

AoI

102

Ferruccio Orecchia

esercizi di
GEOMETRIA 1



Copyright © MCMXCIV
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-1454-7

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: aprile 1994
II edizione: aprile 1996
III edizione: novembre 2007

INDICE

Capitolo 1. LO SPAZIO CARTESIANO	9
Riferimenti su una retta	9
Il piano cartesiano reale	10
Lo spazio cartesiano a n -dimensioni	11
Capitolo 2. VETTORI	13
Proprietà algebriche dei vettori	13
Dipendenza lineare. Basi. Componenti	14
Vettori nel piano e nello spazio cartesiano	17
Capitolo 3. EQUAZIONI DI RETTE E PIANI	19
Rappresentazione di una retta nel piano cartesiano	19
Rappresentazione di un piano nello spazio cartesiano	24
Rappresentazione di una retta nello spazio	27
Fasci di piani e di rette. Stelle di piani	34
Altri esercizi su rette e piani	38
Capitolo 4. ORTOGONALITÀ	45
Prodotto scalare di vettori. Proiezioni	45
Prodotto vettoriale	51
Problemi di ortogonalità, distanza, simmetria, angoli	55
Capitolo 5. MATRICI	69
Operazioni sulle matrici	69
Inversa e trasposta di una matrice	71
Matrici a scalini e calcolo dell'inversa	72
Capitolo 6. DETERMINANTI	75
Calcolo dei determinanti	75
Rango di una matrice	81
Capitolo 7. SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI	83
Risoluzione di un sistema lineare con il metodo di Gauss	83
Teorema di Rouché-Capelli e regola di Cramer	85
Sistemi equivalenti	89
Sistemi lineari omogenei	91
Sistemi lineari con parametro	93

Capitolo 8. SPAZI VETTORIALI	99
Definizione e prime proprietà	99
Sottospazi. Combinazioni lineari.	102
Dipendenza lineare e insiemi liberi	109
Spazi vettoriali di dimensione finita. Basi. Componenti.	111
Operazioni sui sottospazi e formula di Grassmann.	116
I sottospazi di K^n	119
Cambiamento di base	128
Trasformazioni di coordinate	131
Capitolo 9. SPAZI EUCLIDEI REALI	135
Definizioni e generalità	135
Modulo e angolo negli spazi euclidei	137
Basi ortonormali. Procedimento di Gram-Schmidt	138
Sottospazi ortogonali	141
Matrici ortogonali	144
Capitolo 10. OMOMORFISMI DI SPAZI VETTORIALI	147
Definizione di omomorfismo	147
Proprietà degli omomorfismi e isomorfismi	152
Nucleo e immagine di un omomorfismo	156
Applicazioni lineari da K^n in K^m	159
Omomorfismi e matrici	166
Ulteriori esercizi sugli omomorfismi	174
Cambiamento di base	184
Capitolo 11. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI	189
Autovalori di una matrice quadrata	189
Diagonalizzazione	195
Diagonalizzazione ortogonale. Matrici simmetriche	196
Autovalori ed autovettori di un omomorfismo	199
Capitolo 12. CONICHE E QUADRICHE	203
Classificazione e disegno di una conica	203
Classificazione e forma canonica di una quadrica	211

Capitolo 13. CURVE E SUPERFICI	217
Curve del piano cartesiano	217
Superfici dello spazio cartesiano	220
Curve dello spazio cartesiano. Curve piane.	221
Tangente a una curva e piano tangente a una superficie	223
Coni. Cilindri. Superfici rigate	227
Superfici di rotazione	232
Capitolo 14. ESEMPI DI PROVE DI ESAME	235
Esempio 1 - Tempo 2h 30m	235
Esempio 2 - Tempo 3h	241
Esempio 3 - Tempo 3h	251
Esempio 4 - Tempo 3h	259
Esempio 5 - Tempo 3h 15m	267
Esempio 6 - Tempo 3h	279
Esempio 7 - Tempo 3h	291
Esempio 8 - Tempo 3h 15m	299

I riferimenti nel testo sono relativi al volume:
F. Orecchia, *Lezioni di Geometria 1*, Aracne editrice, Roma 1993
isbn 978-88-548-1345-8

Capitolo 1

LO SPAZIO CARTESIANO

Riferimenti su una retta

►**ESERCIZIO 1.1.** Sia r una retta su cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano. Siano A e B due punti di r di ascisse rispettive a e b . Dimostrare che l'ascissa x del punto P che divide il segmento orientato \overrightarrow{AB} in un rapporto $k \in \mathbb{R}$ è $\frac{a+kb}{1+k}$. In particolare l'ascissa del punto medio M di \overrightarrow{AB} è $\frac{a+b}{2}$ [Figura 1].

Soluzione. Si ha

$$\frac{m(\overrightarrow{AP})}{m(\overrightarrow{PB})} = k$$

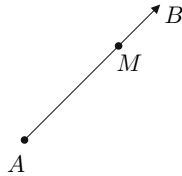


Figura 1.

Inoltre $m(\overrightarrow{AP}) = x - a$ e $m(\overrightarrow{PB}) = b - x$ [Prop. 1.1.3], onde

$$\frac{x - a}{b - x} = k \quad \text{cioè} \quad x = \frac{a + kb}{1 + k}$$

Se $P = M$ è il punto medio di \overrightarrow{AB} , si ha $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. Allora

$$k = \frac{m(\overrightarrow{AP})}{m(\overrightarrow{PB})} = 1 \quad \text{e} \quad x = \frac{a + b}{2}$$

Il piano cartesiano reale

►**ESERCIZIO 1.2.** Sia Oxy un sistema di riferimento cartesiano monometrico nel piano tale che l'angolo formato dall'asse x e y sia $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Calcolare la distanza $d(P_1, P_2)$ di due punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$.

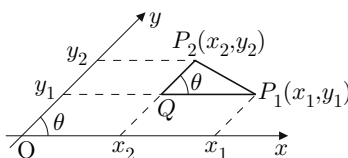


Figura 2.

Soluzione. Si consideri il triangolo P_1P_2Q [Figura 2] che ha lati di lunghezza $d(P_1, P_2)$, $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$. Applicando il teorema di Carnot, si ottiene facilmente che:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \cos \theta}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$ cioè le coordinate sono ortogonali, si ha:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

►**ESERCIZIO 1.3.** Nel piano cartesiano reale scrivere le equazioni di:

- dell'asse x ;
- dell'asse y ;
- di una retta parallela all'asse x e passante per il punto $P(x_0, y_0)$;
- di una retta parallela all'asse y e passante per il punto $P(x_0, y_0)$;

Soluzione. (a) $y = 0$.

(b) $x = 0$.

(c) $y = y_0$.

(d) $x = x_0$.

►**ESERCIZIO 1.4.** Sia dato un riferimento cartesiano nello spazio. Siano $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ due punti. Determinare le coordinate del punto P che divide il segmento AB in un dato rapporto $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Dalla formula dell'esercizio 1.1 si trae facilmente che

$$P \left(\frac{x_1 + kx_2}{1+k}, \frac{y_1 + ky_2}{1+k}, \frac{z_1 + kz_2}{1+k} \right)$$

► **ESERCIZIO 1.5.** *Nello spazio cartesiano determinare le equazioni:*

- (i) dei piani e degli assi coordinati;
- (ii) dei piani paralleli e ai piani coordinati e delle rette parallele agli assi passanti per $P(a, b, c)$.

Soluzione.

- (i) Piano xy : $z = 0$; piano xz : $y = 0$; piano yz : $x = 0$.
 Asse x : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; asse y : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; asse z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.
- (ii) $x = a$ piano parallelo a yz ;
 $y = b$ piano parallelo a xz ;
 $z = c$ piano parallelo a xy ;
 $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ retta per P parallela all'asse z .
 $\begin{cases} x = a \\ z = c \end{cases}$ retta per P parallela all'asse y .
 $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ retta per P parallela all'asse x .

Lo spazio cartesiano a n -dimensioni

► **ESERCIZIO 1.6.** *Dimostrare che una retta r di K^n può essere scritta nella forma parametrica*

$$(1.1) \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 t \\ x_2 = a_2 + b_2 t \\ \vdots \\ x_n = a_n + b_n t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

dove $(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq (b_1, b_2, \dots, b_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ e viceversa l'insieme dei punti di K^n che verificano le equazioni (1.1) è una retta.

Soluzione. Una retta r può essere definita come l'insieme delle soluzioni di un sistema di $n - 1$ equazioni lineari linearmente indipendenti:

$$(1.2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \\ a_{n-11}x_1 + \cdots + a_{n-1n}x_n = c_{n-1} \end{cases}$$

cioè tale che il rango della matrice $A = (a_{ij})$ dei coefficienti di (1.2) è massimo $\rho(A) = n - 1$. Ora è noto dalla teoria dei sistemi lineari che una soluzione di (1.2) è somma di una fissata soluzione di (1.2) con una soluzione del sistema omogeneo associato a (1.2) [Prop. 7.3.2]

$$(1.3) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n-11}x_1 + \cdots + a_{n-1n}x_n = 0 \end{cases}$$

Inoltre dalla regola di Cramer si ricava facilmente che le soluzioni di (1.3) sono del tipo (b_1t, \dots, b_nt) , dove $b_i = (-1)^{i+1}d_i$ e d_i è il minore di ordine $n - 1$ ottenuto da A cancellando la colonna i -esima (si osservi che, se $\rho(A) = p$, almeno un d_i e quindi un b_i è non nullo). Ne segue

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1t \\ x_2 = a_2 + b_2t \\ \vdots \\ x_n = a_n + b_nt \end{cases}$$

Come si voleva.

Viceversa, ricavando t da una delle equazioni di (1.1) e sostituendo nelle altre, si ottengono $n - 1$ equazioni che, come si verifica facilmente, sono linearmente indipendenti.