

AI3



Vai al contenuto multimediale

Riccardo Cesari, Arturo Valerio

Risk management e imprese di assicurazione

Aggregazione dei rischi e requisiti di capitale
nella nuova vigilanza prudenziale (con esempi in R)





Aracne editrice

www.aracneeditrice.it

info@aracneeditrice.it

Copyright © MMXIX

Gioacchino Onorati editore S.r.l. – unipersonale

www.gioacchinoonoratieditore.it

info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20

00020 Canterano (RM)

(06) 45551463

ISBN 978-88-255-2209-9

*I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica,
di riproduzione e di adattamento anche parziale,
con qualsiasi mezzo, sono riservati per tutti i Paesi.*

*Non sono assolutamente consentite le fotocopie
senza il permesso scritto dell'Editore.*

I edizione: febbraio 2019

A Giulia

Riccardo

Dedicato a mio padre Vittorio

Arturo

Indice

Introduzione	13
Notazioni matematiche e simboli	19
1 Correlazione lineare	25
1.1 Definizione e proprietà	25
1.1.1 Correlazione non definita	29
1.1.2 Dipendenza non lineare	31
1.1.3 Non invarianza rispetto a trasformazioni	32
1.2 Stima della correlazione lineare	37
1.3 Serie storiche di mercato: introduzione	43
2 Le copule	49
2.1 Introduzione	50
2.2 Distribuzioni e distribuzioni uniformi	52
2.3 Copula bivariata	54
2.3.1 Esistenza e unicità della funzione copula	56
2.3.2 Dipendenza funzionale e limiti di Fréchet-Hoeffding	59
2.3.3 Invarianza per trasformazioni monotone e copula di sopravvivenza	66
2.3.4 Covarianza e correlazione lineare	73
2.3.5 Copula bivariata: esempi	76
2.3.6 La dipendenza nelle serie storiche di mercato	84
2.4 Dipendenza di coda	89
2.4.1 La dipendenza di coda nelle serie storiche di mercato	93
2.5 Misure di dipendenza	97
2.5.1 Misura di dipendenza ρ_τ di Kendall	99
2.5.2 Misura di dipendenza ρ_S di Spearman	102
2.5.3 Stima campionaria della correlazione lineare	104
2.5.4 Stima delle misure di dipendenza nelle serie storiche di mercato	115
2.5.5 Test non parametrici di indipendenza	116
2.6 Copula multivariata	118
2.6.1 Probabilità marginali, congiunte e condizionate	120
2.6.2 Limiti inferiore e superiore di Fréchet-Hoeffding	123
2.6.3 Quasi copula e proprietà di continuità	125
2.6.4 Invarianza per trasformazioni monotone e copula di sopravvivenza	129

2.6.5	Funzione di distribuzione K_τ di Kendall	131
3	Copule ellittiche ed archimedee	135
3.1	Copule ellittiche	135
3.1.1	Copula gaussiana bivariata	135
3.1.2	Copula gaussiana multivariata	145
3.1.3	Copula t di Student bivariata	147
3.1.4	Copula t di Student multivariata	154
3.1.5	Definizione di copula ellittica	156
3.1.6	Copule ellittiche: ρ_S di Spearman e ρ_τ di Kendall . . .	158
3.1.7	Copule ellittiche: dipendenza di coda	159
3.2	Copule archimedee	166
3.2.1	Copule di Gumbel, Frank e Clayton: caso bivariato . . .	169
3.2.2	Copule archimedee: ρ_S di Spearman e ρ_τ di Kendall . .	179
3.2.3	Copule archimedee: dipendenza di coda	183
3.3	Copule ellittiche ed archimedee a confronto	188
3.3.1	Simmetrie delle copule ellittiche	188
3.3.2	Simmetrie delle copule archimedee	189
3.3.3	Dipendenza di coda	190
3.4	Altre tipologie di copula	192
3.4.1	Le copule iperboliche	192
3.4.2	Copule innestate e D-vines	195
3.5	Due applicazioni della copula gaussiana al rischio di credito . .	198
3.5.1	Il modello di Vasicek per il tasso di <i>default</i>	198
3.5.2	La formula che uccise Wall Street: copule e pricing dei derivati creditizi	204
4	Algoritmi e simulazioni	207
4.1	Estrazione di campioni di variabili univariate	207
4.1.1	Simulazione per inversione	207
4.1.2	Simulazione per trasformazione	210
4.1.3	Metodo di accettazione - rifiuto	221
4.1.4	Metodo del rapporto tra uniformi	223
4.1.5	Confronto dei metodi di simulazione	227
4.1.6	Simulazione di variabili discrete	229
4.2	Estrazione di campioni di copule	231
4.2.1	Copule comonotona, contromonotona e prodotto	231
4.2.2	Copule ellittiche	231
4.2.3	Copula <i>skewed</i> t di Student	239
4.2.4	Copule archimedee: trasformazione di Rosenblatt	241
4.2.5	Copule archimedee: metodo di Marshall-Olkin	246

5	Stima dei parametri	253
5.1	Stima di massima verosimiglianza	253
5.1.1	Metodo di massima verosimiglianza completo (ML) . . .	254
5.1.2	Metodo di inferenza sulle marginali (IFM)	261
5.1.3	Metodo delle marginali osservate (CML)	263
5.2	Stima di minima distanza	266
5.2.1	Test di Kolmogorov-Smirnov e Cramér-Von Mises . . .	266
5.2.2	Stima basata sulla funzione di copula empirica	269
5.2.3	Stima basata sulla funzione K_τ di Kendall	271
5.3	Trasformazione di Rosenblatt	275
6	Misure di rischio	279
6.1	Misure di rischio: definizione	279
6.2	Valore a rischio ed <i>expected shortfall</i>	283
6.3	Non subaddittività del valore a rischio	292
6.3.1	Subaddittività per variabili ellittiche	298
6.3.2	Subaddittività in caso di code spesse	299
6.4	Stima campionaria di valore a rischio ed <i>expected shortfall</i> . . .	302
6.4.1	Valore a rischio campionario	303
6.4.2	<i>Expected shortfall</i> campionario	306
6.5	Limiti del valore a rischio	309
6.5.1	Disuguaglianza di Chebyshev - Cantelli	309
6.5.2	Classe di Fréchet	309
6.A	Appendice. Somma di due distribuzioni	313
6.A.1	Variabili uniformi	315
6.A.2	Variabili normali	315
6.A.3	Variabili esponenziali	316
6.A.4	Variabili Pareto	320
6.B	Appendice. Classe di Fréchet: esempi	322
6.B.1	Caso bivariato: marginali identicamente distribuite . . .	322
6.B.2	Variabili esponenziali, normali e lognormali	327
6.B.3	Limiti del valore a rischio nel caso multivariato	333
7	Introduzione a Solvency II	335
7.1	Introduzione a <i>Solvency II</i>	335
7.1.1	Il problema della solvibilità	335
7.1.2	Da <i>Solvency I</i> a <i>Solvency II</i>	336
7.1.3	Il sistema <i>Solvency II</i> e i requisiti di primo pilastro . . .	339
7.1.4	La valutazione di passività e fondi propri	340
7.1.5	Il requisito di capitale (SCR)	344
7.2	La formula standard	347
7.2.1	Rischi di mercato	351
7.2.2	Rischio health	356
7.2.3	Rischio default	357
7.2.4	Rischio life	358

7.2.5	Rischio non life	361
7.3	Modelli interni e USP	368
7.A	Appendice. L'evoluzione della regolamentazione bancaria.	370
7.A.1	Basilea 1: l'accordo del 1988	370
7.A.2	Basilea 1.5: l'Emendamento del 1996	371
7.A.3	Basilea 2: l'impostazione a 3 pilastri	373
7.A.4	Basilea 3: gli effetti della crisi globale sulla regolamentazione bancaria	375
8	Assicurazioni danni	377
8.1	Rischi catastrofali e teoria dei valori estremi	377
8.1.1	I rischi catastrofali: introduzione	377
8.1.2	Teoria dei valori estremi (<i>extreme values theory</i>)	379
8.1.3	Caratterizzazione dei domini di attrazione	384
8.1.4	Copula a valori estremi	386
8.1.5	Distribuzioni a valori estremi: stima dei parametri	388
8.1.6	Il tempo di ritorno	389
8.1.7	Serie storiche di mercato: eventi estremi	390
8.1.8	Rischi catastrofali: i modelli geografici	391
8.2	Il <i>pricing risk</i>	395
8.2.1	Il risultato tecnico	395
8.2.2	Il costo aggregato dei sinistri	396
8.2.3	Stima della distribuzione del numero di sinistri	401
8.2.4	Stima della distribuzione del costo di un sinistro	403
8.2.5	Stima della distribuzione composta	409
8.2.6	Aggregazione varianza-covarianza e con copula	413
8.3	Il <i>reserving risk</i>	415
8.3.1	Il metodo <i>chain-ladder</i> del pagato	415
8.3.2	Il modello di Merz e Wüthrich	420
8.3.3	Il modello <i>over-dispersed Poisson chain-ladder</i>	429
9	Assicurazioni vita	433
9.1	Le assicurazioni sulla vita: introduzione	433
9.2	Tassi di mortalità della popolazione italiana	437
9.3	Rendite temporanee posticipate	441
9.3.1	Determinazione del premio	441
9.3.2	Gestione finanziaria dell'impresa	446
9.3.3	Stima dei rischi <i>longevity</i> e <i>interest rate</i>	448
9.4	Polizze temporanea caso morte (TCM)	452
9.4.1	Stima dei rischi <i>mortality</i> e <i>interest rate</i>	453
9.5	Il modello di Lee-Carter	456
9.5.1	Stima dei parametri ed analisi dei fattori di errore	456
9.5.2	Previsione dei valori futuri dei tassi di mortalità	461
9.6	Rendite temporanee: un modello stocastico	465
9.6.1	Stima dei rischi <i>longevity</i> e <i>interest rate</i>	468

10	Aggregazione e diversificazione dei rischi	471
10.1	Aggregazione dei rischi	471
10.1.1	Aggregazione varianza-covarianza	471
10.1.2	Aggregazione mediante copula	474
10.1.3	Copule ellittiche bivariate: caso $\rho = 0$	476
10.1.4	Copule ellittiche bivariate: caso $\rho = 50\%$	481
10.1.5	Copule ellittiche: correlazioni campionarie	484
10.1.6	Copule ellittiche bivariate: varianza, asimmetria e curtosi	484
10.1.7	Aggregazione con copule archimedee	487
10.1.8	Dipendenza dallo schema di aggregazione	489
10.1.9	Diversificazione al variare del numero di rischi	492
10.2	Allocazione dei rischi	494
10.2.1	Standard formula: aggregazione ed allocazione	497
10.2.2	Aggregazione con copula: lo <i>smoothing</i>	498
10.2.3	Quantili post-diversificazione	506
10.3	Regolarizzazione della matrice di correlazione	509
10.3.1	Carattere PSD delle matrici	510
10.3.2	Algoritmi di regolarizzazione	512
11	Simulazioni e grafici in R	515
11.1	Introduzione al linguaggio R	515
11.1.1	Definizione di variabili	515
11.1.2	Linguaggio di programmazione	519
11.2	Distribuzioni di probabilità	521
11.2.1	Creazione di grafici: le funzioni <code>plot</code> e <code>hist</code>	523
11.3	Inversione di funzioni (metodo di Newton)	527
11.4	Calcolo Monte Carlo parallelo	528
11.5	Simulazione di variabili normali univariate	530
11.6	Simulazione di copule	532
11.6.1	Campione con dipendenza gaussiana	532
11.6.2	Copula <i>t</i> di Student	533
11.6.3	Copula <i>skewed t</i> di Student	536
11.6.4	Copule archimedee: trasformazione di Rosenblatt	539
11.6.5	Copule archimedee: metodo di Marshall-Olkin	540
11.6.6	Metodi nativi di R: il package <code>copula</code>	543
A	Probabilità e variabili aleatorie	545
A.1	Spazio probabilistico	545
A.2	Variabili aleatorie	547
A.3	Funzioni di variabili aleatorie	552
A.3.1	Caso univariato	552
A.3.2	Caso multivariato	555
A.4	Media di una variabile aleatoria	558
A.5	Momenti di una variabile aleatoria	560
A.6	Lemma di Hoeffding	564

B	Distribuzioni di probabilità	567
B.1	Distribuzioni di probabilità univariate	567
B.1.1	Distribuzione di Poisson	567
B.1.2	Distribuzione binomiale negativa	567
B.1.3	Distribuzione continua uniforme	568
B.1.4	Distribuzione gaussiana	570
B.1.5	Distribuzione lognormale	572
B.1.6	Distribuzione chi quadro	573
B.1.7	Distribuzione t di Student	574
B.1.8	Distribuzione di Cauchy	576
B.1.9	Distribuzioni stabili	578
B.1.10	Distribuzione esponenziale negativa	580
B.1.11	Distribuzione gamma	582
B.1.12	Distribuzione beta	582
B.1.13	Distribuzione di Pareto	583
B.1.14	Distribuzione GEV	584
B.1.15	Distribuzione di Pareto generalizzata	585
B.2	Distribuzione delta di Dirac	585
B.3	Distribuzioni di probabilità multivariate	587
B.3.1	Distribuzione gaussiana bivariata	587
B.3.2	Distribuzione gaussiana multivariata	589
B.3.3	Distribuzione t di Student multivariata	590
B.3.4	Variabili aleatorie sferiche	590
B.3.5	Variabili aleatorie ellittiche	594
	Indice analitico	599
	Bibliografia	605

Introduzione

Non curat numerum lupus

Virgilio

Gli intermediari finanziari, tra cui spiccano banche e assicurazioni, svolgono un ruolo cruciale nelle economie di mercato in quanto, oltre a creare strumenti di pagamento (la moneta bancaria), emettono e gestiscono strumenti di risparmio su cui fanno affidamento famiglie, imprese, lavoratori, consumatori e tutto il grande pubblico dei cittadini.

In un'economia dinamica di produzione, il risparmio è, ad un tempo, la chiave del benessere individuale e la base per il finanziamento degli investimenti e della crescita collettiva.

Non a caso, in Italia come in altri Paesi, il risparmio è costituzionalmente tutelato e gli intermediari che lo gestiscono sono sottoposti a specifiche Autorità di vigilanza che ne controllano, sia in forma preventiva che consuntiva, le decisioni e l'operato.

La tutela dei clienti-consumatori, attuali e potenziali, è, nei sistemi moderni, la stella polare che guida l'azione di vigilanza e tale obiettivo generale si declina in due fondamentali componenti: la sana e prudente gestione degli intermediari e la correttezza e trasparenza dei loro comportamenti verso la clientela.

Sul significato di “sana e prudente gestione” (e sulle locuzioni simili di “diligenza del buon padre di famiglia” o di “principio della persona prudente”) si sono a lungo intrattenuti economisti e giuristi ma non vi è dubbio che un'**adeguata capitalizzazione** di bilancio sia sempre apparsa come un elemento imprescindibile dell'auspicata prudenza (il futuro essendo incerto) e la condizione necessaria per la stabilità e l'ordinato funzionamento dell'intero mercato finanziario.

Il punto che differenzia le nuove regole sul capitale, rispetto alle precedenti, è, per quanto ovvio agli occhi di oggi, il riconoscimento esplicito dei rischi presenti nella gestione degli intermediari e in particolare dei rischi che insistono sulle varie voci di bilancio, sia attive (investimenti) che passive (debiti).

Lo spettro di tali rischi è molto ampio, numerosi essendo i fattori (*drivers*) che veicolano incertezza sulle varie grandezze economiche: il rischio di tasso, che riflette le conseguenze di movimenti dei tassi d'interesse (tassi a breve, a medio, a lungo, tassi a termine, tassi reali, nominali, ecc...), il rischio di cambio, per le

grandezze legate a valute estere, il rischio di credito e di default (sulla dinamica della solvibilità delle controparti), il rischio azionario, che riflette i movimenti dei titoli di capitale, il rischio di mortalità e longevità, che considera gli effetti di dinamiche demografiche inattese, il rischio di riscatto (*lapse*) che riguarda le decisioni di recesso da parte delle controparti contrattuali, il rischio di *pricing* che riflette la possibilità che i prezzi dei contratti non risultino adeguati, il rischio di riservazione sulla possibile sottovalutazione di costi e spese future etc.

In aggiunta, tali rischi sono spesso compresenti in ciascuna voce di bilancio e devono quindi essere trattati congiuntamente essendo il loro comportamento fortemente interdipendente. Nel linguaggio matematico, si tratta di passare da tante distribuzioni marginali univariate a un'unica distribuzione di probabilità congiunta multivariata, in cui il concetto di **copula** gioca un ruolo fondamentale.

Inoltre, i diversi rischi convergono tutti (a volte compensandosi, a volte sommandosi) sul patrimonio aziendale inteso come saldo tra attività e passività, per cui non stupisce che il nuovo approccio ai requisiti di capitale sia stato chiamato *risk-based* e abbia assunto una forte impostazione statistico-probabilistica, con ampio spazio alla modellistica quantitativa. Questo da un lato è un vantaggio, poiché consente di sfruttare un'amplissima letteratura scientifica e dare un'impostazione rigorosa e precisa a concetti che potrebbero apparire vaghi e arbitrari, dall'altro espone al rischio della eccessiva complicazione e artificiosità ([Haldane and Madouros, 2012]).

Si tratta di un punto di estrema rilevanza: quando ci sono molte fonti di rischio, vengono in primo piano i due aspetti, tra loro connessi, dell'aggregazione e della diversificazione dei rischi. La somma di due variabili (una tipica operazione nella redazione di un bilancio) è il caso più semplice di aggregazione: $Y = X_1 + X_2$. Il comportamento della variabile somma dipende strettamente dai singoli rischi X_1 e X_2 e dalla dipendenza (copula) che li lega. La diversificazione è la riduzione di rischio (se c'è) che presenta la variabile-somma Y rispetto alla somma dei rischi componenti.

Una regolamentazione che richiede capitale in funzione del rischio totale dà estrema importanza alla stima della dipendenza tra i rischi, con un possibile incentivo implicito alla sua sottostima per minimizzare il requisito di capitale. Tra l'altro, una tale sottostima ha duplice valenza negativa dato che, come la crisi globale del 2008 ha (ri)messo in luce, in una prospettiva dinamica le dipendenze tendono a crescere (e le correlazioni a diventare unitarie) quando i rischi si fanno esplosivi e quindi quando più importante sarebbe avere un adeguato buffer di capitale.

Tra la Scilla dell'eccessiva regolamentazione e il Cariddi di vincoli troppo laschi ([Rajan, 2005]) la regolamentazione prima bancaria (Basilea 2) poi assicurativa (*Solvency II*) ha imboccato una direzione intermedia che prende a bordo, per la prima volta, tutti gli strumenti classici di misurazione e gestione dei

rischi (varianza, correlazioni, quantili, propensione al rischio) all'interno di un *framework* standard valido per tutte le imprese mentre lascia aperto il campo a controllate e validate personalizzazioni (e sofisticazioni) quando lo schema standard non riflette adeguatamente le specificità aziendali e occorre fare ricorso ai “modelli interni”.

In aggiunta, accanto al c.d. pilastro quantitativo (1st pillar) le nuove regole impongono di considerare un secondo pilastro, più qualitativo, legato all'autovalutazione complessiva e all'interazione con l'Autorità di vigilanza nel processo di supervisione, e un terzo pilastro, anch'esso cruciale, legato alla comunicazione ampia e trasparente della situazione dell'impresa a tutti gli *stakeholders* (azionisti, clienti, stampa, mercati) nella convinzione che l'informativa obbligatoria al pubblico generi un vincolo virtuoso ai comportamenti aziendali (market discipline) e costituisca un'ulteriore spinta alla solidità dell'impresa.

Dopo molti anni di gestazione, questa vera e propria rivoluzione regolamentare è entrata ufficialmente in vigore in Europa dal 1° gennaio 2016 (per le assicurazioni; decenni prima per le banche) e, sebbene sia sotto periodica revisione e aggiornamento, essa ha fortemente inciso su tutto l'universo aziendale: sulle prassi, l'organizzazione, i ruoli, le procedure, i bilanci delle banche e delle assicurazioni.

Non sempre la cultura aziendale era (ed è) all'altezza della sfida dei mercati e, di riflesso, dei nuovi regolamenti. Nuovi concetti, nuovi linguaggi, nuovi strumenti, nuovi problemi e nuove opportunità si presentano a chi lavora, a vari livelli di responsabilità, nelle imprese finanziarie, dal top manager al consigliere di amministrazione, dal direttore finanza al funzionario dell'area investimenti, dal *risk manager* all'intermediario della distribuzione.

L'intento di questo libro è aiutare chi lavora dentro o accanto agli intermediari finanziari ad approfondire i concetti quantitativi, economici e statistico-probabilistici, presenti nel nuovo approccio *risk-based* sui requisiti di capitale. A tal fine si è partiti dai concetti relativamente semplici di volatilità e correlazione (cap. 1) mostrandone le definizioni e i significati fondamentali, con particolare riferimento al modello di dipendenza (lineare) che la correlazione misura.

Quindi si sono introdotte le copule in generale (cap. 2) e nelle due famiglie delle copule ellittiche ed archimedee (cap. 3) mostrando, a partire dal caso elementare di due sole variabili, come la copula veicoli tutta l'informazione sulla dipendenza tra le variabili considerate e come la forma di questa dipendenza (non lineare) possa essere variamente modellata. I richiami sui concetti della probabilità e delle distribuzioni uni- e multi-variate sono raccolti in due Appendici alla fine del libro mentre di tutti i teoremi enunciati nel testo si è data, quasi sempre, esplicita dimostrazione o, in qualche caso, rinvio alla dimostrazione originale.

I capitoli 4 e 5 consentono al lettore, da un lato di costruire “in laboratorio” dati co-dipendenti, aventi prefissate strutture di copula, simulando così gli effetti di variazioni dei parametri di base e valutando la sensibilità dei risultati a tali variazioni (stress test), dall’altro di stimare secondo criteri ottimali, i parametri di base che identificano la “migliore copula” presente nei dati di mercato.

Nel proporre i molti esempi pratici del libro, si è anche cercato, ove possibile, di far ricorso ad un medesimo insieme di dati empirici (indici *benchmark* dei mercati finanziari internazionali) per consentire un confronto tra le diverse metodologie esaminate nei diversi capitoli.

Nel cap. 6 sono state introdotte e analizzate le principali misure di rischio presenti nella letteratura scientifica e nella regolamentazione bancaria e assicurativa, con particolare riferimento a quelle di Value at Risk (VaR) e di Expected Shortfall (ES). L’effetto delle diverse forme di dipendenza tra i rischi è preso in esame per fornire valori massimi e minimi delle misure di rischio totale.

Le considerazioni sulla nuova regolamentazione, qui appena sintetizzate, sono ampiamente illustrate nel cap. 7 dove, oltre a un’introduzione generale a *Solvency II*, si analizza il sistema-base di mappatura dei rischi e le formule adottate per la loro quantificazione (*Standard Formula*).

I rischi tipici del comparto assicurativo, Danni e Vita, sono approfonditi rispettivamente nel cap. 8 e nel cap. 9, utilizzando varie tipologie di copula e i modelli ricorrenti per *pricing risk* e *reserving risk*. Alcuni esempi numerici illustrano l’uso pratico della modellistica fino al calcolo finale del *Solvency Capital Requirement* (SCR).

Il tema dell’aggregazione dei rischi, sebbene sia il filo rosso di tutta la trattazione, trova pieno sviluppo nel cap. 10. Gli effetti comparati delle diverse forme di copula sono analizzati e misurati in termini di varianza, asimmetria, curtosi e di rapporto di diversificazione, inteso come rapporto tra rischio della somma e somma dei rischi. La rilevanza della struttura aziendale dei livelli di aggregazione è messa in evidenza anche con esempi pratici. La parte finale del capitolo è dedicata all’esame dell’allocazione del capitale diversificato tra i diversi tipi di rischio secondo la scomposizione di Eulero.

Tutto il libro si avvale di esempi pratici e grafici sviluppati col software open source R. Per mettere il lettore in grado di duplicarli e modificarli a piacere, non solo si è fornito in molti casi l’algoritmo sottostante e il relativo codice informatico ma si è ritenuto utile fare anche una semplice introduzione al linguaggio R per la simulazione delle copule e la costruzione dei grafici principali qui prodotti (cap. 11). A fine lettura lo studente sarà in grado di impostare e sviluppare in modo autonomo problemi simili a quelli qui affrontati inclusa la simulazione, l’analisi di sensitività, la calibrazione del modello e l’analisi grafica dell’output.

Durante i molti mesi che la stesura di questo testo ci ha richiesto abbiamo beneficiato dell'aiuto di molti amici e colleghi, in vari momenti e forme: suggerimenti, riletture, commenti, spiegazioni, critiche. Sperando di non dimenticare nessuno, vogliamo ringraziare sentitamente Giusy Bentivegna, Stefano Cavastracci, Leonardo Del Vecchio, Raffaella Marchese, Enzo Orsingher, Stefano Pasqualini, Valentino Pompili, Mariagrazia Rositano, Silvia Sacco, Antonella Scarangella, Agostino Tripodi.

Poiché si tratta di un ringraziamento e non di una denuncia, ci affrettiamo ad aggiungere che le persone menzionate non sono in alcun modo responsabili di eventuali errori ed omissioni rimasti in questa versione finale. I contenuti del libro sono esclusiva responsabilità degli autori e non coinvolgono le istituzioni di appartenenza.

Notazioni matematiche e simboli

Notazioni matematiche generali

n	Dimensione dello spazio $n \in \mathbb{N}$
\mathbb{N}	Insieme dei numeri naturali (zero escluso)
\mathbb{N}_0	Insieme dei numeri naturali (zero incluso)
\mathbb{R}	Campo dei numeri reali
\mathbb{R}^+	Insieme dei numeri reali positivi (zero escluso)
\mathbb{R}_0^+	Insieme dei numeri reali positivi o nulli
\mathbb{R}^n	Campo dei vettori reali n -dimensionali
$[x]$	Parte intera del numero reale positivo $x \in \mathbb{R}^+$
(π_1, \dots, π_n)	Permutazione dei primi n numeri naturali
\mathbb{C}	Campo dei vettori complessi
$\Re(z), \Im(z)$	Parte reale e immaginaria del numero $z \in \mathbb{C}$
(a, b)	Intervallo aperto (estremi esclusi)
$[a, b)$	Intervallo con a incluso ed b escluso
$[0, 1]^n$	Insieme $[0, 1] \times \dots \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$
$\#(A)$	Numero di elementi in un insieme A finito
$\text{Area}(B)$	Area di un insieme $B \subset \mathbb{R}^2$
$\mathbb{I}_A(x), A \subseteq \mathbb{R}$	Funzione caratteristica $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$
$f \circ g$	Composizione di funzioni $f \circ g(x) = f[g(x)]$
\xrightarrow{T}	Trasformazione T
$\ \mathbf{x}\ , \ \mathbf{x}\ _2$	Norma euclidea del vettore \mathbf{x} . $\ \mathbf{x}\ = \sqrt{\sum_i x_i^2}$
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	Spazio di Banach con norma $\ f\ = \int_{\mathbb{R}} f(x) ^2 dx$
$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$	Spazio di Banach con norma $\ f\ = \sup_{\mathbb{R}} f(x) $
\mathbb{I}	Matrice identità $\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbb{M}(n, m, \mathbb{R})$	Spazio delle matrici $n \times m$ ad elementi reali
$\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$	Spazio delle matrici quadrate $n \times n$

$\mathbb{S}(n), \mathbb{S}(n, \mathbb{R})$	Spazio delle matrici simmetriche $n \times n$
$X \triangleright 0$	X semi-definita positiva
\mathbf{e}_i	Elemento i -esimo della base canonica di \mathbb{R}^n , $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (l'elemento 1 è al posto i -esimo)
δ_{ij}	Delta di Kronecker. $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e 0 altrimenti
m	Dimensione campionaria $m \in \mathbb{N}$
$\{x_i\}_{i=1\dots m}$	Campione di variabile aleatoria
$\{\mathbf{x}_i\}_{i=1\dots m}$	Campione di variabile aleatoria multivariata
$\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}, \dots$	Stime campionarie
X, Y, Z, \dots	Variabili aleatorie univariate
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \dots$	Variabili aleatorie multivariate
$F_X, F_{\mathbf{X}}$	Funzione di distribuzione di X e \mathbf{X} . $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
$f_X, f_{\mathbf{X}}$	Funzione di densità di X e \mathbf{X} . $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
$X_{(1)} \dots X_{(m)}$	Statistica d'ordine
$\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$	Ipotesi nulla e alternativa di un test statistico

Simboli usati nel testo

a_x	Parametro di mortalità (modello Lee-Carter)	456
\mathcal{A}_h	Area di accettazione (metodo rapporto tra uniformi)	224
$AEP(x)$	<i>Aggregate loss exceding probability</i> al livello x	392
$\widehat{\text{Asimmetria}}(X)$	Asimmetria campionaria di X	37
${}_n a_{x_0}$	Valore di una rendita unitaria	442
${}_n A_{x_0}$	Valore di una TCM a capitale unitario	453
b_x	Sensibilità al <i>trend</i> (modello Lee-Carter)	456
$B(\alpha, \beta)$	Funzione beta di Eulero	582
$\text{Beta}(\alpha, \beta)$	Distribuzione beta	582
$\text{BinNeg}(p, r)$	Distribuzione binomiale negativa	568
$\text{Bias}(\hat{\rho})$	Distorsione di uno stimatore $\hat{\rho}$	40
c	Coefficiente di caricamento	395
c_{12}	Densità di copula associata alle componenti 1 e 2 di una variabile	122
$c(\mathbf{u})$	Densità di copula	55
$\bar{c}(\mathbf{u})$	Densità di copula di sopravvivenza	130
$c^{\text{Gauss}}(\mathbf{u}; \Sigma)$	Densità di copula gaussiana	146
$c^t(\mathbf{u}; \nu, \Sigma)$	Densità di copula t di Student	148
C	Capitale assicurato	452
C	Distribuzione del costo unitario dei sinistri	396