A08

175

Giuseppe Pezzinga

Esercizi di Meccanica dei fluidi

ARACNE

ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–1497–4

I edizione: febbraio 2008

INDICE

PREFAZIONE

Sono qui raccolti e svolti esercizi assegnati alla prova scritta degli esami di profitto dell'insegnamento di "Meccanica dei fluidi" tenuto dall'anno accademico 1992-93 nell'ambito del Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Catania.

La suddivisione in capitoli rispecchia quella classica della disciplina. Si incontrano quindi i capitoli sulla *Statica dei fluidi*, sulla *Dinamica dei fluidi ideali*, sulla dinamica dei fluidi reali, nell'ambito della quale si considerano in special modo i problemi relativi alle *Correnti in pressione*. Altri argomenti sono qui definiti come complementari: *Fluidi comprimibili*, *Strato limite*, *Moto vario di correnti in pressione* e *Correnti a superficie libera in moto permanente*. Questi ultimi argomenti hanno tradizionalmente trovato spazio nell'insegnamento di "Meccanica dei fluidi" svolto nell'ambito della laurea quinquennale del vecchio ordinamento, mentre non sono trattati nel corso svolto nell'ambito della laurea triennale del nuovo ordinamento. Comunque, si è ritenuto utile includere nella raccolta anche gli esercizi ad essi relativi, per fornire almeno un'idea dell'ampiezza dei possibili campi di applicazione dei principi della disciplina.

Le suddivisioni interne ai capitoli sono puramente indicative, in quanto naturalmente gli argomenti fondamentali, come per esempio il teorema di Bernoulli, vengono richiamati ripetutamente. Inoltre qualche ripetizione è causata dalla volontà di mantenere i testi degli esercizi così come sono stati formulati nelle prove d'esame.

Questo testo, uscito precedentemente in forma di dispensa, è stato ampliato introducendo nuovi esercizi e inserendo all'inizio dei primi tre capitoli una sintesi delle principali nozioni teoriche necessarie per la risoluzione.

È consigliabile cercare di risolvere autonomamente gli esercizi, prima di consultare la soluzione. Questa richiama brevemente la teoria e si conclude con i risultati numerici, che sono importanti per capire e prendere confidenza con l'entità delle grandezze fisiche in gioco.

Giuseppe Pezzinga

1. STATICA DEI FLUIDI

Distribuzione delle pressioni

La legge fondamentale per l'analisi della distribuzione delle pressioni in un liquido in quiete è la legge di Stevino:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma}$$

che stabilisce che per due punti appartenenti allo stesso fluido in quiete e in continuità spaziale si mantiene costante la quota piezometrica. Questa è la somma della quota geodetica z, assunta nella direzione verticale e positiva verso l'alto, con riferimento ad un piano arbitrario sul quale $z = 0$, e dell'altezza piezometrica p/γ, rapporto tra la pressione p e il peso specifico del liquido.

Al piano alla quota in corrispondenza alla quale la pressione si annulla, si dà il nome di piano dei carichi idrostatici. Occorre tuttavia distinguere le pressioni vere e proprie, dette assolute, indicate d'ora in avanti con l'asterisco p^*, che sono quelle che compaiono nelle leggi fondamentali della termodinamica, e le pressioni relative, che sono riferite alla pressione atmosferica. Quindi la pressione atmosferica assoluta, al livello del mare e in condizioni standard, vale $p_a^* = 101300$ Pa; la pressione atmosferica relativa è invece $p_a = 0$. Si parlerà di conseguenza di piano dei carichi idrostatici assoluti e di piano dei carichi idrostatici relativi.

Nota la quota del piano dei carichi idrostatici, cioè la quota piezometrica del liquido, la pressione in un punto si può quindi determinare dal prodotto del peso specifico per la differenza tra la quota del piano dei carichi idrostatici z_0 e la quota del punto:

$$p_1 = \gamma(z_0 - z_1).$$

Inversamente, nota la pressione in un punto, la quota del piano dei carichi idrostatici si può determinare dalla relazione

$$z_0 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma}.$$

Per i fluidi di piccolo peso specifico, come l'aria e gli altri gas, si può assumere che la pressione sia costante con la quota e non si può parlare di piano dei carichi idrostatici.

Misura della pressione e della quota piezometrica

Sulla base di quanto detto in precedenza, gli strumenti di misura che consentono di ricavare la distribuzione delle pressioni in un liquido sono di due tipi, quelli che misurano la quota piezometrica e quelli che misurano la pressione in un punto.

Gli strumenti del primo tipo sono i piezometri, costituiti da un tubo collegato al liquido di cui si vuol misurare la quota piezometrica e superiormente in comunicazione con l'atmosfera. Nel tubo il livello della superficie del liquido a contatto con l'atmosfera individua la quota piezometrica. La quota piezometrica assoluta starà più in alto della quantità p_a^*/γ.

Se nel tubo, sempre aperto superiormente, è presente un liquido ausiliario di peso specifico differente γ_m, si parla di manometro semplice. Se Δ è l'altezza della colonna di liquido ausiliario, la pressione all'interfaccia tra i due liquidi sarà

$$p_i = \gamma_m \Delta,$$

da cui si può determinare la distribuzione delle pressioni.

Per pressioni più elevate si ricorre ai manometri metallici, basati sulla deformazione di una membrana metallica legata alla pressione. Convenzionalmente il valore letto sulla scala graduata del manometro si riferisce al baricentro dello strumento. Inoltre di solito la scala del manometro è in bar. Indicando con n il valore della pressione in bar, la pressione in corrispondenza alla quota del baricentro del manometro sarà

$$p_m = 10^5 n$$

e da questa si può determinare la distribuzione delle pressioni.

I manometri differenziali misurano il dislivello tra i piani dei carichi idrostatici di due liquidi dello stesso peso specifico. Nota l'indicazione del manometro differenziale Δ, la differenza tra le quote piezometriche dei due liquidi è

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma},$$

se il peso specifico del liquido manometrico è maggiore di γ, mentre risulta

$$\delta = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma},$$

se il peso specifico del liquido manometrico è minore di γ.

Se il manometro differenziale è posto tra due fluidi di piccolo peso specifico, la differenza delle pressioni, costanti con la quota, dei due fluidi sarà:

$$p_1 - p_2 = \gamma_m \Delta$$

Spinta su superficie piana

La spinta è la risultante delle forze elementari pari al prodotto della pressione per l'area della superficie infinitesima sulla quale questa agisce per il versore normale con verso dal fluido alla superficie. La determinazione di questo vettore per una superficie piana si riduce quindi alla valutazione del modulo, che, data la linearità della distribuzione delle pressioni, è pari al prodotto della pressione nel baricentro geometrico della superficie per la sua area:

$$S = p_G A.$$

La posizione della risultante del sistema di forze distribuite (centro di spinta) si ottiene in termini di equivalenza dei momenti rispetto a due assi coordinati. Si sceglie convenzionalmente di far riferimento alla cosidetta retta di sponda, cioè l'intersezione tra il piano dei carichi idrostatici e il piano contenente la superficie in esame e a una sua ortogonale sul piano contenente la superficie, che coinciderà con una retta di massima pendenza.

Con riferimento a questo sistema, la distanza del centro di spinta dalla retta di sponda si ottiene come

$$\xi = \frac{I}{M},$$

essendo rispettivamente I il momento d'inerzia e M il momento statico della superficie rispetto alla retta di sponda. Considerando il teorema di Huigens-Steiner, la distanza del centro di spinta dalla retta di sponda si può calcolare anche come

$$\xi = \frac{I_0 + Ax_G^2}{M},$$

dove I_0 è il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il baricentro della superficie e parallelo alla retta di sponda e x_G è la distanza del baricentro dalla retta di sponda.

Questo risultato fornisce l'opportunità per valutare la distanza del centro di spinta dall'asse baricentrico come

$$\xi_0 = \frac{I_0}{M}.$$

L'altra coordinata del centro di spinta è data da:

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

essendo I_{xy} il momento centrifugo della superficie rispetto agli assi coordinati. Nel caso che la superficie presenti un asse di simmetria coincidente con una delle rette di massima pendenza, il centro di spinta starà sull'asse di simmetria.

Per spinte esercitate da fluidi di piccolo peso specifico, il centro di spinta coincide con il baricentro della superficie.

Spinta su superficie curva

La determinazione della spinta su una superficie curva si può effettuare secondo due modalità: il metodo delle componenti e il metodo dell'equazione globale. Nel primo si valuta il vettore costituente la spinta secondo le tre componenti in un sistema di assi coordinati. In particolare, se z è l'asse verticale, le componenti orizzontali risultano rispettivamente pari a

$$S_x = p_{Gx} A_x, \qquad S_y = p_{Gy} A_y,$$

essendo p_{Gx} e A_x la pressione nel baricentro e l'area della proiezione della superficie curva su un piano di normale x, e p_{Gy} e A_y la pressione nel baricentro e l'area della proiezione della superficie curva su un piano di normale y.

La componente verticale è pari a

$$S_z = \gamma W,$$

dove W è il volume compreso tra la superficie, il piano dei carichi idrostatici e le generatrici verticali passanti per il contorno della superficie stessa.

Il metodo delle componenti fornisce indicazioni solo sul valore assoluto di queste e non sul loro segno, per determinare il quale occorre osservare la posizione relativa del liquido e della superficie.

Per fluidi di piccolo peso specifico, il metodo delle componenti fornisce

$$S_x = pA_x, \qquad S_y = pA_y, \qquad S_z = pA_z,$$

essendo la pressione costante.

Anche se l'equazione globale dell'equilibrio statico

$$\mathbf{G} + \mathbf{\Pi} = 0$$

può essere scritta per qualunque volume di fluido in quiete, il metodo dell'equazione globale si può applicare vantaggiosamente quando la superficie curva abbia il contorno contenuto in un piano. In tal caso, se la superficie presenta la concavità verso il fluido, delimitato il volume di fluido contenuto tra la superficie curva e la superficie piana delimitata dal suo contorno, la spinta si può valutare come

$$\mathbf{S} = -\mathbf{\Pi}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}_1,$$

dove $\mathbf{S}$ è la spinta esercitata dal fluido sulla superficie curva, $\mathbf{\Pi}_0$ è la spinta esercitata dalla superficie curva sul fluido, $\mathbf{G}$ è il peso specifico del fluido e $\mathbf{\Pi}_1$ è la spinta esercitata dalla superficie piana sul fluido. Il calcolo viene ricondotto a una somma vettoriale tra il peso di un volume liquido e la spinta su una superficie piana. Se la superficie presenta la convessità verso il fluido, delimitato il volume di fluido fittizio contenuto tra la superficie curva e la superficie piana delimitata del suo contorno, la spinta si può valutare come

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Pi}_0 = -\mathbf{G} - \mathbf{\Pi}_1,$$

dove $\mathbf{S}$ è la spinta esercitata dal fluido reale sulla superficie curva, $\mathbf{\Pi}_0$ è la spinta esercitata dalla superficie curva sul fluido fittizio, $\mathbf{G}$ è il peso specifico del fluido fittizio e $\mathbf{\Pi}_1$ è la spinta esercitata dalla superficie piana sul fluido fittizio. Il metodo si estende facilmente se per necessità o per comodità il contorno è contenuto su più di una superficie piana. Per fluidi di piccolo peso specifico si può trascurare il contributo del peso $\mathbf{G}$.

La spinta su corpi immersi si può considerare come un caso particolare della spinta su una superficie curva il cui contorno è contenuto in un piano sul quale la pressione è nulla. Si ottiene quindi il ben noto principio di Archimede:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Pi}_0 = -\mathbf{G}.$$

Non esiste in generale un metodo per trovare il punto di applicazione della spinta su una superficie curva. In alcuni casi si può determinare la retta d'azione della spinta conoscendo l'inclinazione e un punto di passaggio. Quest'ultimo, per superfici con simmetria assiale o polare, può essere determinato dall'equilibrio ai momenti come il centro di curvatura della superficie. Quindi per le superfici sferiche la retta d'azione passerà per il centro della sfera, per le superfici cilindriche intersecherà ortogonalmente l'asse del cilindro.

Spinte su superfici piane

Esercizio 1.1

1. Determinare l'indicazione del manometro differenziale in Figura 1.1.
2. Calcolare la spinta complessivamente esercitata sulla paratoia rettangolare di traccia A-B e di larghezza L.
3. Valutare il modulo della forza **F** da applicare in A per tenere in equilibrio la paratoia.

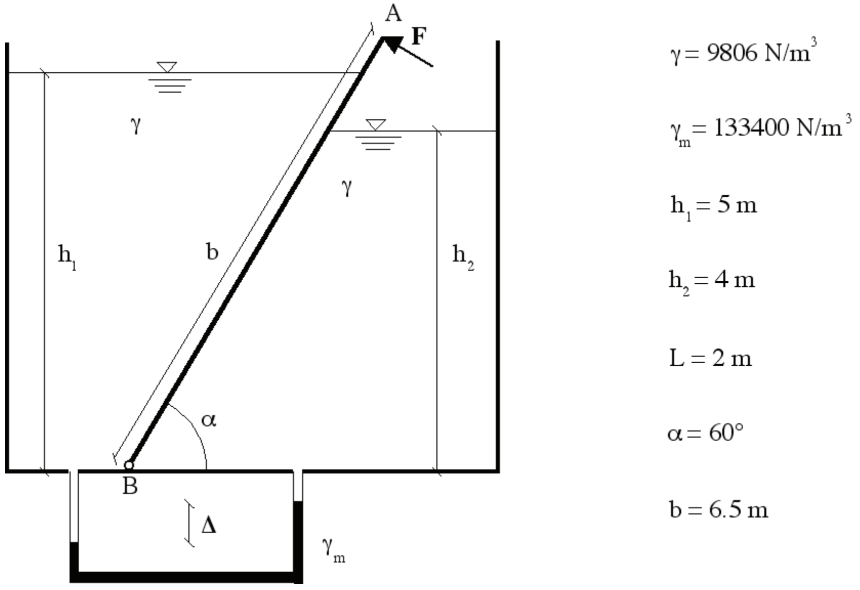


Figura 1.1

Soluzione

1. Il dislivello $h_1 - h_2$ tra le superfici libere nelle due parti del recipiente è pari al dislivello tra i piani dei carichi idrostatici. L'indicazione del manometro differenziale si può quindi ricavare per mezzo della relazione

$$\Delta = \frac{\gamma(h_1 - h_2)}{\gamma_m - \gamma} = 0{,}0793 \text{ m.}$$

2. Il modulo della spinta **S** sulla superficie A-B è pari alla differenza dei moduli della spinta di sinistra S_1 e della spinta di destra S_2, essendo le due spinte di verso opposto

$$S = S_1 - S_2 = \frac{\gamma h_1^2 L}{2\sin\alpha} - \frac{\gamma h_2^2 L}{2\sin\alpha} = 101{,}9 \text{ kN}$$

3. La distanza del centro di spinta dalla retta di sponda si può esprimere in generale come

$$\xi = \frac{I}{M},$$

con I e M momento d'inerzia e momento statico rispetto alla retta di sponda. In questo caso, si ha:

$$\xi_1 = \frac{2h_1}{3\sin\alpha}, \qquad \xi_2 = \frac{2h_2}{3\sin\alpha}.$$

La forza F si ricava quindi dall'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera B:

$$F = \frac{1}{b}\left[S_1\left(\frac{h_1}{\sin\alpha} - \xi_1\right) - S_2\left(\frac{h_2}{\sin\alpha} - \xi_2\right)\right] = 40{,}9 \text{ kN}.$$

Esercizio 1.2

1. Con riferimento alla Figura 1.2, determinare la quota, rispetto all'interfaccia tra i due liquidi, del piano dei carichi idrostatici del liquido γ_2.
2. Calcolare la spinta sulla superficie quadrata di traccia A-B.
3. Valutare la forza da applicare in A per tenere in equilibrio la paratoia A-B.

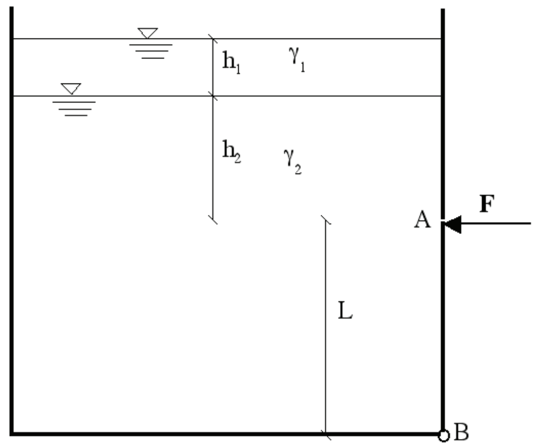
Soluzione

1. La pressione all'interfaccia vale

$$p_1 = \gamma_1 h_1 = 8000 \text{ Pa}.$$

Quindi la distanza del piano dei carichi idrostatici del liquido γ_2 dall'interfaccia risulta

$$h = \frac{p_1}{\gamma_2} = 0{,}816 \text{ m}.$$



$\gamma_1 = 8000$ N/m^3

$\gamma_2 = 9806$ N/m^3

$h_1 = 1$ m

$h_2 = 2$ m

$L = 3$ m

Figura 1.2

2. Detto h_G l'affondamento del baricentro della superficie quadrata A-B, la spinta sulla superficie si può calcolare come

$$S = \gamma_2 h_G A = \gamma_2 \left(h + h_2 + \frac{L}{2} \right) L^2 = 381 \text{ kN}.$$

3. La distanza del centro di spinta dal baricentro di A-B si può esprimere come

$$\xi_0 = \frac{I_0}{M},$$

con I_0 momento d'inerzia rispetto a un asse baricentrico parallelo alla retta di sponda, che in questo caso vale

$$I_0 = \frac{L^4}{12},$$

e M momento statico rispetto alla retta di sponda, pari a

$$M = A x_G = L^2 \left(h + h_2 + \frac{L}{2} \right).$$

Risulta quindi $\xi_0 = 0{,}174$ m. La forza F si ricava quindi dall'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera B:

$$F = \frac{S}{L}\left(\frac{L}{2} - \xi_0\right) = 168 \text{ kN.}$$

Esercizio 1.3

1. Con riferimento alla Figura 1.3, calcolare la spinta complessivamente esercitata dai due fluidi sulla superficie rettangolare di traccia A-B e di larghezza *L*.
2. Valutare il modulo della forza orizzontale **F** da applicare in A per tenere in equilibrio la paratoia incernierata in B.

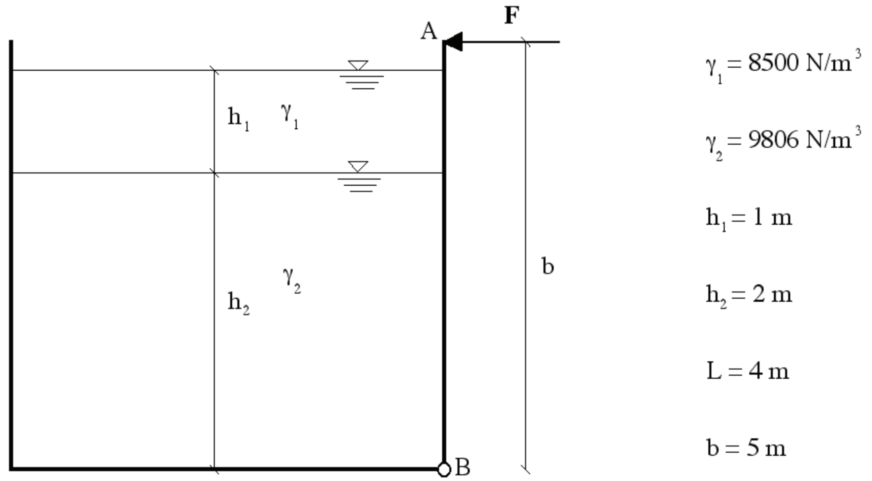


Figura 1.3

Soluzione

1. La distanza del piano dei carichi idrostatici del liquido γ_2 dall'interfaccia è

$$h = \frac{\gamma_1 h_1}{\gamma_2} = 0{,}867 \text{ m.}$$

Per calcolare la spinta complessiva sulla superficie rettangolare di traccia A-B, bisogna considerare separatamente l'azione dei due fluidi:

$$S = S_1 + S_2 = \gamma_1 h_{G_1} A_1 + \gamma_2 h_{G_2} A_2 = \frac{\gamma_1 h_1^2 L}{2} + \gamma_2\left(h + \frac{h_2}{2}\right)h_2 L = 163 \text{ kN.}$$

È da mettere in evidenza che è sbagliato calcolare la spinta considerando la pressione nel baricentro geometrico dell'intera superficie, in quanto in questo caso la pressione nel baricentro differisce dalla pressione media sulla superficie.

2. Le distanze dei centri di spinta dai rispettivi baricentri si possono esprimere come

$$\xi_{0_1} = \frac{I_{0_1}}{M_1}, \qquad \xi_{0_2} = \frac{I_{0_2}}{M_2}.$$

Nel caso in esame si ha:

$$I_{0_1} = \frac{Lh_1^3}{12}, \qquad M_1 = \frac{Lh_1^2}{2}, \qquad I_{0_2} = \frac{Lh_2^3}{12}, \qquad M_2 = Lh_2\left(h + \frac{h_2}{2}\right).$$

Il modulo della forza **F** si ricava dall'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera B:

$$F = \frac{1}{b}\left[S_1\left(h_2 + \frac{h_1}{2} - \xi_{0_1}\right) + S_2\left(\frac{h_2}{2} - \xi_{0_2}\right)\right] = 33{,}1 \text{ kN}.$$

Esercizio 1.4

1. Con riferimento alla Figura 1.4, valutare il dislivello δ tra il livello del liquido nel manometro e la superficie libera del liquido nel serbatoio.
2. Calcolare la spinta sulla superficie piana quadrata di lato L.
3. Ricavare la reazione dell'appoggio B.

Soluzione

1. Dall'uguaglianza delle pressioni sul piano passante per l'interfaccia tra i due liquidi si ricava il dislivello δ:

$$\delta = \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma}\Delta = 1{,}00 \text{ m}.$$

2. La spinta sulla superficie piana quadrata di lato L è pari a

$$S = \gamma\left(h + \frac{L}{2}\sin\alpha\right)L^2 = 152 \text{ kN}.$$

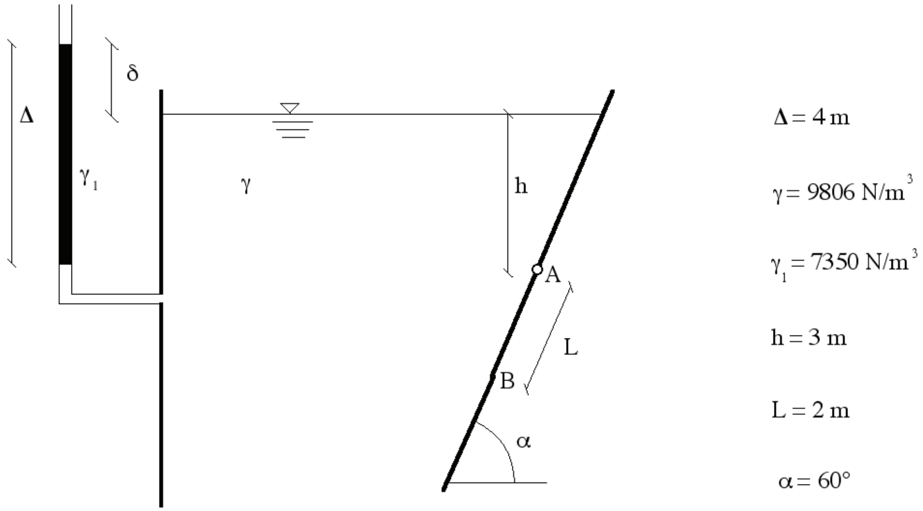


Figura 1.4

3. La distanza del centro di spinta dal baricentro si può esprimere come

$$\xi_0 = \frac{I_0}{M} = \frac{L^2}{12\left(\frac{L}{2} + \frac{h}{\sin\alpha}\right)} = 0{,}0747 \text{ m.}$$

La reazione dell'appoggio B si ricava dall'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera A:

$$R_B = \frac{S\left(\frac{L}{2} - \xi_0\right)}{L} = 70{,}3 \text{ kN.}$$

Esercizio 1.5

1. Con riferimento alla Figura 1.5, noti i pesi specifici dei liquidi γ_1 e γ_2, ricavare l'indicazione h del piezometro.
2. Calcolare la spinta esercitata dai due liquidi sulla parete BC di larghezza b.
3. Determinare la minima lunghezza L necessaria per l'equilibrio dello sbarramento ABC.

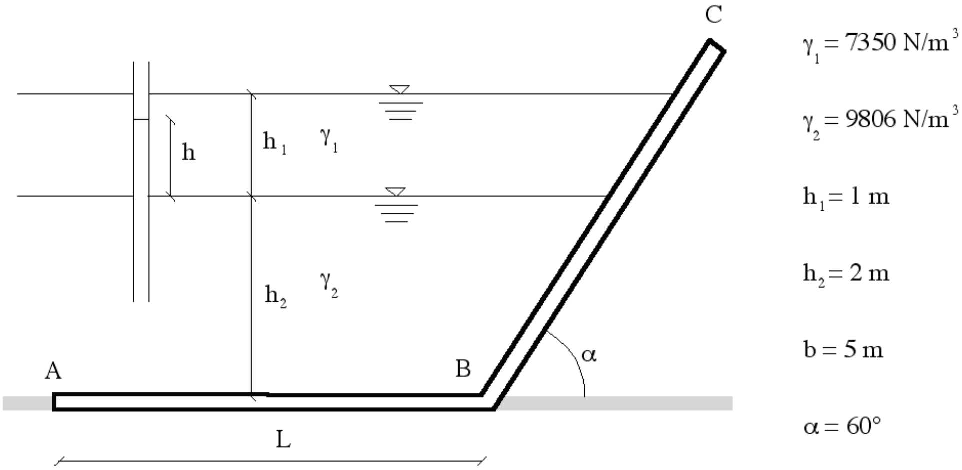


Figura 1.5

Soluzione

1. Dall'uguaglianza delle pressioni sul piano passante per l'interfaccia tra i due liquidi si ricava l'indicazione h del piezometro:

$$h = \frac{h_1\gamma_1}{\gamma_2} = 0{,}750 \text{ m.}$$

2. La spinta sulla parete BC di larghezza b è pari alla somma delle spinte S_1 e S_2:

$$S_1 = \frac{\gamma_1 h_1}{2}\frac{h_1 b}{\sin\alpha} = 21{,}2 \text{ kN,} \qquad S_2 = \gamma_2\left(h + \frac{h_2}{2}\right)\frac{h_2 b}{\sin\alpha} = 198 \text{ kN.}$$

3. La minima lunghezza L della base si determina dall'equilibrio dei momenti intorno a B. Il momento instabilizzante è pari a

$$C_i = S_1\left(\frac{h_2 + \frac{h_1}{2}}{\sin\alpha} - \xi_{0_1}\right) + S_2\left(\frac{h_2}{2\sin\alpha} - \xi_{0_2}\right),$$

dove le distanze dei centri di spinta dai rispettivi baricentri si calcolano come:

$$\xi_{0_1} = \frac{h_1}{6\sin\alpha} = 0{,}167 \text{ m}, \qquad \xi_{0_2} = \frac{h_2^2}{12\sin\alpha\left(\frac{h_2}{2}+h\right)} = 0{,}220 \text{ m}.$$

Il momento stabilizzante è pari a

$$C_i = S\frac{L}{2} = \frac{\gamma_2\left(h+h_2\right)bL^2}{2}.$$

Dall'uguaglianza dei momenti si ottiene $L = 1{,}90$ m.

Esercizio 1.6

1. Calcolare il dislivello tra le superfici libere nelle due parti del recipiente della Figura 1.6.
2. Valutare il modulo della spinta sulla paratoia quadrata A-A.
3. Determinare il momento necessario per tenere in equilibrio la paratoia A-A, incernierata attorno a un asse orizzontale baricentrico.

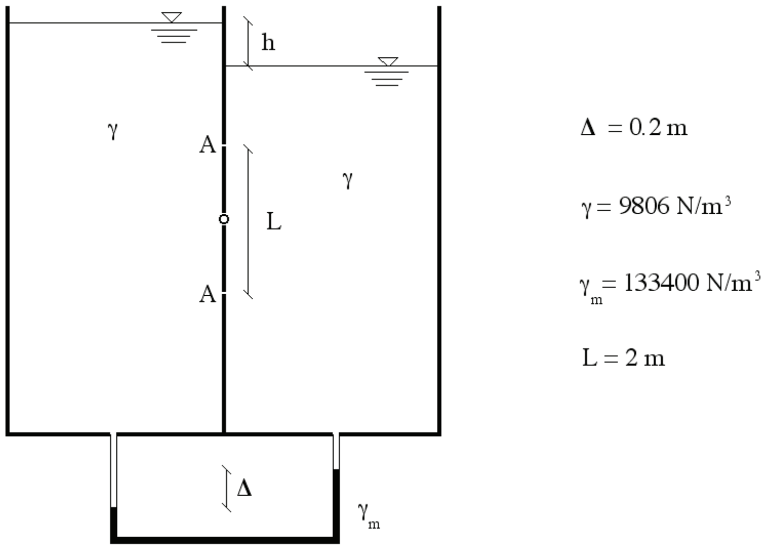


Figura 1.6

Soluzione

1. Il dislivello h tra le superfici libere nelle due parti del recipiente è pari al dislivello tra i piani dei carichi idrostatici, che si può ricavare dall'indicazione del manometro differenziale per mezzo della relazione:

$$h = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = 2{,}52 \text{ m.}$$

2. Il modulo della spinta **S** sulla superficie A-A è pari alla differenza dei moduli della spinta di sinistra S_S e della spinta di destra S_D, essendo le due spinte di verso opposto:

$$S = S_S - S_D = \gamma\left(h_{G_S} - h_{G_D}\right)A = \gamma h L^2 = 98{,}9 \text{ kN.}$$

3. Il momento esercitato dal liquido di sinistra rispetto alla cerniera è $C_S = S_S\xi_{0S} = \gamma I_0$ ed è antiorario. Il momento esercitato dal liquido di destra rispetto alla cerniera è $C_D = S_D\xi_{0D} = \gamma I_0$ ed è orario. Essendo i momenti uguali e di verso opposto la paratoia è in equilibrio e non serve nessun momento esterno applicato.

Esercizio 1.7

1. Con riferimento alla Figura 1.7, noti i pesi specifici γ e γ_m e l'indicazione del manometro rovescio Δ, valutare la differenza di quota h tra le due parti del recipiente contenente liquido γ.
2. Calcolare la spinta complessivamente esercitata sulla paratoia quadrata AB di lato L.
3. Determinare la reazione dell'appoggio B.

Soluzione

1. Il dislivello h tra le superfici libere si può ricavare dall'indicazione del manometro differenziale rovescio per mezzo della relazione:

$$h = \Delta \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma} = 0{,}250 \text{ m.}$$

2. La spinta complessivamente esercitata sulla paratoia A-B è pari alla differenza dei moduli della spinta di sinistra e della spinta di destra:

$$S = S_S - S_D = \gamma\left(h_{G_S} - h_{G_D}\right)A = \gamma h L^2 = 9{,}82 \text{ kN.}$$

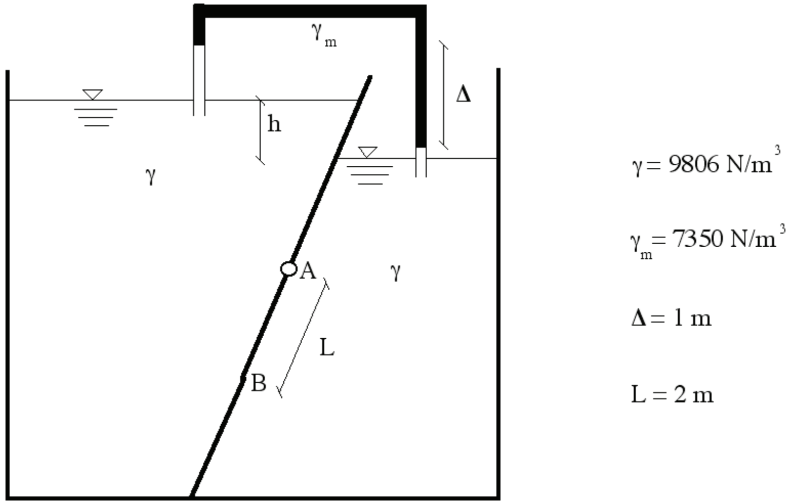


Figura 1.7

3. Il momento esercitato dal liquido di sinistra rispetto alla cerniera, antiorario, è

$$C_S = S_S\left(\frac{L}{2} + \xi_{0S}\right) = S_S\,\frac{L}{2} + \gamma I_0 \sin\alpha,$$

dove α è l'angolo formato dalla paratoia con l'orizzontale. Il momento esercitato dal liquido di destra rispetto alla cerniera è analogamente

$$C_D = S_D\left(\frac{L}{2} + \xi_{0D}\right) = S_D\,\frac{L}{2} + \gamma I_0 \sin\alpha$$

ed è orario. La reazione dell'appoggio B si determina quindi dall'equilibrio dei momenti rispetto alla cerniera A e risulta

$$R_B = \frac{S}{2} = 4{,}91 \text{ kN}.$$

Esercizio 1.8

1. Con riferimento alla Figura 1.8, noti i pesi specifici γ e γ_m e i dislivelli h e Δ, valutare il sovralzo x del liquido γ.
2. Calcolare la spinta esercitata sulla paratoia AB di larghezza L.
3. Determinare la coppia esterna **C** necessaria per l'equilibrio della paratoia AB.

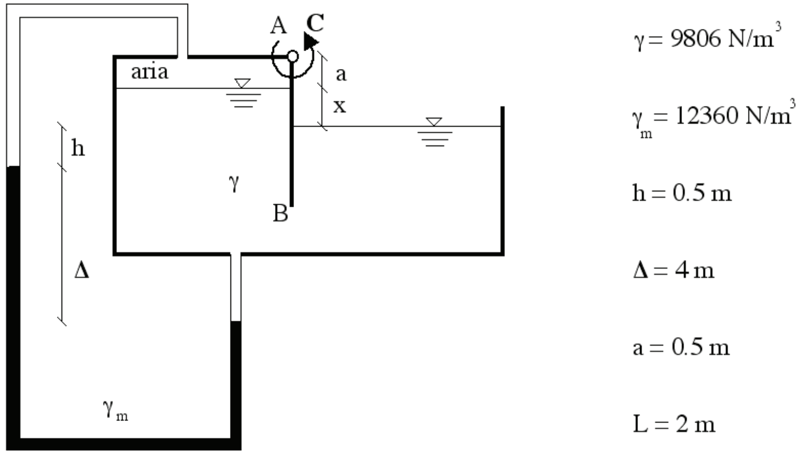


Figura 1.8

Soluzione

1. L'espressione della pressione sulla superficie orizzontale isobarica passante per l'interfaccia tra il liquido γ e il liquido manometrico γ_m consente di scrivere la relazione

$$-\gamma x + \gamma_m \Delta = \gamma(h + \Delta),$$

da cui si ricava il sovralzo x, pari a 0,542 m.

2. La spinta al di sotto della superficie libera è equilibrata. La spinta esercitata dall'esterno è nulla, essendo dovuta alla pressione atmosferica. Il modulo della spinta interna si può calcolare come somma di due contributi: quello del liquido, in cui la pressione varia idrostaticamente, e quello dell'aria, in cui la pressione è costante

$$S = \gamma \frac{x^2}{2} L + \gamma x a L = 8{,}19 \text{ kN}.$$

La spinta va da destra verso sinistra.

3. La coppia esterna, antioraria, deve equilibrare il momento rispetto alla cerniera, orario, dovuto anch'esso alla somma del contributo dovuto al liquido e di quello dovuto all'aria. Il modulo della coppia esterna vale quindi:

$$C = \gamma \frac{x^2}{2} L\left(\frac{x}{3} + a\right) + \gamma x \frac{a^2}{2} L = 3{,}29 \text{ kNm}.$$