Aoi

102

Ferruccio Orecchia

esercizi di
GEOMETRIA 1

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–1454–7

I edizione: aprile 1994
II edizione: aprile 1996
III edizione: novembre 2007

INDICE

I riferimenti nel testo sono relativi al volume:
F. Orecchia, *Lezioni di Geometria 1*, Aracne editrice, Roma 1993
isbn 978–88–548–1345–8

Capitolo 1

LO SPAZIO CARTESIANO

Riferimenti su una retta

▶**ESERCIZIO** 1.1. *Sia r una retta su cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano. Siano A e B due punti di r di ascisse rispettive a e b. Dimostrare che l'ascissa x del punto P che divide il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ in un rapporto $k \in \mathbb{R}$ è $\frac{a+kb}{1+k}$. In particolare l'ascissa del punto medio M di $\overrightarrow{AB}$ è $\frac{a+b}{2}$ [Figura 1].*

Soluzione. Si ha

$$\frac{m(\overrightarrow{AP})}{m(\overrightarrow{PB})} = k$$

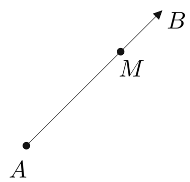

Figura 1.

Inoltre $m(\overrightarrow{AP}) = x - a$ e $m(\overrightarrow{PB}) = b - x$ [Prop. 1.1.3], onde

$$\frac{x-a}{b-x} = k \qquad \text{cioè} \qquad x = \frac{a+kb}{1+k}$$

Se $P = M$ è il punto medio di $\overrightarrow{AB}$, si ha $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Allora

$$k = \frac{m(\overrightarrow{AP})}{m(\overrightarrow{PB})} = 1 \qquad \text{e} \qquad x = \frac{a+b}{2}$$

Il piano cartesiano reale

▶**ESERCIZIO** 1.2. *Sia Oxy un sistema di riferimento cartesiano monometrico nel piano tale che l'angolo formato dall'asse x e y sia $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Calcolare la distanza $d(P_1, P_2)$ di due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.*

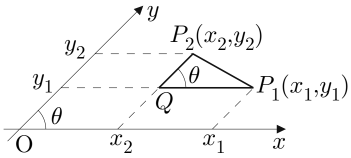

Figura 2.

Soluzione. Si consideri il triangolo P_1P_2Q [Figura 2] che ha lati di lunghezza $d(P_1, P_2), |x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|$. Applicando il teorema di Carnot, si ottiene facilmente che:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\theta}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ cioè le coordinate sono ortogonali, si ha:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

▶**ESERCIZIO** 1.3. *Nel piano cartesiano reale scrivere le equazioni di:*

(a) *dell'asse x;*
(b) *dell'asse y;*
(c) *di una retta parallela all'asse x e passante per il punto $P(x_0, y_0)$;*
(d) *di una retta parallela all'asse y e passante per il punto $P(x_0, y_0)$;*

Soluzione. (a) $y = 0$.
(b) $x = 0$.
(c) $y = y_0$.
(d) $x = x_0$.

▶**ESERCIZIO** 1.4. *Sia dato un riferimento cartesiano nello spazio. Siano $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ due punti. Determinare le coordinate del punto P che divide il segmento AB in un dato rapporto $k \in \mathbb{R}$.*

Soluzione. Dalla formula dell'esercizio 1.1 si trae facilmente che

$$P\left(\frac{x_1+kx_2}{1+k}, \frac{y_1+ky_2}{1+k}, \frac{z_1+kz_2}{1+k}\right)$$

▶**ESERCIZIO** 1.5. *Nello spazio cartesiano determinare le equazioni:*

(i) *dei piani e degli assi coordinati;*
(ii) *dei piani paralleli e ai piani coordinati e delle rette parallele agli assi passanti per $P(a, b, c)$.*

Soluzione.

(i) Piano xy: $z = 0$; piano xz: $y = 0$; piano yz: $x = 0$.
$$\text{Asse } x\text{: } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ asse } y\text{: } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ asse } z\text{: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$
(ii) $x = a$ piano parallelo a yz;
$y = b$ piano parallelo a xz;
$z = c$ piano parallelo a xy;
$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \text{retta per } P \text{ parallela all'asse } z.$$
$$\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases} \text{retta per } P \text{ parallela all'asse } y.$$
$$\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases} \text{retta per } P \text{ parallela all'asse } x.$$

Lo spazio cartesiano a n-dimensioni

▶**ESERCIZIO** 1.6. *Dimostrare che una retta r di K^n può essere scritta nella forma parametrica*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 t \\ x_2 = a_2 + b_2 t \\ \vdots \\ x_n = a_n + b_n t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

dove $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ e viceversa l'insieme dei punti di K^n che verificano le equazioni (1.1) è una retta.

Soluzione. Una retta r può essere definita come l'insieme delle soluzioni di un sistema di $n-1$ equazioni lineari linearmente indipendenti:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{n-11}x_1 + \cdots + a_{n-1n}x_n = c_{n-1} \end{array}\right. \tag{1.2}$$

cioè tale che il rango della matrice $A = (a_{ij})$ dei coefficienti di (1.2) è massimo $\rho(A) = n-1$. Ora è noto dalla teoria dei sistemi lineari che una soluzione di (1.2) è somma di una fissata soluzione di (1.2) con una soluzione del sistema omogeneo associato a (1.2) [Prop. 7.3.2]

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n-11}x_1 + \cdots + a_{n-1n}x_n = 0 \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Inoltre dalla regola di Cramer si ricava facilmente che le soluzioni di (1.3) sono del tipo $(b_1t, \ldots, b_nt)$, dove $b_i = (-1)^{i+1}d_i$ e d_i è il minore di ordine $n-1$ ottenuto da A cancellando la colonna i-esima (si osservi che, se $\rho(A) = p$, almeno un d_i e quindi un b_i è non nullo). Ne segue

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = a_1 + b_1t \\ x_2 = a_2 + b_2t \\ \quad\vdots \\ x_n = a_n + b_nt \end{array}\right.$$

Come si voleva.

Viceversa, ricavando t da una delle equazioni di (1.1) e sostituendo nelle altre, si ottengono $n-1$ equazioni che, come si verifica facilmente, sono linearmente indipendenti.