

$$\frac{A_{01}}{83}$$

Gabriella Bretti
Paolo Emilio Ricci

Breve corso
di Analisi numerica



Copyright © MMV
ARACNE editrice S.r.l.

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

via Raffaele Garofalo, 133 A/B
00173 Roma
(06) 93781065

ISBN 88-548-0330-8

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.

Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.

I edizione: dicembre 2005

In memoria di
Rosalba Faraone Ricci

Indice

Introduzione	xiii
1 Le funzioni Gamma e Beta	1
1.1 Definizioni e prime proprietà	1
1.1.1 Proprietà delle funzioni Gamma e Beta	2
1.1.2 Ulteriori proprietà della funzione Gamma	7
1.1.3 Prolungamento della funzione Gamma per valori negativi della variabile	8
1.2 La funzione Digamma	10
1.3 Esempi	11
1.4 Esercizi proposti	17
Bibliografia	18
2 Interpolazione e approssimazione	19
2.1 Il problema dell'interpolazione lineare	19
2.1.1 Il polinomio interpolatore nella forma di Lagrange	21
2.2 Il polinomio interpolatore nella forma di Newton	25
2.2.1 Rappresentazione e stima del resto nelle formule di interpolazione	31
2.3 I polinomi di Chebyshev	34
2.3.1 Polinomi di Chebyshev di prima specie	36
2.3.2 Polinomi di Chebyshev di seconda specie	38
2.4 Il problema della convergenza	39
2.5 Generalità sugli spazi normati	42

2.6	Approssimazione lineare in uno spazio normato	44
2.6.1	Esistenza e unicità dell'approssimazione ottima	46
2.7	Generalità sugli spazi di Hilbert	47
2.8	Approssimazione lineare in uno spazio di Hilbert	48
2.9	Combinazione lineare di approssimazione ottima	50
2.9.1	La matrice di Hilbert	52
2.10	Utilizzazione di sistemi ortonormali	52
2.11	Metodo dei minimi quadrati in dimensione finita	55
2.11.1	Approssimazione ai minimi quadrati di un insieme di dati	58
	Bibliografia	66
3	Polinomi ortogonali	67
3.1	Approssimazione lineare negli spazi L_w^2	67
3.2	Proprietà generali dei polinomi ortogonali	69
3.2.1	Relazione di ricorrenza	70
3.2.2	Identità di Chistoffel-Darboux	71
3.2.3	Localizzazione degli zeri	71
3.2.4	Separazione degli zeri	72
3.3	I polinomi ortogonali classici	73
3.3.1	Formulario essenziale	75
3.4	I polinomi di Hermite	80
3.4.1	Un'applicazione dei polinomi di Hermite: l'oscillatore armonico	84
3.5	Un esempio di serie di Legendre-Fourier	86
	Bibliografia	89
4	Funzioni di Bessel	91
4.1	Funzioni di Bessel di prima specie J_n	91
4.2	Rappresentazione integrale di J_n	96
4.3	Ortogonalità e sviluppi in serie di Fourier-Bessel	97
4.4	Funzioni di Bessel di seconda specie Y_n	99
4.5	Equazioni differenziali ed equazione di Bessel	100
4.6	Altri tipi di funzioni di Bessel	102
4.7	Esempi	105

4.8	Esercizi proposti	109
	Bibliografia	110
5	Quadrature numeriche	111
5.1	Generalità sulle formule di quadratura	111
5.2	Formule di quadratura interpolatorie	112
5.3	Formule di Newton-Cotes semplici	117
	5.3.1 Espressione del resto	119
5.4	Formule di Newton-Cotes composte	125
5.5	Le formule di quadratura gaussiane	127
5.6	Teorema di Stieltjes	140
5.7	Esercizi proposti	142
	Bibliografia	143
6	Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie	145
6.1	Generalità e teoremi fondamentali	145
6.2	Il metodo di Eulero. Metodi a un passo	147
6.3	Metodi basati sulla formula di Taylor. Ordine di consistenza	149
6.4	Metodi a un passo del secondo ordine	151
	6.4.1 Il metodo di Heun	152
	6.4.2 Il metodo di Collatz	152
6.5	I metodi del tipo di Runge-Kutta	153
6.6	Un'applicazione: il modello logistico per la crescita della popolazione	155
6.7	Metodi a più passi basati sulle formule di quadratura	159
	6.7.1 I metodi predictor-corrector	165
6.8	Ricorrenze lineari	166
	6.8.1 Cenni sulle equazioni alle differenze	168
	6.8.2 Il caso lineare	170
	6.8.3 Ricorrenze lineari a coefficienti costanti	172
6.9	Metodi lineari a più passi	175
	Bibliografia	180

7	Zeri di equazioni non lineari	181
7.1	Generalità sui metodi iterativi	181
7.2	Metodi iterativi per equazioni non lineari	183
7.3	Ordine di un procedimento iterativo	186
7.4	Esempi di metodi iterativi	188
7.5	Il metodo della falsa posizione (<i>regula falsi</i>)	189
7.5.1	Stima dell'errore	190
7.6	Il metodo (a due passi) delle secanti	192
7.6.1	Stima dell'errore	193
7.7	Il metodo di Newton	194
7.7.1	Stima dell'errore	196
7.7.2	Calcolo della radice n -ma	201
7.8	Il caso delle radici multiple	202
7.9	Il caso dei sistemi in due variabili	203
	Bibliografia	206
8	Matrici e sistemi lineari	207
8.1	Norme di vettori	207
8.1.1	Esempi di norme di vettori	207
8.2	Generalità sulle matrici	208
8.2.1	Matrici simmetriche e forme quadratiche	209
8.2.2	Autovalori	210
8.2.3	Matrici ortogonali	211
8.2.4	Matrici di Householder	211
8.2.5	Matrici di forma particolare	212
8.2.6	Matrici ripartite in blocchi	214
8.3	Norme di matrici	216
8.3.1	Esempi di norme di matrici	216
8.3.2	Esempi di norme naturali. Norma spettrale	217
8.4	Successioni e serie di matrici	218
8.4.1	La successione $\{A^k\}$	219
8.4.2	La serie geometrica di una matrice	219
8.5	Fattorizzazioni di una matrice quadrata	220
8.5.1	Fattorizzazione LU in un caso particolare	222
8.6	Algoritmo di Cholesky	225

8.7	Fattorizzazioni QU	227
8.8	Risoluzione dei sistemi lineari	229
8.9	Il metodo dell'eliminazione di Gauss	230
8.10	Sensibilità alle perturbazioni del termine noto	232
8.10.1	Indice di condizionamento di una matrice	233
8.11	Sensibilità alle perturbazioni della matrice A	234
8.11.1	Sistemi malcondizionati	235
8.12	Fattorizzazione QU per sistemi lineari	235
8.13	Metodo di Householder per i minimi quadrati	237
8.14	Calcolo di autovalori con il metodo QR	239
8.15	Metodi iterativi per sistemi lineari	241
	Bibliografia	243

Introduzione

La modifica dell'ordine degli studi nelle facoltà scientifiche, determinata dall'entrata in vigore della riforma universitaria, ha reso necessario l'adeguamento in senso contrattivo dei programmi di molti corsi di base. Questo fatto rappresenta una delle prevedibili conseguenze negative della riforma ¹.

La matematica numerica rappresenta un elemento fondante del calcolo scientifico. Essa stabilisce un punto di contatto tra diversi campi della matematica, quali l'analisi, l'algebra lineare, la geometria, la teoria dell'approssimazione, l'ottimizzazione, le equazioni differenziali. Si è cercato in questo testo di raccogliere quei metodi di approssimazione numerica, utili nella risoluzione di problemi che hanno origine da diverse discipline che fanno parte delle moderne scienze applicate e che non dovrebbero essere tralasciati anche negli attuali insegnamenti.

Gli argomenti che vengono presentati nel testo sono i seguenti: cenni su alcune funzioni speciali e sui polinomi ortogonali, approssimazione di dati e funzioni, formule di quadratura, problemi di valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie, risoluzione di equazioni non lineari, metodi elementari dell'algebra lineare numerica. Vengono esaminate le idee che stanno alla base dei diversi problemi affrontati e descritte le principali tecniche di risoluzione, corredandole, a scopo esemplificativo, di alcuni esercizi svolti. Il testo si rivolge agli studenti dei corsi di analisi numerica della laurea triennale, ma alcuni capitoli possono anche essere utilizzati nei corsi di metodi di approssimazione.

¹ Cfr. P.E. Ricci, *Considerazioni sulla crisi dell'Università e sulla riforma dell'anno 2000*, Università Notizie (Organo dell'U.S.P.U.R.), **XIX**, N. 5 (2000), 10–13.

xiv

Ringraziamo in anticipo quanti vorranno segnalarci possibili errori di stampa ed inviarci commenti atti a rendere didatticamente più efficace il testo.

Roma, novembre 2005.

Gabriella Bretti
Paolo E. Ricci