Aoi

Vai al contenuto multimediale

Antonio Caserio

5 × 3

Argomenti e curiosità matematiche

Aracne editrice

www.aracneeditrice.it
info@aracneeditrice.it

www.gioacchinoonoratieditore.it
info@gioacchinoonoratieditore.it

via Vittorio Veneto, 20
00020 Canterano (RM)
(06) 45551463

ISBN 978-88-255-1458-2

I edizione: novembre 2018

A Pasquale

Questa, dunque, è la matematica: essa ti rammenta la forma invisibile dell'anima; essa dà vita alle sue stesse scoperte; essa risveglia la mente e purifica l'intelletto; essa porta luce alle nostre idee innate; essa annulla l'oblio e l'ignoranza che sono in noi fin dalla nascita.

Proclo
(410–485, matematico alessandrino)

Indice

Legenda dei simboli

$\in$	appartenenza a un insieme
N	insieme dei numeri naturali
N_0	insieme dei numeri naturali escluso zero
Z	insieme dei numeri interi relativi
Q	insieme dei numeri razionali
R	insieme dei numeri reali
$\cup$	unione di insiemi
$\setminus$	differenza di insiemi
$\subset$	sottoinsieme proprio
$\approx$	uguaglianza numerica approssimata
$>$	maggiore
$<$	minore
$\geq$	maggiore o uguale
$\leq$	minore o uguale
$\perp$	perpendicolarità tra rette o segmenti
$//$	parallelismo tra rette o segmenti
ln	logaritmo naturale
∞	infinito
$!$	fattoriale
$\sum$	sommatoria di termini
$\prod$	prodotto di termini
$\int_a^b f(x)dx$	integrale definito di una funzione $f(x)$
$\binom{n}{k}$	numero delle combinazioni di classe k di n oggetti $\left(= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots(n-k+1)}{k!}\right)$

Premessa

I capitoli di questo libro derivano per la maggior parte da una serie di articoli pubblicati su riviste di didattica e informatica nelle scuole secondarie, tra la fine degli anni novanta e gli inizi del duemila.

Essi si riferiscono a curiosità matematiche proposte a giovani studenti al fine di suscitare in essi la passione per la matematica, non solo materia dagli usuali contenuti dei programmi, ma anche scienza aperta alle più stimolanti sfide per i tanti problemi irrisolti, le numerose congetture ancora da dimostrare sulla scia delle intuizioni e del lavoro di personaggi straordinari, talvolta appartenenti alla propria regione.

I capitoli, non essendo propedeutici, si possono leggere secondo i propri interessi.

Gli argomenti proposti si prestano a vari livelli di studio senza escludere la possibilità di fare matematica con i ragazzi iniziando da semplici enigmi, con i concetti acquisiti a scuola.

Le riviste contenenti gli articoli erano riposte e abbandonate da anni negli scaffali di una vecchia libreria in cantina. È stato il dott. Gianni Vitullo, amico e profondo cultore di matematica e fisica, che qui ringrazio, a ricordarmi che essi contenevano qualcosa di buono e di originale. Da qui, l'idea di ricavarne, con alcuni aggiornamenti e qualche capitolo nuovo, un libro.

In esso sono presenti alcuni sviluppi fecondi di semplici curiosità, i dovuti riferimenti storici, nonché gli accenni alle questioni ancora aperte. Non manca, infine, qualche aneddoto per rendere più piacevole la lettura.

Capitolo I

Triangoli eroniani

1.1. Premessa

Assegnando problemi di geometria per il calcolo dell'area di un triangolo con la formula di Erone[1]

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(p semiperimetro, a, b, c lunghezze dei lati) ho trovato sui testi alcune terne numeriche, a esempio (13, 14, 15), (13, 10, 21) per cui la radice quadrata presente nella formula risulta esatta.

Mi sono chiesto se, come per le terne pitagoriche (formule di Pitagora e di Diofanto), esistessero delle formule per ottenere *terne eroniane*. Non trovandole sui testi a mia disposizione, per la marginalità dell'argomento, mi sono proposto di cercarle.

1.2. Definizioni e procedimento

Il ragionamento che conduce alle formule trovate è abbastanza semplice. Ricordato che ogni triangolo è scomposto dall'altezza relativa a un lato in due triangoli rettangoli e osservato che *ogni triangolo rettangolo avente per lati una terna pitagorica è tale che la formula di Erone dà per esso la radice quadrata esatta*, per risolvere la questione basterà considerare due particolari composizioni di triangoli rettangoli *pitagorici*.

1. Matematico greco di Alessandria d'Egitto, vissuto tra il I e il II secolo d. C. Si occupò di meccanica, idraulica e geometria applicata. La sua opera più importante è *Metriká* (*Teoria della Misura*) in tre libri. In essa, Erone affronta il problema di determinare le aree dei poligoni regolari e irregolari ed espone la celebre formula che esprime l'area di un triangolo in funzione dei lati.

Se T_1, T_2 sono due triangoli rettangoli pitagorici aventi un cateto uguale (Fig. 1.1), il primo triangolo *eroniano* T_e (Fig. 1.1, costruzione per la terna 13, 20, 21) si ottiene dall'*unione* di T_1 e T_2 per il cateto uguale, riportando i cateti non uguali da parti opposte rispetto al cateto comune.

Chiameremo questa composizione *costruzione di area maggiore* e la indicheremo con il simbolo $\cup$. Il secondo triangolo T_e^* (Fig. 1.2, costruzione qualsiasi) si ottiene dalla *differenza* fra i due triangoli T_1 e T_2, riportando, dopo l'unione per il cateto uguale, il minore dei due cateti non uguali dalla stessa parte del cateto maggiore. Questa sarà la *costruzione di area minore* e si indicherà con il simbolo $\setminus$.

Le due costruzioni sono sempre possibili. Se i due triangoli pitagorici sono uguali, la costruzione *maggiore* dà un triangolo isoscele mentre la *minore* dà un segmento.

Definiamo meglio, ora, alcuni termini già usati e dimostriamo due lemmi la cui utilità sarà presto chiara.

Definizione 1. Chiameremo *Triangolo Eroniano* un triangolo le cui misure a, b, c dei lati e l'area A siano numeri interi positivi.

Definizione 2. Chiameremo *Terna Pitagorica* una terna a, b, c di numeri interi positivi, con $a < c$ e $b < c$, tali che:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1.1}$$

Il triangolo rettangolo corrispondente sarà detto *pitagorico*.

Lemma 1. In una terna pitagorica i numeri interi a e b non sono entrambi dispari.

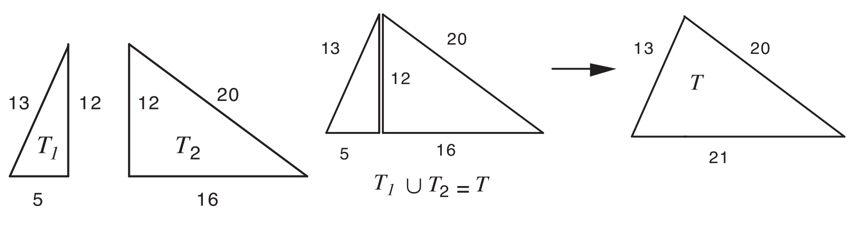

Figura 1.1.