

$\frac{A_{01}}{103}$

Renato De Leone / Cinzia Lazzari

**Esercizi di
programmazione lineare
e programmazione lineare intera**



Copyright © MMVII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-1457-8

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: novembre 2007

ad Adriana e a Chiara Maria
a Massimo, a Michela e a nonna Pina

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Le origini della Ricerca Operativa	3
1.2	La Programmazione Lineare	5
1.2.1	La Programmazione Lineare Intera	8
1.3	Notazioni	8
2	Risoluzione Grafica di problemi di PL	11
2.1	Esercizi Proposti	11
2.2	Soluzione degli Esercizi	15
2.3	Ulteriori Esercizi	26
3	Vertici, Basi, BFS ed ottimalità di una base	29
3.1	Esercizi Proposti	31
3.2	Soluzione degli Esercizi	37
4	Forma standard e Metodo del Simplex	53
4.1	Esercizi Proposti	57
4.2	Soluzione degli Esercizi	63
5	Dualità e Condizioni di Complementarità	89
5.1	Esercizi Proposti	91
5.2	Soluzione degli Esercizi	97
6	Il Metodo di Branch-and-Bound	107
6.1	Descrizione dell'algoritmo di Branch-and-Bound . .	107
6.1.1	Problemi di Knapsack binario	112

6.2	Esercizi Proposti	114
6.3	Soluzione degli Esercizi	122
7	Domande	143
8	Le curiosità della Ricerca Operativa	149
8.1	Nulla sfugge alla Ricerca Operativa: neanche i paradossi della spesa!	149
8.2	In viaggio con la Ricerca Operativa	151
8.3	Blog, Web e dintorni	154
8.4	Sudoku e Kakuro	156

Capitolo 1

Introduzione

La *Ricerca Operativa* è una disciplina relativamente recente la cui nascita può collocarsi nella seconda metà del XX secolo. Il termine Ricerca Operativa è la traduzione letterale del termine inglese “*Operational Research*”¹ che sfortunatamente non chiarisce ed esplicita le finalità di questa disciplina; quindi, prima di trattare brevemente le origini della Ricerca Operativa (di seguito indicata con l’acronimo RO), occorre chiarire gli ambiti ed i confini di questa materia.

La Ricerca Operativa è la disciplina che studia l’utilizzo del metodo scientifico e quantitativo nella soluzione dei problemi decisionali che si presentano in molti e diversi settori della vita reale. Essa tende a determinare il migliore utilizzo di risorse scarse con l’obiettivo di minimizzare i costi e/o massimizzare i profitti. Piace qui citare una suggestiva definizione riportata in un classico libro di testo scritto da De Julio e La Bella [7] che sintetizza lo spirito della RO:

La Ricerca Operativa è una disciplina che aiuta a fare male ciò che altrimenti sarebbe stato fatto peggio.

Scopo della RO è fornire una base scientifica nell’analisi e comprensione di situazioni anche molto complesse e utilizzare le infor-

¹negli Stati Uniti viene più usualmente utilizzato il termine *Operations Research*

mazioni raccolte per predire il comportamento futuro del sistema in esame e migliorarne le prestazioni.

La necessità di un approccio quantitativo ai problemi di decisione è oggi largamente riconosciuta in particolare nella gestione dei sistemi di produzione e nella gestione d'impresa. Negli ultimi anni i sistemi di produzione e servizi hanno subito un notevole aumento della loro complessità organizzativa e quindi decisionale; inoltre la crescente globalizzazione ed integrazione internazionale ha portato a profonde trasformazioni anche in termini dimensionali (alto numero di impianti produttivi, di beni strumentali, ampia gamma di prodotti finiti ecc...). Il semplice utilizzo del "buon senso" di una persona competente del settore che, sulla base dell'esperienza acquisita nel corso degli anni, gestisca autonomamente e completamente il sistema non è più sufficiente a far fronte alla sempre più crescente complessità del sistema.

La Ricerca Operativa nasce come disciplina autonoma proprio al fine di creare una figura professionale di *esperto di RO* che sia in grado di progettare e gestire sistemi complessi, facendo uso di strumenti matematici ed informatici anche avanzati che gli permettano di determinare soluzioni efficienti nelle diverse realtà applicative.

La Ricerca Operativa è la scienza che si occupa di fornire un contesto unitario a nozioni matematiche, statistiche e informatiche e, partendo da basi teoriche, giunge alla costruzione di modelli concreti proponendo anche soluzioni implementabili. In questo senso, un altro termine inglese che solitamente è collegato al termine Operations Research è *Management Science* che ben evidenzia gli aspetti più caratteristici della disciplina: *Management* cioè gestione e *Science* che mette in evidenza il suo carattere di rigosità.

La Ricerca Operativa abbraccia tutti questi aspetti di management e scienza delle decisioni ma non si limita a questi, includendo, ad esempio, anche aspetti importanti di Programmazione Matematica. Pertanto, anche per ragioni storiche, il termine Ricerca Operativa prevale e continua ad essere ampiamente utilizzato.

1.1 Le origini della Ricerca Operativa

Il termine Ricerca Operativa compare intorno al 1939, ma le sue origini, per la peculiarità di questa disciplina, possono essere individuate anche più lontano nel tempo. Qualche studioso della storia della matematica intravede, per esempio, l'applicazione di tecniche di RO nell'operazione svolta da Archimede, su richiesta del re Gerone di Siracusa, per rompere l'assedio delle navi romane.

Un problema di RO è riportato da Virgilio nell'Eneide:

Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis
Moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
Mercatique solum, facti de nomine Byrsam,
Taurino quantum possent circumdare tergo.²

Qui Virgilio allude alla leggenda secondo cui la regina Didone, fuggita da Tiro, giunge sulle coste dell'Africa e chiese a Iarba, re dei Gentili, un tratto di terra per potervi costruire una città. Il re, non volendole concedere la terra ma non volendo neppure opporre un deciso rifiuto, le regala quell'area che era possibile coprire con una pelle di bue. La futura regina di Cartagine sfrutta abilmente a suo vantaggio questa offerta e taglia la pelle in strisce sottilissime che lega fra loro riuscendo a circondare una vasta area.

Tra i precursori della Ricerca Operativa vanno sicuramente annoverati matematici di grande rilievo quali Girolamo Cardano (1501–1576), Blaise Pascal (1623–1662), Isaac Newton (1642–1727) e Leonhard Euler (1707–1783) che per primo studiò la teoria dei grafi per dare risposta ad un problema di attraversamento dei ponti della città di Königsberg (1936).

Un altro esempio importante di utilizzo *ante-litteram* dei metodi della RO risale al 1885 con gli studi di F. Taylor sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776 G. Monge aveva studiato un problema di trasporti.

²Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai sorgere la gran cittade e l'alta ròcca de la nuova Cartago, che dal fatto Birsa nomossi, per l'astuta merce che, per fondarla, fêr di tanto sito quanto cerchiar di bue potesse un tergo. Virgilio, Eneide I, 365-368, Traduzione di Annibal Caro.

Nonostante questi esempi, soltanto poco prima che scoppiasse il secondo conflitto mondiale la RO assume una propria precisa fisionomia. Essa subisce particolare impulso, specialmente in Inghilterra e negli Stati Uniti tra il 1936 e 1940. Infatti, è proprio nel 1939 che alcuni militari del RAF (Royal Air Force), l'aeronautica militare inglese, costituiscono un gruppo di ricerca per studiare nuovi sistemi ottimali di offesa e di difesa. Già nel 1936, il Primo Ministro britannico aveva stabilito la Bawdsey Research Station, sulla costa est della Gran Bretagna vicino Felixstowe, Suffolk per sperimentare e studiare l'uso di nuove tecnologie per l'intercettazione di aerei nemici. Nell'estate del 1937 furono portati avanti una serie di esperimenti su un sistema di controllo della difesa aerea basato sull'uso di radar. I primi risultati furono soddisfacenti relativamente alla capacità di individuazione di aerei nemici, ma ci si rese anche conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono aggiunte 4 nuove stazioni radar e furono condotti nuovi esperimenti nella speranza che il nuovo sistema di controllo fosse più efficiente e preciso; dai nuovi esperimenti emersero, invece, serie difficoltà legate alla necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra loro, che venivano ricevute dalle differenti stazioni radar. Albert P. Rowe, soprintendente della Bawdsey Research Station, propose quindi di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti più *operativi* del sistema e non più solamente quelli prettamente tecnici. Nacque così il termine "*Operational Research*" come ricerca nelle operazioni (militari).

Un'altra pietra miliare nella storia dei primi anni della Ricerca Operativa è la costituzione nel 1940 di un gruppo multidisciplinare composto da chimici, fisici, matematici e, naturalmente, strateghi della RAF che, sotto la supervisione di Patrick M.S. Blackett, studiò l'uso di radar nella difesa aerea. Al di là dell'importanza dei risultati ottenuti, va notata la composizione eterogenea (il gruppo fu appunto denominato *Blackett's Circus*) del gruppo di ricerca. Per la prima volta si ebbe una convergenza di scienziati di diverse discipline con l'obiettivo di determinare la più efficiente utilizzazione di

risorse limitate usando tecniche quantitative. L'interdisciplinarietà è ancora oggi una delle caratteristiche più importanti della Ricerca Operativa.

Nel 1942 Blackett sempre in Gran Bretagna istituì un gruppo di RO che sviluppò tra l'altro importanti modelli per la determinazione della dimensione ottima dei convogli di navi così da minimizzare le perdite dovute ad attacchi di sottomarini nemici. Quasi contemporaneamente negli Stati Uniti, U.S. Navy fondò l'Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG), sotto la guida di Philip M. Morse.

Finita la seconda guerra mondiale, gli studi di RO, pur continuando in campo militare, si rivolgono a problemi economici e sociali ed oggi gli interessi non militari della RO sono certamente quelli prevalenti.

Per una storia ragionata della Ricerca Operativa dai suoi inizi fino ai giorni odierni si rimanda al bellissimo e completo libro di Saul J. Gass e Arjang A. Assad [9] che è corredato anche delle foto e ritratti dei protagonisti della Ricerca Operativa.

Per servire i bisogni professionali dei numerosi scienziati impiegati nell'area della RO, viene fondata nel 1952, negli Stati Uniti la prima associazione di ricerca operativa, la Operations Research Society of America (ORSA). Nel 1995 ORSA e TIMS, The Institute for Management Sciences confluiscono in INFORMS, Institute for Operations Research and the Management Sciences. Associazioni analoghe nascono in quasi tutte le nazioni; in Italia, nel 1961 viene fondato l'AIRO, Associazione Italiana di Ricerca Operativa alla quale afferiscono i più qualificati specialisti del settore. Una storia di questa associazione è disponibile sul sito Web <http://www.airo.org>

1.2 La Programmazione Lineare

Un ruolo principe nella Ricerca Operativa è giocato dalla Programmazione Lineare (PL) [15, 5, 6] (minimizzazione o massimizzazione di una funzione lineare, soggetto a vincoli espressi come uguaglianze

o disuguaglianze lineari). Problemi di trasporto, di pianificazione e gestione della produzione, di pianificazione economica e finanziaria, di utilizzo ottimo di risorse possono essere formulati come problemi di PL e risolti mediante efficienti algoritmi.

L'importanza dei problemi affrontati e la disponibilità di algoritmi efficienti per la soluzione di modelli anche di dimensioni elevate sono alla base della grande attenzione che la Programmazione Lineare ha sempre ricevuto, a dispetto delle necessarie semplificazioni nella formulazione del problema stesso. Come ha detto George B. Dantzing, considerato il padre della Programmazione Lineare e scopritore del più famoso algoritmo per la soluzione di questa classe di problemi, il metodo del simplesso,

The final test of any theory is its capacity to solve the problems which originated it.

In questo senso è anche emblematica la frase di L. Lovasz (1980)

If one would take statistics about which mathematical problem is using up most of the computer time in the world, then (not including database handling problems like sorting and searching) the answer would probably be linear programming;

Anche il termine Programmazione Lineare deriva dal lessico utilizzato in ambito militare; in questo contesto si utilizza il termine *program* per indicare le attività di pianificazione e schedulazione, di rifornimento e di schieramento delle unità di combattimento. In un articolo dal titolo *Programming in a Linear Structure*, Dantzig formulò un problema di pianificazione in ambito militare come un sistema di disequazioni lineari. L'anno successivo, Koopmans propose di abbreviare *Programming in a Linear Structure* con il più conciso *Linear Programming*.

Il termine *Mathematical Programming* fu invece proposto da R. Dofman il quale riteneva troppo restrittivo il termine *Linear Programming*.