuito normalmente. Ponendo nella (2. 5) $v_0 = 0$ si trova

(2.5')
$$V_t = e^{-\beta t}\sigma\int_0^t e^{\beta s} dB_s$$

da cui

$$E(v_t) = 0$$
$$\mathrm{var}(v_t) = \mathrm{var}\left(e^{-\beta t}\sigma\int_0^t e^{\beta s} dB_s\right) = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(e^{2\beta t} - 1\right).$$

La memoria di Ornstein-Uhlenbeck venne pubblicata su Physical review (1930, vol. 36, pp. 823-841) col titolo "*On the theory of brownian motion*" ed inoltre fu inclusa, assieme ad altre pregevoli pubblicazioni, sul volume di Wax citato in bibliografia. In particolare, su tale raccolta, si trova la memoria di Doob ("*Brownian movement and stochastic equations*" Annals of Math., 43, 1942, pp. 351-369) considerata, per comune consenso, come una sistemazione fondamentale della teoria matematica relativa all'equazione di Langevin. È bene aggiungere che un'incisiva sintesi dell'articolo di Doob si trova nella pubblicazione di Jacobsen riportata nella bibliografia.

Chiudiamo ora il paragrafo con qualche cenno biografico sui fisici citati.

Paul Langevin (1872-1946). Nato a Parigi, nel 1904 divenne professore di Fisica al Collegio di Francia e, poi, nel 1926 direttore della scuola di Fisica e chimica. Conseguì notevoli risultati nello studio dei fenomeni magnetici così come divulgò in Francia la teoria della relatività. A titolo di aneddoto segnaliamo che nel 1910 si parlò di una sia relazione con Marie Curie (già vedova dal 1906), con conseguente minaccia di duello contro un diffamatore, duello che non ebbe luogo, come nello stile dei migliori vaudevilles. Piuttosto la vera tragedia è la morte di Marie Curie (1934), avvenuta per una forma di leucemia contratta nello studio di materiale radioattivo.

Leonard Salomon Ornstein (1880-1941). Di nascita olandese, fu nominato professore di Fisica, nel 1914, presso l'università di Utrecht, come successore di Peter Debye, e poi, nel 1922, divenne direttore del Laboratorio di Fisica della stessa università. L'Olanda ha ricordato questo suo scienziato intitolandogli un edificio nell'università di Utrecht (Ornstein Laboratorium).

George Eugene Uhlenbeck (1900-1988). Nato a Batavia (oggi Jakarta in Indonesia) si trasferì presto in Olanda. Insegnò nell'università di Utrecht (1935-1988) e poi in molte università americane. Nel 1925 introdusse il concetto di spin dell'elettrone e poi fu un distinto studioso di meccanica statistica. Per i suoi studi ebbe la medaglia Planck nel 1964 e la medaglia Lorentz nel 1970. Aggiungiamo che negli anni '20 fu in Italia dove strinse amicizia con Enrico Fermi.

*George Gabriel Sto*kes (1819-1903). Nato in Irlanda si trasferì presto in Inghilterra. Studiò all'università di Cambridge dove divenne professore lucasiano di matematica nel 1849. Fu anche presidente della Royal Society (1885-1890). Conseguì risultati fondamentali in matematica ed in fisica (ottica, termo-dinamica e fluido-dinamica).

Bibliografia

Coffey W.T. et al, The Lanvegin Equation, World Scientific, Singapore, 1996;

Jacobsen M., Laplace and the origin of the Ornstein-Uhlenbeck process, Bernoulli, 2 (3), 1996, pp. 217-286;

Mikosh T.,Elementary stochastic calculus, World Scientific, Singapore, 1998;

Nelson E., loc. cit.

Oksendal B., Stochastic differential equations (6 ed), Springer, Berlin, 2003.

Risken H., The Fokker-Planck equation (2 ed.), Springer, Berlin, 1996;

Wax N., Noise and stochastic processes, Dover, New York, 1954.

La memoria di Lanvegin ("Sur la théorie du movement brownien", Comptes Rendus, Ac. Sc. Paris, 146, 1908) è stata tradotta da A. Gythiel su Am. Journ. Physics, 65, 1997, con un'introduzione di Don S. Lemons.

Infine segnaliamo che una semplice esposizione dell'equazione di Langevin, in ambito puramente fisico si può vedere su

Pauli W., Meccanica statistica, Boringhieri, Torino, 1964.

Siti sul web:

Finch, S., Ornstein-Uhlenbeck Process, May 15, 2004. http://pauillac.inria.fr/algo/csolve/ou.pdf;

P. Graczyk, T. Jakubowski, Analysis of Ornstein-Uhlenbeck and Laguerre stochastic processes, Novembre, 2006. http://math.univ-angers.fr/publications/prepub/index2006.html.

3. Processi Gaussiani

Seguendo Kallenberg (Kallenberg, p. 200), diremo che un processo stocastico X_t, con t variabile in un insieme T, è gaussiano se, introdotte le $n-$ple

$$
\begin{array}{lll}
\underline{t} & \equiv (t_1 \ldots t_n) & (t_i \in T) \\
\underline{c} & \equiv (c_1 \ldots c_n) & (c_i \in R) \\
\underline{X} & \equiv (X_1 \ldots X_n) & (X_i = X(t_i))
\end{array}
$$

la variabile casuale

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$$

è gaussiana per ogni scelta di $n \in N$, $\underline{t} \in T^n$ e $\underline{c} \in R^n$. La condizione è certamente soddisfatta se le X_t sono variabili casuali gaussiane indipendenti. In particolare un processo X_t si dice centrato se

$$E(X_t) = 0 \qquad\qquad (\forall t \in T).$$

Sussiste un teorema[3] (Kallenberg, p. 200), il quale afferma che la distribuzione di un processo gaussiano X_t $(t \in T)$ è determinata dalle funzioni $E(X_t)$ e $\text{cov}(X_s, X_t)$ con $s, t \in T$.

Per quanto riguarda i rapporti tra le catene di Markov ed i processi gaussiani sussiste una notevole proprietà, che ci limitiamo ad enunciare: se X_t è processo gaussiano in $T \subset R$ e se

$$r(s,t) = \text{cov}(X_s, X_t)$$

allora X_t è una catena di Markov se e solo se

$$r(s,u) = \frac{r(s,t) \cdot r(t,u)}{r(t,t)} \qquad (s \le t \le u; s,t,u \in T)$$

con la convenzione (invero dura a scriversi!) che $\frac{0}{0} = 0$. Se poi X_t è stazionario e definito su R, allora esistono due costanti $a \ge 0$ e $b \ge 0$ (potendo anche essere b non limitato) tali che

$$r(s,t) = a \exp(-b|t-s|).$$

Tanto premesso, si ha che un processo gaussiano centrato e con funzione di covarianza

$$r(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

è chiamato un processo di Ornstein-Uhlenbeck. Tale processo può esprimersi in termini di un moto browniano alla seguente maniera

$$Y_t = e^{-t}\, B\left(\frac{1}{2} e^{2t}\right) \qquad\qquad (t \in R)$$

ed inoltre sussiste la proprietà che il processo di Ornstein-Uhlenbeck è il solo processo stazionario gaussiano che è anche una catena di Markov.

---

[3] La dimostrazione segue facilmente dal teorema di Cramér – Wold (Kallenberg p. 64). Ricordiamo che lo statistico Herman Ole Wold (1908-1992) non è da confondere con il probabilista Abraham Wald (1902-1950).

Bibliografia

Doob J.L.,*Stochastic processes*, Wiley, New York, 1953;
Kallenberg O., *Foundations of modern probability*, Springer, New York, 1997;
Mikosh T.,loc. cit.
Nelson E., loc. cit.
Rolski T. et al. *Stochastic process for insurance and finance*, Wiley, New York, 1999.

4. Il modello di Vasicek

La prima applicazione del moto browniano alla finanza matematica è la pubblicazione "*Théorie de la speculation*" (1900) di Louis Bachelier[4], ma non va trascurato che nel 1863 l'economista e matematico francese Jules Regnault[5] (1797-1863) pubblicò il saggio "*Calcul des chance set philosophie de la bourse*", primo esempio di analisi del mercato azionario con metodi qualitativi. Di seguito occorre ricordare il danese Thorvald Nicolai Thiele (1838-1910), astronomo e matematico, che nel 1880 scrisse un saggio (*Sur la compensation de quelques erreurs* ..., Cophenhagen) nel quale, sia pure nell'ambito della teoria degli errori, propose un modello basato si di uno schema probabilistico riconducibile al moto browniano (*Thiele proposes a model consisting of ... a Brownian motion*, Lauritzen, p. 41). Ma l'occasione è buona per ricordare che la teoria degli errori, argomento importante nella ricerca matematica e fisica relativa al XIX secolo, è storicamente alla base della meccanica statistica e – quindi – alla teoria del moto browniano.

Passiamo ora ad una delle principali applicazioni alla finanza del processo di Ornstein – Uhlenbeck alla finanza matematica, ovvero al modello ideato da Vasicek nel 1977 per descrivere l'evoluzione dei

[4] In origine tesi di dottorato, il lavoro venne pubblicato sulla rivista Annales Sc. de l'Ecole Norm. Sup., 17, 3[a] serie, 1900, pp. 21-86.
[5] Da non confondere con il fisico e chimico Henri Victor Regnault (1810-1878).