Aoi

94

Giorgio T. Bagni

Rappresentare la matematica

Simboli, parole, artefatti, figure

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 978–88–548–1235–2

I edizione: giugno 2007

A Chiara ed Elena

Indice

Prefazione

di Jean–Philippe Drouhard

1.

Di tutte le questioni difficili sollevate dalla matematica, le più difficili sono senza dubbio quelle che riguardano il rapporto tra la realtà, la matematica e le convenzioni; e se a questi tre termini si aggiunge il linguaggio, si arriva ad un nodo di difficoltà che la stragrande maggioranza dei matematici si guarda bene dall'affrontare. Non si può peraltro criticare questa scelta, in quanto sarebbe necessario, per trattare tali tematiche, un impianto concettuale proprio della filosofia delle scienze che la sola pratica della matematica pura, per quanto a livelli brillanti, non può fornire. Si può per contro lamentarsi del fatto che didattici e storici della matematica evitano troppo frequentemente di considerare questo genere di questioni, pur non potendo accampare la scusa di una scarsa incidenza sull'oggetto dei loro studi. Il fatto è che per affrontare queste tematiche è necessaria una profonda e solida cultura filosofica, un'intima conoscenza della matematica e soprattutto quella che si può ben chiamare una reale *intrépidité* intellettuale, il gusto e il coraggio di portare il proprio sguardo sulle zone oscure della realtà, e non solo su quelle illuminate, ma in bianco e nero, da un riduzionismo diffuso e rassicurante. L'opera di Giorgio T. Bagni porta il segno di questa purtroppo rara *intrépidité*; ma non è tutto. La storia della matematica e le ricerche didattiche sperimentali cadono troppo spesso nel difetto di una erudita esaustività che fa in modo che la pretesa dell'esattezza sovrasti la ricerca della significatività; ad esempio, si comprende bene che cosa un determinato concetto matematico abbia significato per i suoi inventori, all'epoca della sua invenzione, perché esso sia stato inventato e in quale contesto quell'invenzione si collochi; ma non si comprende in che cosa esso riguardi noi, noi moderni. La filosofia della matematica, per parte sua, è spesso caratterizzata da una lettura arida, senza esempi significativi che permettano di comprendere di che cosa si sta parlando. Numerosi autori hanno già sottolineato la necessità di considerare in termini complementari la storia (ovvero gli studi “sul campo”) e la filosofia, ma tutto ciò è, per dirla in parole povere, ben più facile a dirsi che a farsi. E in questo sta la seconda preziosa qualità di questo lavoro: Giorgio T. Bagni propone con semplicità e chiarezza i propri esempi, antichi o contemporanei, di matematici illustri o di allievi “normali” – i nostri allievi – che danno senso e prospettiva ai più difficili concetti dell’epistemologia.

2.

Per quanto riguarda i rapporti tra la matematica e la realtà, con l’«irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali», per riprendere la formulazione del fisico Eugene Wigner, particolarmente significativa è una sconcertante analogia con la questione (posta dai creazionisti di ogni genere) della meravigliosa e inesplicabile perfezione delle organizzazioni degli esseri viventi: come l’occhio dell’aquila può essere così perfetto, così ben adattato alla propria funzione, o come possono essersi sviluppati i meccanismi del trasporto del polline dei fiori mediante gli insetti, senza che un Grande Orologiaio abbia messo in atto un piano prestabilito per la loro realizzazione?

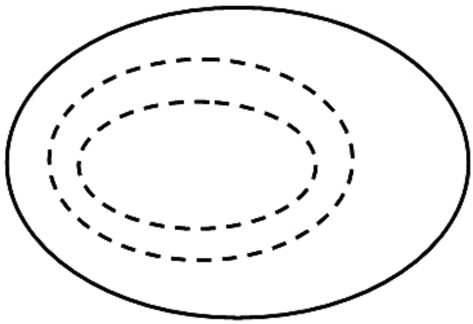
La risposta può essere trovata nell’ambito delle teorie (dette “neodarwiniane”) dell’evoluzione (divulgate in modo eccellente da Stephen J. Gould o da Richard Dawkins). E qui abbiamo un’analogia con lo sviluppo delle teorie scientifiche: tale analogia è stata esplicitata da Karl Popper, ed è Donald T. Campbell che per primo ha proposto il termine “epistemologia evoluzionista”. Ma Popper ha una visione ristretta della teoria evoluzionista (in particolare della nozione di adattamento, ridotta alla “sopravvivenza del più adatto”) applicata alla scienza (basata sulla sola falsificabilità); inoltre la matematica non rientra nel suo campo d’indagine (quale falsificabilità può essere posta per una proposizione matematica?).

Un cantiere può però essere ancora aperto: si può integrare il pensiero di Wittgenstein sulle “regole” con una teoria evoluzionista della matematica. L’idea è che la risposta alla domanda iniziale potrebbe essere del tipo: la matematica è un gioco con regole convenzionali che descrive bene la realtà in quanto è il risultato di una selezione basata esattamente sull'adeguamento della descrizione. Ma le cose diventano molto complicate quando si cerca di fornire una descrizione dettagliata (ed è per questo che parlo di "cantiere"). Innanzitutto bisognerebbe precisare chiaramente i soggetti della nostra riflessione (adeguamento, descrizione, regole etc.); quindi dovremmo affrontare il difficile problema dell'intenzionalità: le mutazioni naturali non sono il prodotto di alcuna intenzione, ma le invenzioni matematiche sono il prodotto dell'attività intenzionale dei matematici. In effetti, questa contraddizione potrebbe risolversi osservando che l'intenzionalità non è la teleologia e che è sul rifiuto di quest'ultima, e solamente di essa, che si basa la teoria dell'evoluzione. Infine c'è la co–evoluzione dei diversi tipi di sapere (descritti dall'epistemografia): i concetti si evolvono insieme con i sistemi di rappresentazione semiotica, con gli strumenti (e con l'efficacia pratica della matematica: possiamo riferirci ancora a Wittgenstein), infine con le regole del gioco (il modo di fare matematica) e perfino con la denominazione stessa di matematica (quella che abbiamo riferito alle conoscenze del III ordine). È necessario descrivere questa co–evoluzione, analogamente a quanto accade per i fiori e per le farfalle, la cui evoluzione non potrebbe essere compresa se non nei termini di una co–evoluzione. E per fare ciò lavori come quelli di Giorgio T. Bagni sono di grandissimo valore.

3.

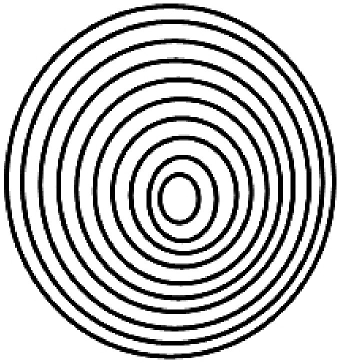
Ma una delle più importanti lezioni dei teorici dell'evoluzione (penso qui a Richard Dawkins in particolare, con *River out of Eden - A Darwinian view of Life*) ci porta a capire che le organizzazioni biologiche non sono "perfette" come a noi possono apparire. In effetti, esse assomigliano più al risultato di un *bricolage* guidato dal solo scopo di un'efficacia nella perpetuazione della specie. Ad esempio, alcuni organi vengono utilizzati per scopi diversi da quelli che costituivano la loro funzione iniziale, uno stesso organo viene impiegato in molte funzioni diverse e contraddittorie, e sono necessari dei meccanismi complessi per gestire queste contraddizioni. Si ritrova lo stesso fenomeno nei sistemi di rappresentazione semiotica, e l'esempio dei diagrammi di Venn (capitolo III) è senza dubbio illuminante. Giorgio T.

Bagni cita un caso in cui i diagrammi di Venn non funzionano, e questo mi ha permesso di comprendere le difficoltà che avevo riscontrato alcuni anni fa nello studio, per motivi d'insegnamento, della teoria degli ordinali. I testi di logica matematica utilizzano pochissimo i diagrammi di Venn, ma ritenevo tale scelta legata al gusto per una scrittura simbolica e ad una ricerca d'ermetismo piuttosto elitaria. Ho combattuto per ore nel tentativo di rappresentare con dei diagrammi di Venn le dimostrazioni più strane dei principali teoremi sugli ordinali, ma senza ottenere niente di coerente. Sono giunto ad usare una rappresentazione molto personale, quella dei diagrammi di Venn "tratteggiati", invenzione ibrida che mi permetteva di mettere in comunicazione il "di dentro" e il "di fuori" di un sottoinsieme.



Sono ben conscio dell'assurdità di una tale rappresentazione, ma almeno (mettendo tra parentesi queste incoerenze) rendeva possibile seguire passo per passo quelle dimostrazioni sconcertanti. Avevo intanto compreso che l'impossibilità di rappresentare gli ordinali mediante diagrammi di Venn deriva dal fatto che gli insiemi sono rappresentati da superfici ellissoidali (in francese si chiamano *les "patates"*) mentre gli elementi sono rappresentati da dei punti; ma la nozione stessa di ordinale esige che gli elementi siano dei sottoinsiemi! A tale scopo (nel registro delle scritture simboliche), la convenzione usuale che consiste nell'indicare con lettere maiuscole gli insiemi e con lettere minuscole gli elementi è ugualmente impossibile da seguire, e ancora una volta avevo istintivamente considerato la scelta dei manuali di logica matematica di utilizzare soltanto le minuscole per rappresentare indifferentemente insiemi ed elementi come una forma di affettazione un po' snob dei loro autori.

Mi sono allora domandato se non si dovesse sostituire le patate con delle cipolle (per restare nell'ambito del vocabolario vegetale) e rappresentare gli ordinali in questo modo:



Ben sapendo che ciò implica, dopo tutto ciò che abbiamo sopra visto, un completo cambiamento delle convenzioni rappresentative per i sottoinsiemi e per gli elementi.

In tutti i casi, è un grande merito di Giorgio T. Bagni di mostrarci che non soltanto i diagrammi di Venn non sono perfetti, ma anche che sono addirittura grossolanamente imperfetti, e ciò anche con riferimento a situazioni ben più semplici rispetto ai bizzarri ordinali. Eppur tuttavia essi continuano ad essere usati, proprio perché si sono ben adattati ad un certo numero di situazioni elementari. Per riprendere l'analogia biologica, ci si domanda spesso perché tanti animali sono "daltonici" (i gatti, i cani, le mucche…), finché ci si rende conto che i vertebrati che hanno una visione a colori sono una minoranza, e che questa capacità di vedere a colori è fondamentalmente collegata al regime alimentare: gli animali che si nutrono di frutti (dunque molti uccelli e i nostri antenati primati) hanno bisogno di sapere se i frutti sono maturi o no, gli insetti bottinatori devono percepire le differenze tra i fiori (e d'altronde le api vedono più colori di noi, riuscendo anche a percepire l'ultravioletto prossimo) ma il colore dell'erba che bruca non apporta alcuna informazione utile alla mucca per giustificare la presenza di un sistema complesso di visione a colori. I diagrammi di Venn sono dunque utili per tutta una classe di situazioni matematiche, e proprio questo ha determinato il loro successo, a dispetto della loro incapacità di rappresentare altri tipi di situazione.

Jean–Philippe Drouhard
IUFM de Nice