

$\frac{Aoi}{96}$

Federico Cecconi
Stefano Zappacosta

Simulazioni al computer

Teoria ed applicazioni



Copyright © MMVII
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978-88-548-1318-2

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: settembre 2007

Indice

| | |
|--|-----|
| Indice | iii |
| Elenco delle figure | v |
| Capitolo 1. Simulazioni al computer | 1 |
| 1.1. Concetti generali | 2 |
| 1.1.1. Non linearità | 6 |
| 1.2. Introduzione matematica: equazioni differenziali | 8 |
| 1.2.1. Sistemi Dinamici | 10 |
| Capitolo 2. Metodi numerici | 15 |
| 2.1. Definizione del problema | 16 |
| 2.1.1. Stima dell'errore | 18 |
| 2.2. Metodo di <i>Eulero</i> | 19 |
| 2.3. Metodo <i>Runge-Kutta</i> | 20 |
| 2.3.1. Metodi di Runge-Kutta espliciti a più stadi | 21 |
| Capitolo 3. Metodi <i>Monte Carlo</i> | 25 |
| 3.1. Il metodo <i>Monte Carlo</i> | 25 |
| 3.1.1. Il campionamento d'importanza | 33 |
| 3.2. L'algoritmo <i>Metropolis</i> | 34 |
| 3.2.1. <i>Metropolis</i> : descrizione formale | 37 |
| 3.3. Il modello di Ising | 38 |
| Capitolo 4. La simulazione ad agenti | 43 |
| 4.1. Esempio di modello economico | 47 |
| 4.2. Reti neurali artificiali | 53 |
| 4.2.1. Modelli di reti neurali | 56 |
| 4.2.2. Algoritmi di apprendimento | 61 |
| Capitolo 5. Applicazioni | 63 |
| 5.1. Applicazioni alla biologia: problemi di apprendimento | 63 |
| 5.1.1. Descrizione del modello | 63 |
| 5.1.2. Simulazione e Condizioni Sperimentali | 64 |
| 5.1.3. Modello e Risultati | 65 |

| | |
|--|-----|
| 5.1.4. Stati Stabili | 68 |
| 5.1.5. Discussione | 69 |
| 5.2. Applicazioni all'economia: lo scambio | 70 |
| 5.3. Applicazioni alla robotica | 74 |
| 5.4. Applicazioni alle scienze cognitive | 77 |
| 5.4.1. Un esempio fonetico-linguistico | 77 |
| 5.4.2. Problemi di comunicazione | 80 |
| Capitolo 6. Tecniche | 87 |
| 6.1. Matlab | 87 |
| 6.1.1. Variabili in Matlab | 88 |
| 6.1.2. Matrici in Matlab | 89 |
| 6.1.3. Elementi di matrici | 90 |
| 6.1.4. Operazioni tra matrici | 93 |
| 6.1.5. Operatori relazionali e logici | 96 |
| 6.1.6. Strutture di controllo | 97 |
| 6.1.7. Visualizzazione grafica e stampa | 98 |
| 6.1.8. Funzioni di input interattivo | 99 |
| 6.1.9. Funzioni di utilità varia | 100 |
| 6.1.10. M-files e funzioni esterne | 100 |
| 6.2. NetLogo | 102 |
| Capitolo 7. Implementazioni | 105 |
| 7.1. Esempi per figure | 105 |
| 7.1.1. Calcoli per la non-linearità. | 105 |
| 7.1.2. Calcoli per il pendolo semplice. | 107 |
| 7.2. Esempio biologico | 110 |
| Capitolo 8. Dal problema alla simulazione | 129 |
| Bibliografia | 133 |

Elenco delle figure

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Vettori aleatori | 7 |
| 1.2 | Molla armonica | 9 |
| 1.3 | Orbite di un pendolo | 11 |
| 2.1 | Discretizzazione temporale | 15 |
| 3.1 | Parabola di <i>Monte Carlo</i> | 28 |
| 3.2 | Dominio triangolare | 33 |
| 3.3 | Grafico della funzione integranda | 33 |
| 3.4 | Palline nella scatola | 34 |
| 3.5 | Dinamica unidimensionale | 35 |
| 3.6 | Modello di Ising | 39 |
| 4.1 | Andamento e risultati simulativi | 51 |
| 4.2 | Percettrone | 56 |
| 5.1 | Robot e controller | 64 |
| 5.2 | Densità aree | 67 |
| 5.3 | Mortalità | 68 |
| 5.4 | Stati stazionari | 69 |
| 5.5 | Domanda-offerta lineari | 71 |
| 5.6 | Dinamica domanda-offerta | 71 |
| 5.7 | Robot singolo e robot uniti | 76 |
| 5.8 | Rete di Elman | 78 |
| 5.9 | Schema passaggi organismi | 81 |
| 5.10 | Caso $0.001 = \beta < r = 0.05$ e $\pi = 0.001$ | 84 |
| 5.11 | Valori finali | 84 |
| 5.12 | Caso $0.001 = \beta < r = 0.05$ e $\pi = 0.001$ | 85 |

| | | |
|-----|------------------|-----|
| 6.1 | Stormo d uccelli | 103 |
| 6.2 | Gruppi di agenti | 103 |

Simulazioni al computer

Questo testo è indirizzato principalmente a studenti di economia, biologia, sociologia e scienze cognitive che intendano conoscere e poter mettere in pratica tecniche di simulazione su computer. Più in generale questo libro si rivolge a tutti coloro che intendano conoscere attraverso degli esempi come algoritmi e modelli matematici possano essere applicati a problemi e fenomeni di altre discipline, ed essere risolti mediante l'uso del calcolatore.

Il quadro di riferimento più ampio in cui questo testo si inserisce è la cosiddetta *Scienza della Complessità*. Anche se ci sono numerosi dibattiti su cosa si debba intendere esattamente per scienza della complessità noi riteniamo soddisfacente questa definizione:

Definiamo scienza della complessità una serie di studi che hanno come obiettivo quello di comprendere i comportamenti di sistemi composti da un gran numero di parti, che interagiscono tra di loro. Spesso accade che dall'interazione emergano fenomeni che sarebbe stato difficile (impossibile?) prevedere considerando gli enti singolarmente. Da questa definizione emergono le altre caratteristiche di un sistema complesso: la non linearità, ovvero la forte dipendenza dallo stato iniziale; la interdisciplinarietà, ovvero l'interesse per rintracciare leggi generali che valgano in più contesti, ad esempio leggi fisiche per fenomeni economici; infine, una difficoltà nel trattare questi sistemi con i metodi matematici classici.

Da un lato questo libro si presenta come un testo di servizio, con una *review* completa di tecniche simulative, compresi gli approcci più recenti e dibattuti. In tal senso, ad una trattazione rigorosa da un punto di vista strettamente formale e matematico è stata preferita una più descrittiva ed applicativa, che presenti molti esempi. D'altro canto, è possibile utilizzare il materiale contenuto in questo manuale per lo sviluppo di modelli nuovi e per mettere a confronto approcci diversi su problemi simili. L'intento principale di questo testo è quello di stimolare il lettore all'acquisizione di questo approccio, relativamente nuovo nella ricerca scientifica, ed alla conseguente formulazione di modelli innovativi. Un esempio è il calcolo di

un equilibrio di Nash (problema classico di microeconomia) che può essere studiato tramite una simulazione ad agenti di tipo stocastico, sfruttando la capacità degli agenti di imitarsi a vicenda.

Gli strumenti software sono due: Matlab e Netlogo. Si tratta in realtà di tools molto diversi. Il primo è un classico prodotto ingegneristico per il calcolo sia numerico che simbolico, il secondo è un linguaggio di programmazione rivolto alla simulazione ad agenti. In entrambi i casi si tratta di strumenti con una curva di apprendimento molto buona: entrambi evitano i problemi legati all'apprendere un linguaggio di programmazione in modo classico. Fin dai primi capitoli il lettore è in grado di scrivere brani di codice per problemi *veri* senza dover affrontare un tirocinio, spesso molto duro, sulla sintassi dei linguaggi. Diverso è il discorso per i *tools* matematici. La lettura del libro, e un suo utilizzo proficuo, prevedono la conoscenza dei concetti di derivata ed integrale, una conoscenza superficiale di algebra lineare e una certa predisposizione alla lettura di argomenti espressi in modo formale. Si tratta, in sintesi, del tipo di conoscenze che si ottengono dalle scuole superiori di indirizzo tecnico. Per chi non posseda questo background consigliamo la lettura di un qualsiasi manuale (elementare) di analisi matematica: alla fine del libro il lettore troverà una bibliografia dove ci sono alcuni nostri suggerimenti a riguardo.

Nel libro abbiamo cercato di distribuire in modo correlato spazi e importanza: esistono però delle sezioni centrali, soprattutto per chi deve iniziare a realizzare modelli. Si tratta

- (a) delle sezioni riferite alle simulazioni numeriche di sistemi di equazioni differenziali;
- (b) della descrizione del metodo *Metropolis* all'interno del framework denominato simulazione *Monte Carlo*;
- (c) dei capitoli dedicati al modello di Ising;
- (d) al capitolo descrittivo dei metodi basati su agenti.

Gli esempi più adatti agli studenti di biologia, economia, scienze sociali e altri campi sono nel capitolo 5 dedicato alle applicazioni.

1.1. Concetti generali

Se dovessimo chiedere cosa le persone intendono per modello, avremmo probabilmente una serie di risposte molto diverse tra di loro: una serie di equazioni matematiche, una realizzazione in scala di qualcosa (ad esempio un treno giocattolo), oppure il disegno di un'auto, o anche una mappa stradale (un modello di una città). In questo libro descriviamo solo una particolare classe di modelli, quelli definiti come modelli *simulabili al computer*. Cosa si intende con modello simulabile al computer di un sistema reale (o di un particolare fenomeno che il sistema esprime)? La definizione più semplice è

una descrizione semplificata del sistema reale, tale da poter essere espressa tramite algoritmi eseguibili su un computer.

Una simulazione è dunque un programma per computer in grado di modificare degli oggetti specificati da un algoritmo, oggetti che debbono in qualche modo rappresentare il fenomeno che stiamo studiando. Possono essere oggetti matematici, e allora una simulazione al computer è un modo diverso di utilizzare un modello matematico. Oppure possono essere oggetti che colgono alcuni aspetti di un modello matematico sottostante, facendo poi uso di tecniche di indagine statistica (come ad esempio le simulazioni cosiddette Monte Carlo). O anche possiamo immaginare simulazioni che prescindano completamente da una descrizione matematica del fenomeno. Come ad esempio nei modelli basati su agenti, detti appunto Agent Based.

Iniziamo dicendo che può accadere di non riuscire a descrivere il sistema (o l'andamento di un suo particolare fenomeno) tramite un modello matematico. Questo per due motivi:

- (a) la descrizione del sistema è possibile, ma dalla descrizione non è possibile estrarre una (o più) funzioni che ci diano indicazioni di come variano nel tempo le variabili sotto esame. Questo, ad esempio, perché le equazioni differenziali che descrivono il sistema sono non-lineari e non possono essere risolte in forma chiusa. Ad esempio, il sistema solare è descrivibile con un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, all'interno delle quali compaiono variabili come la massa degli elementi (i pianeti e il loro satelliti, il sole, gli asteroidi e altri corpi di massa inferiore), la distanza tra di loro, i campi utilizzati per rappresentare l'interazione reciproca (il campo gravitazionale), costanti che individuano gli ordini di grandezza delle forze che intervengono (la costante di attrazione gravitazionale). Le equazioni descrivono il sistema, e come il sistema cambia nel tempo. Da due secoli sappiamo che questo sistema di equazioni non è risolvibile in modo esatto, anche semplificandolo fino ad inserire tre soli corpi.
- (b) la descrizione del sistema non è possibile, perché sono troppi gli enti coinvolti. Ad esempio

scrivere un sistema di equazioni differenziali che calcoli cosa conviene fare per rendere più efficiente la risposta di un servizio di autoambulanze all'interno di un grosso pronto soccorso cittadino (compatibilmente con le esigenze del personale, della struttura, i vincoli legati al traffico ecc. ecc.).

richiede la scrittura di troppe variabili e relazioni tra di esse, cosicché il compito diventa irrealizzabile (anche se possibile in via teorica). Dobbiamo notare che non si tratta del tipo di problema che

incontriamo descrivendo (statisticamente) il comportamento di un gas sottoposto a determinate condizioni di pressione e temperatura. Infatti descrivendo un gas ho il problema di dover considerare un numero enorme di enti *uguali* (le molecole) sottoposti a processi di interazione molto complessi, ma riconducibili a *poche classi*. In questo caso le tecniche della meccanica statistica permettono il calcolo della distribuzione statistica di tutte le variabili coinvolte. Invece nel descrivere un pronto soccorso ho relativamente pochi enti, ma molto complessi all'interno e nelle loro relazioni.

Riassumendo sono (almeno) due i motivi che possono rendere difficile la realizzazione di un modello matematico di un sistema: il modello potrebbe essere semplice (pochi enti e poche relazioni tra essi) ma non solubile (a) oppure, (b) il modello potrebbe essere molto complesso (molti enti e relazioni tra essi) e solubile (se fosse possibile scriverlo).

L'uso di calcolatori elettronici ha reso possibile l'utilizzo di una tecnica chiamata simulazione, la quale rende possibile la replica del sistema, cioè la sua riscrittura in termini di algoritmi.

È possibile quindi scrivere le equazioni differenziali e poi scrivere degli algoritmi che permettano di conoscere l'andamento delle variabili, utilizzando intervalli di tempo discreti (questi sono i cosiddetti metodi numerici). È possibile realizzare algoritmi che tentano di indovinare la dinamica delle variabili, generando dei campioni casuali dei valori delle variabili (metodi *Monte Carlo*). Possiamo realizzare programmi che prendano il posto (simulandoli) degli enti del sistema che stiamo studiando: e naturalmente possiamo scrivere programmi che simulino le interazioni (questa tecnica è definita simulazione ad agenti). Nei programmi che utilizziamo per la simulazione del sistema (del fenomeno) possiamo inserire vincoli legati alla topologia del sistema, o anche semplici vincoli spaziali. Ad esempio eseguendo un programma osserviamo cosa accade al sistema solare, simuliamo il suo comportamento, possiamo confrontare i risultati della simulazione con i dati empirici. La crescita di una popolazione di organismi sottoposta a una qualche forma di selezione naturale, il modo con cui una convinzione si distribuisce all'interno di un gruppo di individui, o il modo con cui competono, o cooperano, produttori e consumatori di una risorsa naturale, così da ottenere vantaggi assoluti o reciproci, sono altri esempi di sistemi naturali che possono essere studiati tramite modelli simulati su un computer.

Per rendere queste considerazioni più concrete introduciamo il concetto di *dinamica*, o più esattamente specificiamo meglio questo concetto, utilizzato normalmente nelle scienze fisiche, in questo contesto. La dinamica è in fisica la scienza che si occupa del come il movimento dei corpi sia

influenzato dall'intervento di forze. Un oggetto che cade è un problema di dinamica, più esattamente

come la sua posizione varia nel tempo mentre è sottoposto ad una forza che lo accelera verso il basso

è un problema di dinamica. In questo testo parliamo di dinamica ogni volta che un sistema ha delle *grandezze che variano nel tempo*.

Nella diffusione di una influenza in un gruppo di bambini diciamo che il sistema ha una dinamica perché il numero dei bambini contagiati dal raffreddore cambia nel tempo, e le forze che agiscono sono in questo caso le caratteristiche del contagio, ad esempio quanti bambini saranno contagiati nel prossimo intervallo di tempo, sapendo che il tasso di infettività è dell' $r\%$. Se ci sono altre forze (la percentuale di bambini che guariscono) o altre condizioni (la probabilità che bambini vengano a contatto per il tempo necessario) la dinamica ne sarà influenzata. Possiamo affermare che una dinamica è espressa con una (o più) equazioni che descrivono la velocità con cui la/le variabili coinvolte cambiano

Un altro esempio. Un gruppo si organizza per risolvere il problema di condurre un'azienda manifatturiera: ciascun individuo coinvolto, ciascuna struttura che raggruppi gli individui (i reparti), ciascun componente tecnologico o conoscitivo all'interno dell'azienda ha proprietà con valori singolarmente diversi. Ciascuno degli enti indicati sopra è un ente che interagisce con gli altri: l'azienda esibisce infine proprietà generali (ad esempio il suo fatturato) come proprietà emergenti da questa interazione. In altri termini un'azienda può essere descritta come insieme di enti, ciascuna dei quali formati da molte proprietà, ciascuna delle quali con propri valori; queste cose interagiscono tra di loro (e con il tempo che passa) dando origine a proprietà generali. Ancora una volta siamo interessati a studiare la dinamica di questo sistema, come le proprietà e i loro valori si modificano nel tempo.

E con questa seconda esempio ci siamo nuovamente avvicinati a come un fisico descriverebbe un gas: un insieme di cose (molecole), che interagendo tra di loro ecc. ecc. ... Da notare che anche nel caso del gas abbiamo alla fine proprietà emergenti, come ad esempio la pressione. Ma è da notare anche come le molecole siano incredibilmente semplici rispetto alle strutture che ci aspettiamo di trovare negli enti che formano l'organizzazione aziendale.

In questo ambito sono possibili due considerazioni. Uno studioso di fisica (o più in generale abituato a lavorare in una disciplina fortemente quantitativa) potrebbe argomentare

bisogna semplificare il modello descrittivo del fenomeno, così da poter utilizzare strumenti matematici potenti, affidabili, fortemente predittivi.